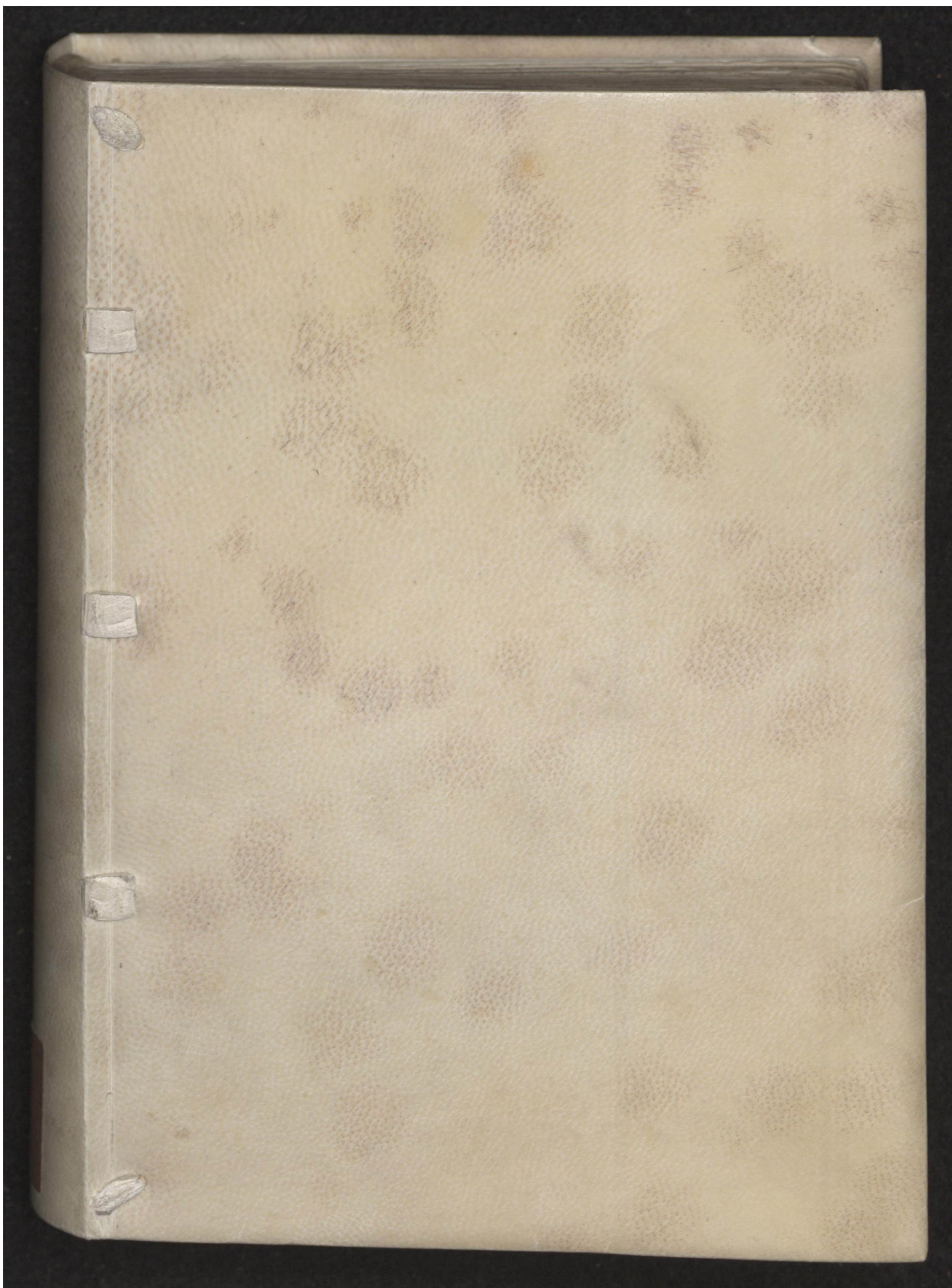
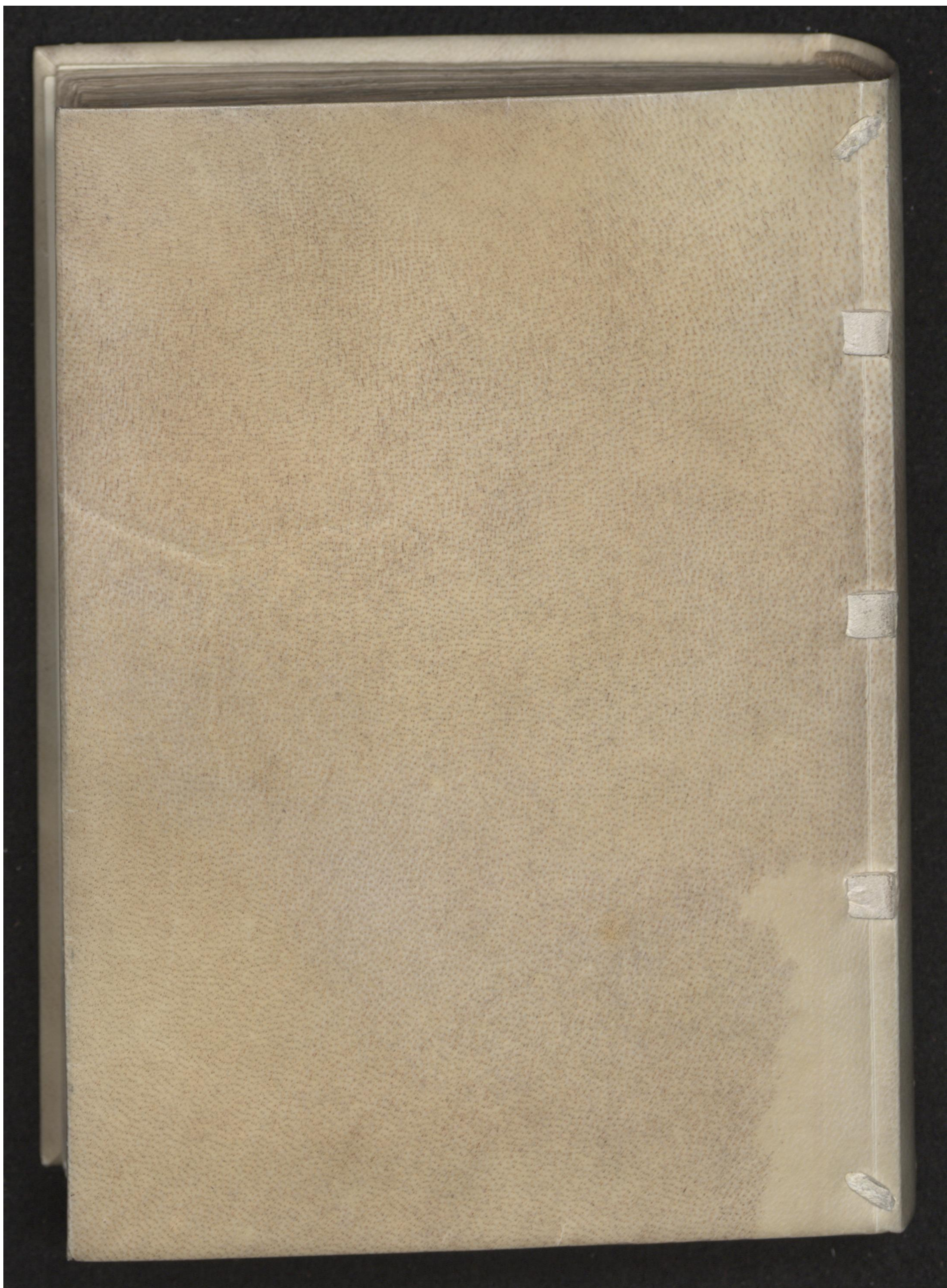



1
6
283



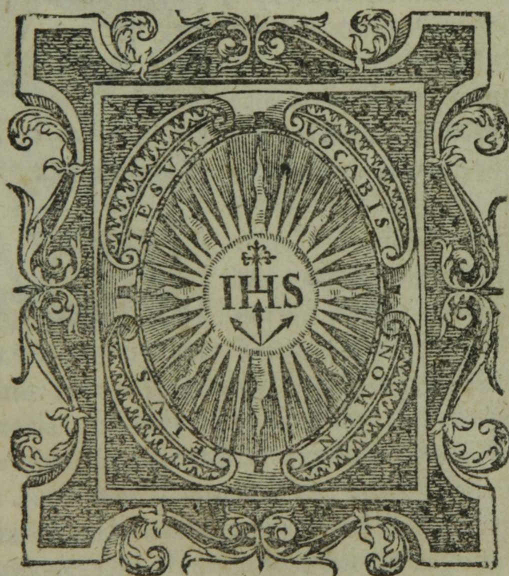






CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV.

GEOMETRIA PRACTICA.





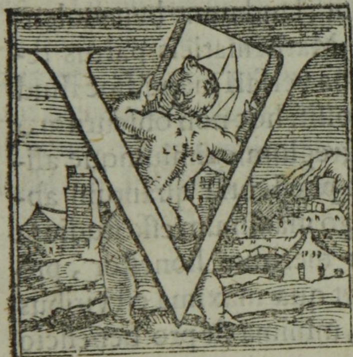
ROMAE,
Ex Typographia Aloisij Zannetti. MDCIIII.

Superiorum Permissu.

PERILLVSTRI AC GENEROSO D.

GEORGIO FVGGERO SENIORI BARONI IN KIRCHBERG, ET VVEISSENHORN.

Christophorus Clauius e Societate IESV S.P.D.



VT veniet in manus tuas liber hic meus, Generose Domine, veniet & in mentem, vt opinor, Theocritaeum illud, βάρδισται μακάρων ὧραι φίλαι: cum lentissimo gradu, quo mira celeritate aduolare debuerat, vix aliquando peruenerit. Serius omnino merito tuo, & voto meo partus hic noster properat ad Patronum suum: verum si editum illum iam grauibus annis reputaueris, facile apud te constitues, à tarda senectute non nisi fœtum tardum expectari potuisse. Nunquam alias tam frequentibus, molestisque morbis conflictatus, nunquam tanto arsi desiderio, vt quod iam diu conceperam, aliquando in lucem exponerem, experientia, & Pindarica voce doctus, ἀπροσίκτων ἐρώτων ὀξυτέρας εἶναι μανίας. Obuersabaris enim noctes, diesque oculis meis, vir amplissime: & iure tuo, vt

iam affecta perfecta tibi traderem, flagitare videbaris. Non exiguam vim pecuniæ gentilitia liberalitate ad mensas deposueras, paratam in vsus, expensasque cudendi libri: res monebat, vt diligentia mea minus prompta non esset munificentia tua. Accedebat quod onus Aetna grauius imposuerat obseruantia tua singularis in me: quo aliqua ex parte qua ratione leuari possem alia, non videbam. Vir enim in Mathematicis non vulgari cum laude exercitatissimus, tanto in honore habuisti semper labores, & libros meos, vt ijs, qui te probe, meque norunt, pene miraculo possis esse. Si enim Clauij libros in manibus haberes eo consilio: vt amici tui scripta, quod potes, redderes meliora: doctrinam tuam omnes agnoscerent, laudarent beneuolentiam; Sed à te tanto viro in Mathematicis partus tenues, nec operæ multæ assidua versari manu, hoc illud est, quod iure mirari quis possit: hoc non obscurum indicium, à te mea, quasi egregium, eximiumque aliquid sint, existimari. A qua præstantia quantum absim, quia video: ideo intelligo maximum esse studium in me tuum: à quo si præter meritum honestor, pro merito certe ita obstringor, vt quæ maxima est viribus meis grati animi testificatio, minima sit pro beneficio tuo. Hanc tamen qualemcunque gratæ mentis in te significationem extare quam primum volebam, cum præsertim ad has rationes accessio fieret aliarum, quæ apud optimum quemque plurimum semper valere consueuerunt. Ego enim has viuendi rationes, & instituta secutus, ad cuius alterius patrocinium meos libros adlegarem, nisi ad illum, quem vniuersus nostræ Societatis ordo acerrimum sui propugnatorem, & amantissimum patronum semper expertus est? Familiaris igitur tibi cum sit tutela nostrum, mea hæc ab inuidorum,

igna-

ignarorumque morsibus vindicabis, non auctoritate modo vrgens aduersarios, sed etiam doctrina. Qua cogitatione sum permotus, vt tibi præcipue Geometriam Practicam destinarem. Iis etenim, qui nostris in studijs non admodum desudarunt, si quid offeras tale, magna cura explicanda prius est, & commendanda per epistolam libri doctrina, ne se contemptos humilitate muneris arbitrentur. Tu, vt hoc dũtaxat vnum legis, Geometria Practica; quantum vtilitatis, voluptatisq. lateat in toto libro, optime peruides. His igitur assiduis cogitationibus, quasi tot facibus inflãmatus, ætatẽ, valetudinemque aduersam, Deo propitio, tandem vici; & per hæc locorum interualla opus ad te tuum venire iubeo. Tuum, inquam: & quia virtus, liberalitasque tua illud asseruere tibi: & quia ab eo scriptum est, qui tuus est. Quod si gratum fuisse tibi intelligam, laborum meorum fructum cumulatum feram, cum amantissimum mei re non ingrata donauerim. Vale.

ROMAE PRIDIE IDVS SEPTEMB. MDCIIII.

Claudius Aquauiua Societatis Iesu Præpositus Generalis.

CVM opus hoc Geometriæ Practicæ, a P. Christophoro Clauio Societatis nostræ Theologo compositum, & in octo libros distributum, tres eiusdem Societatis Theologi, quibus id commisimus, recognouerint, ac in lucem edi posse probauerint; facultatem concedimus, vt typis mandetur, si ita Reuerendissimo D. Vicesgerenti, ac Reuerendiss. P. M. sacri Palatij videbitur. In quorum fidem has literas manu nostra subscriptas, & sigillo nostro munitas dedimus. Romæ 23. Maij 1604.

Claudius Aquauiua Societatis Iesu Præp. Gen.

Imprimatur si placet R. P. M. S. Palatij.

B. Gypsius Vicesgerens.

EGO Theodosius Rubeus Priuernas S. Theol. & I. V. D. ex commissione Reuerendiss. P. M. Ioannis Mariæ Brasichellen. Sac. Palat. Apost. Mag. sedula, qua potui diligentia, euolui Geometriæ Practicæ libros octo, grauissimi, & doctissimi viri Christophori Clauij Bambergensis Societatis IESV, in qua talis inuentionum vbertas, & subtilissima inuentorum demonstratio elucet, vt tanto viro, tantoq. ingenio digna censeatur. Ex quo facilè deprehendi potest, in ea nihil Catholicæ Religioni, bonisq. moribus dissonum inueniri, eamq. in lucem non edere, esset patrisfamilias creditum talentum in terra defodere. Et ita ego censeo, saluo semper saniori iudicio. Dat. ex meo studio hac die 16. Iulij 1604.

Ego Theodosius Rubeus, qui supra, manu propria.

Imprimatur

Fr. Paulus de Francis de Neap. socius Reuerendiss. P. Magistri sacri Palatij Apost.

INDEX

CAPITVM, PROBLEMATVM, ac Propositionum horum 8. librorum.

PRIMI LIBRI CAPITA.

SECVNDI LIBRI PROBLEMATA.

TERTII LIBRI PROBLEMATA.

propter

QVARTI LIBRI CAPITA.



QVINTI LIBRI CAPITA.

SEXTI LIBRI PROPOSITIONES.

SEPTIMI LIBRI
Propositiones.

dimidia

culi

OCTAVI LIBRI
Propoſitiones.

Arcus

FINIS.

ERRATA

Quæ obiter animaduersa sunt.

Pag.	lineæ	Errata	Correctiones
123	16	altitudinis extensæ	altitudinis extensa
163	17	speculi plano	speculi plani
194	4.à fine	Ludouicus	Ludolphus
223	5	similes ex similiterque	similes similiterque
327	3	PROBLEMA	THEOREMA
343	7	ambitus	ambitu
397	10	inter se æquales	inter se æqualia

Post pag. 279. in sequente scribe numerum 280. & in alia sequente, 281.

In figura problematis 13. lib. 2. & problematis 18. lib. 3. duc rectam B D, à B, in D.

In figura problematis 22. lib. 2. & problematis 26. lib. 3. dele lineam CA, & duc lineam EA, ex E, ad A.

PRAEFATIO.



VANDOQVIDEM Mathematicarum disciplinarum stadium scribendo ingressi, nonnullam eius partem, fauente Deo, percurrimus: Geometriæ practicæ tractatio omittenda non fuit, ut nisi metam tangere licuerit, ab illa certe quam minime distemus. Ætatem senectute grauem allicit operis iucunditas, laborem leuat varietas, amicorum preces tantum non cogunt, quò mea ferebar sponte, summa cum festinatione properare. Et vero, cum perpetua multorum annorum experientia compererim, admodum paucos esse, qui non in Mathematicis exerceantur eo consilio, ut quæ didicerint, ad aliquem vsum trahant: in hoc quicquid est laboris veniebam alacer, vt qui fructus è Mathematicis percipi possint ad humanæ vitæ commoda, non inani venditatione, sed re ipsa constaret. Etenim dum certa ratio traditur, qua camporum longitudines, altitudines montium, vallium depressiones, locorum omnium inæqualitates inter se, & interualla deprehendere metiendo debeamus: cuilibet liquet, vt arbitror, quantum commodi, vtilitatisque substructioni ædificiorum, cultui agrorum, armorum tractationi, contemplationi siderum, alijsque artibus, & disciplinis ex horum cognitione manare possit. Hæc enim vna Mathematicarum rerum scientiæ pars, sicut ab artificibus ob sui necessitatem auidè semper est arrepta: ita ob insignes vtilitates, quas in re tota militari suppeditat, in maximorum Principum, Regumque aulis omni tempestate versata est. Quamobrem & multos, & eruditos viros habuit, qui partes illius omnes accurata, & diligenti scriptione persecuti sunt: Inter quos, vt Leonardus Pisanus, Frater Lucas Pacciolus, Nicolaus Tartalea, Orontius, Cardanus, alijque præcipuas obtinuerunt: ita eximia in cæteris laude floruerunt. Primas tamen adiudicarim Io. Antonio Magino præstanti Mathematico; qui tametsi tantum linearum dimensiones docuit, ea tamen copia, doctrina, perspicacitate cuncta tradidit, vt locum non modo ijs, qui ante scripserunt, sed spem posteris æqualis gloriæ, ne dum maioris,

ademisse videatur. Verum quoniam & hic de vnica tantum parte fuit sollicitus: & alij, quamuis aggressi omnia, multa tamen inter scribendum prætererierunt: decreui, si quà possem, perficere: ut, quicquid vtiliter in Geometria practica ab alijs traditum, à me etiam inuentum est, vnius operis gyro clauderetur. Quod opus, cum species tres quantitatis continuæ sint, in tria membra, partesq. præcipuas secuimus: In prima rectas lineas, in altera superficies, corpora metientes in postrema: cui adnectuntur alia, quæ non tam ad quantitatis dimensionem, quam ad alias Geometriæ praxes, ac demonstrationes pertinent, à nostro instituto non aliena.

VNIVERSAM autem tractationem in octo libros partiti sumus.

PRIMVS propositiones tres omnino necessarias, & per quam vtiles ad omnium magnitudinum dimensionem accurate perficiendam continet.

IN secundo dimensio linearum rectarum per Quadrantem Astronomicum tam pendulum, quàm stabilem absoluitur.

TERTIVS de earundem rectarum linearum dimensione per Quadratum Geometricum tum pendulum, tum stabile, etiam per vnicam stationem, agit. Vbi etiam, qua ratione sine huiusmodi instrumento earundem rectarum linearum Dimensiones nonnullæ fieri possint, traditur.

QVARTVS superficierum areas inquirit:

QVINTVS solidas magnitudines metitur.

ATQVE hisce quinque libris omnes tres partes Geometriæ practicæ à nobis propositæ explicantur.

IN sexto deinde libro de Geodæsia, id est, de superficierum rectilinearum cuiusque generis Diuisione tam per rectas ex certo aliquo puncto ductas, quam per lineas parallelas, disseritur. Vbi nonnulla etiam alia problemata ad idem argumentum spectantia soluuntur. Item qua ratione figuræ tam planæ, quam solidæ, vnà cum circulo ac sphæra in data proportione augendæ sint, minuendæue. In cuius rei gratiam modi aliquot proponuntur inueniendarum duarum mediarum proportionaliũ inter duas rectas datas. Denique ars facilis, & expedita pro extrahendis radicibus cuiusque generis præscribitur.

SEPTIMVS de figuris Isoperimetris disputat.

IN Octauo denique varia problemata, ac theoremata Geometrica pertractantur.

GEOMETRIAE PRACTICAE.

LIBER PRIMVS

Tria capita ad dimensionem linearum summe necessaria complectens.





VT magnitudinum dimensio omnibus suis numeris absoluta, perfectaque reddatur, tria primo hoc libro diligenter explicanda prius erunt. Primum construenda est norma quædam variarum partium, quam non incongruè Instrumentum partium vocare possumus; quòd in eo variæ partes & ad lineas rectas, & ad circulos diuidendos, tum etiam ad alias operationes siue Geometricas, siue Astronomicas ritè perficiendas contineantur. Huius enim vsus credi vix potest, quàm latè pateat tum in dimetiendis magnitudinibus sine numerorum multiplicatione, tum vero maxime in horologijs Solaribus ea ratione, quam per lineas Tangentes in noua horologiorum descriptione tradidimus, describendis, & in alijs rebus tam Geometricis, quàm Astronomicis, vt ex ijs, quæ capite primo huius libri, & alibi tradituri sumus, perspicuum fiet. Secundo loco conficiendus est qua-

quadrans, in quo præter gradus, Minuta quoque ac Secunda (quamuis in eo designata non sint) cognosci, ac discerni queant; docendumq;, qua ratione idem præstari possit in quolibet quadrante in 90. gradus exquisitè distributo: partesque centesimæ, atque millesimæ in recta quauis linea in paucissimas partes æquales diuisa dignoscendæ sint. Tertio atque postremo loco proponenda erunt, ac soluenda uaria problemata triangulorum rectilineorum, vt & latera eorum, atq. anguli ex quibusdam datis, & cognitis facile possint cognosci. Quamuis enim eadem hæc problemata ad finem Lemmatis 53. lib. 1. nostri Astrolabij exposita sint, tamen ne studiosus lector ad illud Lemma sæpius, & non sine molestia recurrere cogatur, libet ea hic repetere totidem penè verbis, quot in prædicto Lemmate perscripta sunt. Sed ecce tria hæc, quæ præmittenda esse diximus, tribus capitibus explicata sequuntur.

INSTRVMENTI PARTIVM
Constructio, atque vsus.

CAPVT I.

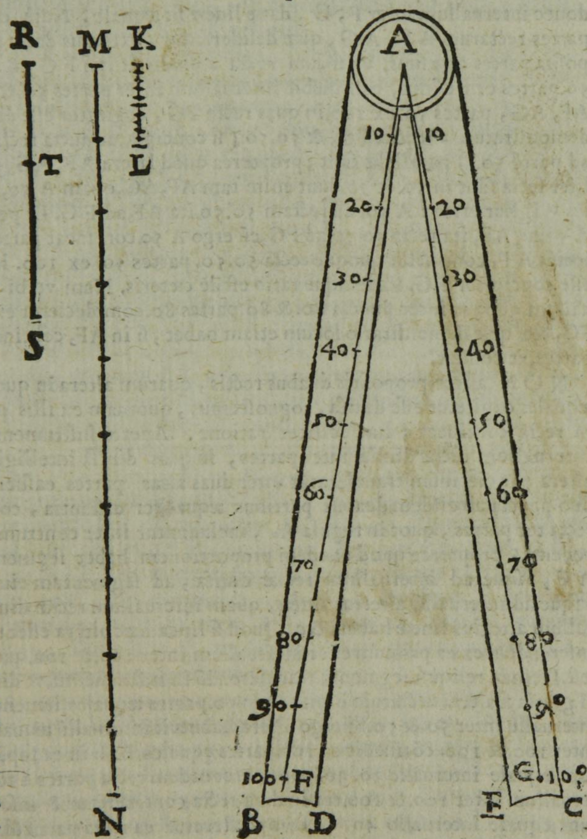
Instrumentum partiũ quo pacto cõstruatur.



IANT ex orichalco, vel alia materia solida duæ regulæ A B D, AEC, æquales omnino, quæ in A, ita coniungantur clauo aliquo tereti, vt circa A, vniformiter possint moueri, quemadmodum in Norma vulgari, quæ, prout opus est, constringi potest, & dilatari, fieri solet. Deinde ex A, in planis dictarum regularum duæ rectæ ducantur AF, AG, eæque in 100. particulas æquales distribuantur, vel in 1000. si longiores sint. Ita enim ex qualibet recta quotuis partes centesimæ, aut millesimæ abscindi poterunt. Immo si sumatur linea KL, continens 11. particulas ex illis 100. vel 1000. diuidaturque in 10. partes æquales, si quidem secta sit vtraque regula in 100. partes æquales, poterunt beneficio rectæ KL, continentis 11. particulas eiusmodi, & in 10 partes æquales diuisæ, ex data recta qualibet accipi quotuis millesimæ partes, perinde ac si partes singulę centesimæ in vtraq. regula sectæ essent in denas particulas æquales: si vero vtraque regula in 1000. particulas distributa sit, & linea KL, talium 11. partium in 10. particulas dissecta, poterũt ex quauis linea recta proposita partes, quot quis voluerit, millesimarum decimæ auferri, non secus ac si singulæ partes millesimæ in regula distributæ essent in 10. particulas æquales, vt in vsu instrumenti dicemus.

RVRSVS si regula contineat 100. partes, & recta quæpiam MN, constans ex 101. eiusmodi particulis distribuatur in 100. parteS, poterimus ex quauis data recta accipere partes decimas millesimarum. At si in regula notatæ sint 1000. partes, & linea quæpiam continens eiusmodi partes 101. secetur in 100. partes, deprehendi poterunt in qualibet recta quotcunque partes centesimæ millesimarum, ac si partes singulæ millesimæ in regula complecterentur partes 100. Si denique linea earum partium 1001. diuidatur in 1000. partes, capiemus in quauis recta partes millesimas millesimarum, perinde ac si partes millesimæ singulæ in regula partes 1000. comprehenderent, vt ex vsu instrumenti constabit. Atque hæc est constructio instrumenti in vna facie pro partibus linearum rectarum inquirendis

IN altera vero instrumenti facie designantur chordæ omnium arcuũ quadrantis hoc modo. Ductis ex centro A, rectis AF, AG, vt in priori facie, sumendus est quadrans circuli chordam habens æqualem rectæ AF, & in rectas AF, AG, transferenda chorda gradus 1. illius quadrantis, deinde chorda grad. 2. 3. 4. 5. & sic deinceps vsq; ad chordam 89. graduũ: ita enim ex quolibet quadrante abscindere licebit arcum



quotcunque graduum, vt Num, 16. dicetur: quamuis nos beneficio particularum æqualium in priori facie positarum capiemus ex quadrante proposi-

to non solum gradus integros, sed etiam minuta, quod Num. 14. docebimus. Atque ita absoluta est constructio instrumenti in altera facie. Huius instrumenti vsus amplissimus est, vt diximus, & non obscure ex ijs, quæ sequuntur, intelligi potest.

Centesimæ, vel millesimæ partes in recta linea quo modo accipiantur.

1 QVANDO enim linea recta proposita rectæ AF, vel AG, in priori facie instrumenti æqualis est, nullo negotio ex ea abscindentur quotcunque partes centesimæ, aut millesimæ, prout instrumentum in 100. aut 1000. partes fuerit diuisum; si nimirum partes, quæ desiderantur, ex instrumento in datam rectam transferantur.

2 QVANDO vero proposita linea non est æqualis rectæ AF, vel AG, in instrumento, dilatandum instrumentum est, vel constringendum, donec interuallum inter F, G, datæ lineæ sit æquale. Nam circinus inter partes rectarum AF, AG, quæ desiderantur, extensus dabit in recta proposita partes quæsitas. Vt si data recta æqualis sit ipsi FG, & desiderentur 50. partes centesimæ, continebit interuallum inter partes 50. & 50. in lineis AF, AG, partes 50. ex 100. in quas recta FG, cogitatur esse diuisa. quod sic demonstratur. [a] Rectæ FG, & 50.50 (si concipiatur ducta recta à parte 50. ad partẽ 50.) parallelæ sunt; propterea quod latera AF, AG, proportionaliter secta sunt in 50. & 50. Sunt enim tam AF, AG, quam A 50, A 50, æquales [b]. Igitur erit vt A 50. ad rectam 50.50. ita AF, ad FG. Et permutando vt A 50. ad AF, ita recta 50.50. ad FG, cũ ergo A 50. contineat partes 50. ex 100. totius AF, continebit quoque recta 50.50. partes 50. ex 100. in quas diuisa esse concipitur FG. Eademque ratio est de cæteris. Nam verbi gratia interuallum quoque inter puncta 80. & 80 partes 80. complectetur ex 100. totius FG, &c. quæ demonstratio locum etiam habet, si in AF, contineantur 1000. partes, vt constat.

a 2. sext.
b 4. sexti.

Diuisa recta in quotuis partes æquales, quot eiusmodi partes in quauis alia contineantur.

NON aliter, propositis duabus rectis, quarum altera in quotlibet partes æquales cogitetur esse diuisa, cognoscemus, quotnam ex illis partibus altera recta contineat; hac scilicet ratione. Aperto instrumento, statuatur interuallum rectæ diuisæ inter partes, in quas diuisa intelligitur. Nam si altera per circinum transferatur inter duas alias partes easdem, vel inter duo puncta ab eisdem duabus partibus æqualiter distantia, continebit illa recta tot partes, quot in regula AF, includuntur inter centrum A, & circini pedem: [c] propterea quod eandem proportionem habet segmentum regulæ AF, vsque ad interuallum rectæ diuisæ, ad segmentum eiusdem regulæ vsque ad interuallũ alterius lineæ, quam interuallum rectæ diuisæ ad interuallum alterius lineæ habet, &c. Quod si linea hæc altera esset nimis longa, auferendum ex ea primum esset interuallum inter 100. & 100. quoties fieri potest. Deinde reliquũ segmentũ transferendũ in instrumentũ, vt dictum est. Verbi gratia si altera rectarum diuisa sit in 50. partes æquales, sumemus ei æquale interuallũ inter 50. & 50. Si ergo altera habuerit interuallũ æquale rectæ FG, inter 100. & 100. cõtinebit ea 100. partes ęquales. Et si in ea superesset segmẽtum æquale interuallo 30. 30. contineret eadem recta partes 130. Quod si interuallum inter 100. & 100. ter in data recta contineretur, & insuper segmentum æquale interuallo 40. 40. complecteretur ea recta particulas 340. &c.

c 4. sexti.

Tangentes quo modo accipiantur respectu sinus totius 100.

3 ITAQVE si in Tangentibus nouæ desciptionis horologiorum (vt huius instrumenti vtilitatem quoque in describendis horologijs aperiamus) sinus totus statuatur 100. quantuscunque ille sit, eique interuallum FG, ponatur æquale, capiemus commodissime quamcumque Tangentem tabulæ in

noua descriptione positæ, si ea, abiecta prima tantum figura ad dexteram, minor fuerit quam 100. Vt si quæratur Tangens Grad. 39. min. 57. quoniam ea in tabula est 838. si abijciatur prima figura 8. ad dexteram, erit Tangens 83. respectu sinus totius 100. vel potius 84. propterea quod figura 8. abiecta maior est, quam 5. ac proinde pro ea vnitas adijcienda est, cum constituat $\frac{8}{10}$ hoc est, plusquam $\frac{1}{2}$. Itaque si accipiantur in instrumento partes 84. paulo minus, vt dictum est, habebitur Tangens quæsita: si vero Tangens in tabula, abiecta prima figura ad dexteram, maior fuerit quam 100. accipienda est Tangens per denas, atque vnitates expressa, relictis centenis, & illi Tangenti postea sinus totus adijciendus est toties, quoties vnitas in centenis reperitur. Vt si quis velit Tangentem Grad. 68. min. 50. quoniam ea in tabula est 2583. & abiecta prima figura, 258. sumenda est Tangens 58. eique sinus totus FG, bis adijciendus, & sic de reliquis.

4 QVOD si rectam KL, partium 11. in 10. æquales partes diuisam adhibere velimus accipere poterimus ex data recta partes millesimas. Quoniam enim ita se habet linea K L, ad vnam eius partem, vt portio A 10. rectæ AF, decem partium ad vnam, cum vtrobique proportio sit decupla; erit permutando quoque KL, ad A 10. vt vna particula ipsius K L, ad vnam particulam ipsius A 10. Cum ergo K L, contineat ipsam A 10. semel, & insuper partem ipsius decimam, (sumpta est enim KL, partium 11. qualium 10. est A 10.) continebit quoque vna particula ipsius KL, vnam particulam ipsius A 10. semel, & decimam insuper eius partem: Atque adeo duæ illius includent duas huius cum $\frac{2}{10}$. & tres continebunt tres cum $\frac{3}{10}$. & sic deinceps. Quare si verbi gratia desiderentur $\frac{87}{1000}$. accipiendæ erunt octo partes ex 100. totius AF, & insuper $\frac{7}{10}$. sequentis partis nonæ, cum decima pars vnius centesimæ sit $\frac{1}{1000}$. quod ita fiet. Circino aliquo sumantur 7. partes ex KL, eæque in A F, transferantur ex qualibet parte. Nam pes circini mobilis auferet $\frac{7}{10}$. ex octaua parte post pedem circini immobilem, quæ particula in nonã partem est transferenda. Ita enim, cũ octo partes complectantur $\frac{80}{10}$. vnius centesimæ, (quod quælibet pars contineat $\frac{10}{10}$. vnius centesimæ.) hoc est, $\frac{800}{1000}$. & $\frac{7}{10}$. vnius centesimæ contineant $\frac{7}{1000}$. comprehendet tota linea abscissa $\frac{87}{1000}$. Item si quis cupiat $\frac{17}{1000}$. accipienda erit vna pars ipsius AF, & $\frac{7}{10}$. sequentis partis secunde, vt paulo ante dictum est. Vel sic agemus. Sumptis 7. partibus ex KL, transferemus eas in AF. vbicunque libuerit. Nam abscissæ partes erũt $7\frac{7}{17}$. Vna ergo pars cum $\frac{7}{10}$. continebit $\frac{17}{1000}$. Denique si optentur $\frac{457}{1000}$. sumendæ erunt ex recta A F, partes 45. cum hæ æquiualeant $\frac{450}{1000}$. Deinde $\frac{7}{10}$. ex sequenti parte quadragesima sexta, beneficio septem particularum rectæ KL, &c.

Millesimæ partes quo modo capiã tur, etiam si in instrumẽto contineã tur tantum partes 100.

5 SI ergo sinus totus ponatur 1000. habebuntur Tangentes, vt in tabula nouæ descriptionis horologiorum positæ sunt, nulla figura abiecta. Sed quando Tangens maior est quam 1000. relictis millenis, accipendæ sunt reliquæ partes millesimæ pro Tangente, eique toties sinus totus addendus, quoties vnitas in millenis reperitur. Vt si quis velit Tangentem Grad. 40. min. 30. quæ in tabula est 854. accipiendæ sunt in regula AF, partes 85. & $\frac{4}{10}$. vnius. Ita enim Tangens continebit partes 854. ex 1000. At si quæratur Tangens Grad. 80. min. 0. quæ in tabula est 5671. relictis millenis, accipiendæ sunt partes 67. & $\frac{1}{10}$. vnius partis, & Tangenti 671. addendus sinus totus quinquies.

Tangentes quo modo inueniãtur, posito sinu toto 100.

Decimæ partes millesimarum quo modo sumantur, etiam si instrumentum diuisũ sit in 100, partes duntaxat.

6 PARI ratione si adhibeatur recta MN, partium 101. diuisa in 100. depromemus ex recta AF, partes decimas millesimarum; cum quælibet particula rectæ MN, contineat vnam particulam ipsius AF, semel, & insuper $\frac{1}{100}$. Ita vt quælibet particula rectæ AF, diuisa esse cogitetur in 100. particulas; ac proinde tota AF, sit 10000. particularum, quod eodem modo demonstrabitur. Est enim eadem proportio MN, ad vnam particulam suam centesimam, quæ rectæ AF, ad vnam suam centesimam, &c.

Tangentes, posito sinu toto 10000. quo pacto sumantur.

7 ATQVE hac ratione haberi poterunt Tangentes, posito sinu toto 10000. abiectis nimirum tribus figuris primis ex Tangentibus tabulæ in nostro Theodosio descriptæ. Vt si velimus Tangentem Grad. 78. Min. 30, quæ in tabula (abiectis tribus figuris) est 49151. relictis denis millenarum, accipiemus partes 9151. nimirũ partes 91. ex 100. regulæ AF, & $\frac{51}{100}$. vnius. quod fiet, si partes 51. rectæ MN, transferantur in AF. Circinus enim vltra partes 51. abscindet $\frac{51}{100}$. Nam quia singulæ particulæ rectæ AF, concipiuntur sectæ in 100. particulas, continebuntur in 91. partibus particulæ 9100. quibus si addantur 51. habebitur Tangens 9151. Huic tandem apponendus est sinus totus quater, propter quatuor denas millenarum relictas. Facile autem ad 91. partes adijcies particulam continentem $\frac{51}{160}$. vnius centesimæ, si eam, (quæ nimirum vltra partes 51. regulæ AF, existit) cum vna parte regulæ AF, transferas, vt pes circini inter partes 91. & 92. cadat, hoc est, si eam cum vna parte transferas ex parte 90. vel cum duabus partibus, ex parte 89. &c.

Qua ratione ex inuenta parte millesima, vel decies millesima in AF, eadem reperiatur respectu dati sinus totius.

8 INVENTA porro Tangente in vtraque regula AF, AG, dabit interuallum inter Tangentem regulæ AF, & Tangentem regulæ AG, eandem Tangentem respectu sinus totius FG.

9 QVANDO autem Tangens tam exigua est, vt eius interuallum prope punctum A, accipi nequeat, vtemur hoc artificio. Sit verbi gratia sumenda Tangens 7. partium respectu sinus totius FG. Sumptis duabus Tangentibus maioribus, quarum maior minorem septem vnitatibus superet, nimirum 30. & 37. vel 80. & 87. &c. dabit earum differentia (si nimirum vtraque in aliquam rectam lineam transferatur) Tangentem 7. quæ quæritur: Atque ita semper sumendæ erunt duæ Tangentes maiores prope medium instrumentis quarum differentia æqualis sit Tangenti exiguæ propositæ.

10 SI vtraque regula AF, AG, contineat 1000. particulas, & sinus totus propositus constituatur 1000. eique interuallum FG, æquale sumatur, commodissime accipientur omnes Tangentes, vt in tabula nouæ descriptionis horologiorum positæ sunt. Nam verbi gratia Tangens 2430. Grad. 67. min. 38. habebitur, si relictis millenis, sumatur interuallum inter partes 430. vtriusque regulæ AF, AG, eique sinus totus FG, bis adijciatur.

11 ET si adhibeas lineam KL, partium 11. diuisam in 10. accipere poteris Tangentes respectu sinus totius 10000. Item si rectam partium 101. in 100. particulas distributam adhibeas, habebis Tangentes respectu sinus totius 100000. Si denique rectam partium 1001. partiaris in 1000. particulas, obtinebis Tangentes, posito sinu toto 1000000. vt ex dictis patet.

12 QVOD dictum est de Tangentibus, intelligendum est etiam de sinubus, & secantibus. Nam si interuallum FG, æquale sit sinui alicui toti, siue is partium sit 100. siue 1000. siue plurium, dabunt interualla inter sinus, vel secantes in vtraque regula AF, AG, acceptas, per ea, quæ Num. 4. docuimus, sinus & secantes respectu sinus totius FG, accepti; propterea quod per Lemma

5. lib.

5. lib. 1. nostri Astrolabij, eandem proportionem habet sinus totus AF, ad sinum totum FG, quam sinus verbi gratia A 50. ad sinum arcus circuli, cuius semidiameter FG, qui arcus arcui sinus A 50. similis est. *a* Cum ergo sit, vt AF, ad FG, ita A 50. ad rectam 50. 50. erit recta 50. 50. sinus arcus, qui arcui sinus A 50. similis est. Eademque ratio est de secantibus. a 4. *sexti.*

Quo pacto cognoscatur, quot decimæ in particula cum iusuis centesimæ partis contineantur.

13 VICISSIM cognoscemus, quot particulas ex 1000. quælibet particula vnius partis rectæ AF, complectatur: hoc scilicet modo. Circino sumatur data particula, vna cum vna parte centesima, vel duabus, vel tribus, quatuorue; circinusque decies repetatur in recta A F, diligenterque notetur segmentum rectæ AF, quod circinus percucurrit. Nam si ex partibus centesimis in eo segmento contentis abijciantur toties 10. quot partes vna cum particula data sumptæ fuerunt, reliquus numerus indicabit partes decimas vnius centesimæ, hoc est, millesimas in data particula comprehensas. Et si cum reliqua particula eius segmenti (si qua forte supersit) similiter agemus, reperiemus partes decimas vnius millesimæ, hoc est, partes $\frac{1}{10000}$. Et si iterum operationem repetemus, inueniemus partes $\frac{1}{100000}$. quod quidem ad finem libelli de fabrica, & vsu instrumenti horologiorum demonstrauimus, eandemque demonstrationem breuiter capite insequenti Num. 14. repetemus, Exēpli causa. Si particula data cū tribus centesimis decies repetita percurrat partes 37. abiectis 30. continebuntur in data particula $\frac{7}{10}$. vnius centesimæ. Quare si ea particula data fuerit V. g. post vigesimam partem centesimam, continebit illud segmentum rectæ A F, $\frac{207}{1000}$. Nam $\frac{7}{10}$. vnius centesimæ faciunt $\frac{7}{1000}$. & 20. centesimæ, si singulæ in decem particulas cogitentur esse sectæ, efficiunt $\frac{200}{1000}$. quippe cum omnes centum partes æquiualeant 1000. particulis. Quod si idem fiat cum reliqua particula (si qua forte superfuerit post 37 partes percursas) vna cum tribus centesimis, & inciderimus verbi gratia in particulam 34. abiectis 30. continebit ea particula $\frac{4}{10}$. vnius millesimæ, hoc est, $\frac{4}{10000}$. Et quia $\frac{207}{1000}$. æquiualent $\frac{2070}{10000}$. si addātur $\frac{4}{10000}$. vltimo loco deprehensæ, habebimus $\frac{2074}{10000}$. Si denique cum reliqua particula (si qua forte remanserit) vna cum tribus centesimis idem fiat, percursæque verbi gratia sint 39. partes, abiectis 30. supererunt $\frac{9}{10}$. vnius partis $\frac{1}{10000}$. hoc est $\frac{9}{100000}$. Cum ergo $\frac{2074}{10000}$ efficiant $\frac{20740}{100000}$ si addantur $\frac{9}{100000}$. habebimus $\frac{20749}{100000}$. Atque adeo si recta AF, statuatur sinus totus partium 100000. erit segmentum 20. partium cum particula data, sinus partium 20749. Si particula data commode per circinum possit comprehendi, & decies repetatur, dabunt centesimæ partes percursæ partes decimas vnius centesimæ, &c. Si quoque nonnunquam nulla supersit particula, ita vt verbi gratia inuentæ sint præcisè $\frac{207}{2000}$ multiplicandus erit tam numerator, quam denominator per 100. vt habeatur sinus 20700. respectu sinus totius 100000. quemadmodum & 40. centesimæ constituunt sinū 40000. respectu sinu totius 100000. Si namque vterque numerus minutiæ $\frac{40}{100}$. ducatur in 1000. ni fiet minutia $\frac{40000}{100000}$.

Ex circulo qua ratione abscindatur arcus datorum grad. ac min.

14 HOC eodem instrumento, & in eadem facie partium æqualium, ex data qualibet circumferentia auferemus arcum quotuis graduum, & minutorum, hac arte. Sit ex quadrante, cuius semidiameter interuallo F G, æqualis sit, abscindendus verbi gratia arcus grad. 53. hoc est, chorda huius arcus inuenienda. Sumatur ex tabula sinuum sinus semissis propositi arcus, graduum

videlicet 16.min.45 qui sinus, abiectis quatuor figuris ad dexteram, est 450. respectu sinus totius 1000. Si ergo sinus hic respectu sinus totius AF, accipiatur in recta AF, vsque ad 45. per ea, quæ supra Num. 4. & 12. tradita sunt, dabit interuallum inter 45. & 45. sinum quoque eundem respectu sinus totius FG, quod interuallum duplicatum dabit chordam dupli arcus grad. 26. min. 45. id est, chordam arcus grad. 53. min. 30. qui quæritur. Si sinus totus statuatur 10000. erit sinus grad. 26. min 45. in tabula sinuum 4501. abiectis nimirum tribus figuris ad dexteram: qui in AF, capietur, vt Num. 6. & 12. dictum est.

QVOD si vtraque regula AF, AG, contineat 1000. partes, statui poterit sinus totus 100000. & etiam plurium partium, si nimirum adhibeatur recta MN, partium 101. diuisa in 100. particulas, vel alia recta partium 1001. in 1000. particulas secta.

Quot gradus, ac minuta in dato arcu contineantur, quo pacto cognoscatur.

15 E CONTRARIO facile etiam cognoscemus, quot gradus, & minuta in proposito arcu cuiusuis quadrantis contineantur. Sit enim in quadrante, cuius semidiameter FG, cui æqualis sit recta R S, datus aliquis arcus, cuius chordæ semissis sit RT. Huic RT, æqualis inueniatur recta 40. 40. inter rectas AF, AG, ita vt puncta 40. 40. vel abscindant æquales partes, vt in dato exemplo, vel æqualiter distent à duabus partibus æqualibus. Deinde per ea, quæ Num. 13. scripsimus, inquiratur, quot partes ex 1000, vel 10000. vel 100000. in segmento ab A, vsque ad punctum inuentum 40. comprehendantur. In dato exemplo reperiuntur partes 400. vel 4000. vel 40000. prout sinus totus constituitur 1000. vel 10000. vel 100000. atque tantus est sinus 40. 40. respectu senus totius FG, cui respondent Grad. 23. min. 35. Duplus ergo arcus gr. 47. min. 10. qui chordæ ipsius RT, duplæ debetur, erit is, qui quæritur.

Quo pacto aliter, ex circulo abscindantur arcus datorum gr. & min.

16 IN altera facie instrumenti, in quam chordæ arcuum quadrantis sunt translatæ, facilius arcum quotcunque graduum accipiemus, hoc modo. Chordæ quadrantis propositi sumatur æquale interuallum FG: Vel etiam semidiametro Quadrantis, chordæ nimirum grad. 60. capiatur interuallum 60. 60 æquale. Si igitur verbi gratia desideret quis arcum Grad. 56. sumendum erit per circinum interuallum inter puncta 56. & 56. Huic enim æqualis est chorda grad. 56. Si præter gradus accipienda sint etiam minuta, oportebit per æstimationem in sequenti particula accipere talem partem ipsius, qualem minuta proposita partem vnius gradus constituunt, Vt si cupiat quis min. 30. sumenda est semissis, si 20. tertia pars, &c. Interuallum enim inter partem regulæ A F, & partem regulæ A G, acceptum dabit chordam quæsiti arcus.

Quo pacto aliter cognoscatur, quot grad. & min. in dato arcu comprehendantur.

VICISSIM si cognoscere velimus, quot gradus, ac minuta in dato arcu existant, inuestiganda erit eius chorda inter rectas AF, AG, ita vt puncta eius cadant uel in duas partes easdem, vel æqualiter à duabus eisdem distent. Nam tot gradus continebuntur in dato arcu, quot gradus continentur in recta AF, à centro A, vsque ad punctum, e quo chorda dati arcus in rectam AG, translata est: ita vt si dati arcus chorda extiterit inter grad. 70. & 70. propositus arcus complectatur gr. 70. &c.

Qua ratione ex data recta pars imperata abscindatur

17 IAM vero nemo nescit, si ex linea aliqua abscindenda sit $\frac{1}{2}$. vel $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{17}$. vel denique quæcunque pars, cuius denominator maior non sit quam 100, quo pacto id fieri debeat. Si namque interuallum FG, in priori facie instrumenti æquale fuerit datæ rectæ, dabit interuallum inter 50. & 50. partem $\frac{1}{2}$. Interuallum autem inter 25. & 25. partem $\frac{1}{4}$. Interuallum

vero

vero inter 20.& 20.partem $\frac{1}{7}$. Item si interuallũ inter 90.& 90.vel inter 60. & 60. vel inter 30.& 30. fiat datæ rectæ æquale, dabit interuallum inter 30. & 30.vel inter 20.& 20.vel inter 10.& 10.partem $\frac{1}{7}$. Rursus si interuallum inter 17. & 17. vel inter 34. & 34. datæ rectæ sumatur æquale, dabit interuallum inter 1.& 1.vel inter 2.& 2. partem $\frac{1}{1}\frac{1}{7}$. At interuallum inter 5. & 5. vel inter 10.& 10.dabit $\frac{1}{1}\frac{5}{7}$. &c. Ex hisce porro exemplis adductis facile intelliges, quo modo te in alijs partibus imperatis gerere debeas.

18 NON aliter in posteriori facie instrumenti latera polygonorum in quouis circulo reperiemus. Nam gradus 120. (qui facile accipientur, si quadranti graduum 90. adijciantur gradus 30.) dabunt latus trianguli æquilateri. Gradus 90. latus quadrati. Gradus 72. latus pentagoni. Gradus 51$\frac{3}{7}$. hoc est, gradus 51.min. 26.paulo minus, latus heptagoni.&c.qui quidem gradus habebuntur, si gradus 360.totius circuli per numerum laterum polygoni propositi diuidantur. Qua ratione ex dato circulo latus polygoni propositi inueniatur.

19 QVANDO in dato quadrante cognoscere lubet, (quod non raro vsu venit) in quodnam punctum semidiametri perpendicularis ex quouis gradu ab altera semidiametro numerato demissa cadat, ita agendum erit. Sit verbi gratia semidiameter alicuius quadrantis F G, quærendumque sit punctum, in quod cadat perpendicularis ex grad. 26. min. 45. demissa. Sinus grad.26. min.45.est 45. posito sinu toto 100.Ergo & recta inter partes 45. & 45.erit sinus grad. 26. min.45. respectu sinus totius FG, vt Num. 12. ostensum est. Quocirca recta 45.45.in semidiametrum dati quadrantis ex centro translata indicabit punctum quæsitum. Quo pacto cognoscatur, in quod punctum semidiametri cadat perpendicularis ex quolibet gradu quadrantis demissa.

20 NON aliter reperiemus in diametro Astrolabij (quod notatu dignum est) punctum cuiuscunque declinationis. Posito enim sinu toto semidiametro Aequatoris, si declinatio est Borealis, transferenda est in diametrum ex centro Tangens semissis complementi declinationis: si vero australis est, Tangens semissis arcus ex quadrante, & declinatione compositi. Vt Tangens grad. 33. min 15.qui semissem complementi declinationis ♋. constituunt, dabit punctum extremum semidiametri paralleli ♋, quod videlicet ab Aequatore in Boream grad. 23.min.30. declinat. Tangens vero grad.56.min. 45.qui semissem constituunt arcus ex quadrante, & declinatione ♑, conflati, dabit extremum punctum semidiametri paralleli ♑, quod ab Aequatore in Austrum grad. 23. min.30. recedit. Ratio huiusce rei est, quod recta in Astrolabio ab extremitate diametri rectum Horizontem referentis vsque ad intersectionem paralleli borealis cũ altera diametro Meridianũ repræsentante ducta cõstituit cum altera diametro angulum semissis compleméti declinationis borealis; ad intersectionem vero paralleli australis cum eadem posteriore diametro educta efficit angulum semissis arcus ex quadrante, & declinatione australi conflati: atque vtriuslibet anguli Tangens semidiameter est paralleli, vt ex Astrolabio liquet. Quo pacto in diametro Astrolabij punctũ cuiusuis declinationis reperiatur.

EODEMQVE modo, si constiterit, quem angulum in extremitate semidiametri Aequatoris in Astrolabio recta ad quodcunque punctum diametri, quæ ad illam semidiametrum perpendicularis est, ducta constituat, reperiemus punctum illud per Tangentem illius anguli, sicut in parallelis ♋, & ♑. factum est.

21 SI etiam quæcunque linea ex centro instrumenti huius egrediens secetur quomodocunque, vt verbi gratia extrema, & media ratione, vel

Præceptum generale ad diuidendam lineam datam, vt alia quæcũque diuisa est.

(quod operæ pretium esset, vt expeditius horologia describantur) sicut æquinoctialis linea in horologio horizontali diuisa est: secabitur quæuis alia similiter, si nimirum ei æquale interuallum F G, sumatur, vt ex dictis liquido constat. Satis tamen est, si horæ ex vna parte lineæ meridianæ, nimirum vel horæ antemeridianæ, vel pomeridianæ duntaxat in instrumentum transferantur.

Qua ratione quantitas anguli quem latera instrumẽti continẽt cognoscatur.

22 PRAETEREA aperto instrumento quomodocunque, cognoscemus quantitatem anguli FAG, in centro A, constituti, hoc modo. Circino sumatur interuallum inter gradus 60. & 60. in posteriore instrumenti facie, transferaturque ex centro in alterutram lineam chordarum. Nam quot gradus in eo interuallo includuntur, tot gradus continebit angulus F A G. Ratio est, quòd arcus ex centro A, per gradus 60. & 60. descriptus portio est quadrantis, cuius chorda est tota linea AF: propterea quod chorda 60. graduum semidiameter est quadrantis dicti, cuius chorda est AF, vt ex instrumenti constructione manifestum est. Igitur interuallum inter gr. 60. & 60. est chorda anguli FAG, propositi, &c.

Quando sinus totus tã paruus est, vt in instrumentũ trãsferri nequeat, quid agendum.

23 SED neque hoc omittendum est, (quandoquidem de Tangentibus, sinubus, & secantibus in hoc instrumento respectu dati sinus totius accipiendis verba fecimus) sinum totum interdum esse tam exiguum, vt ex F, in G, transferri nequeat, etiamsi instrumentum prorsus claudatur. Vt ergo respectu illius sinus totius Tangens, sinus, ac secantes accipere possimus ex instrumento, sumendus est ille sinus totus in aliqua recta bis, ter, aut quater, &c. atque ita ex F, in G, transferendus. Nam si Tangentium quæsitarum, vel sinuum, aut secantium respectu sinus totius 100. capiantur semisses, vel tertiæ partes, aut quartæ, &c. prout videlicet sinus totus bis, ter, quaterue, &c. acceptus fuit, habebuntur Tangentes quæsitæ, vel sinus, aut secantes. Vt si sinus totus duplicetur, & posito sinu toto 100. Tanges verbi gratia, sit 378. sumenda est Tangens 189. &c. Sed commodissime res hæc peragetur, si sinus totus, qui perpusillus est, decupletur. Ita enim posito sinu toto 100. si ex Tangente verbi gratia proposita (relicta prima figura ad dexteram) abijciatur vna figura ad dexteram, quæ est secunda in tota Tangente, habebitur decima eius pars. Habenda tamen semper est ratio figuræ abiectæ, vt scilicet pro ea sumatur 1. si maior est quam 5. &c. Hac ratione Tangente 2414. grad. 67. min. 30. proposita (relictis $\frac{4}{1000}$.) transferenda erit Tangens 24. paulo amplius, nimirũ pars decima Tãgẽtis 241. respectu sinus totius 100.

Quando Tãgens superat sinum totum, quid agendũ, vt per vnicam translationem punctũ quæsitũ inueniatur.

24 SIC etiam, quando Tangens aliqua sinum totum superat, ne cogamur primum sinum totum aliquoties transferre, deinde vero reliquas partes, vel contra; sed vt statim punctum, quod quæritur, per vnam translationem possimus inuenire, diuidenda est tota Tangens tabulæ ad finem nouæ descriptionis Horologiorum positæ per 2. vel 3. vel per talem denique numerum, vt producatur in Quotiente Tangens trium figurarum. Tunc enim abiecta prima figura ad dexteram, reliqua Tangens transferenda est respectu sinus totius 100. multiplicati per eundem numerum, per quem Tangens diuisa fuit. Vt Tangens hor. 4. & 8. respectu sinus totius 1000. est 1732. quæ diuisa per 2. facit 866. Ergo transferenda est Tangens 86$\frac{1}{2}$. paulo amplius respectu sinus totius 100. duplicati. Item Tangens hor. 5. & 7. est 3732. quæ diuisa per quatuor facit 933. Ergo Tangens 93$\frac{3}{10}$. transferenda est respectu sinus totius 100. quadruplicati. Atque ita de cæteris.

25 IN hoc eodem denique instrumento facile duabus rectis tertiam proportionalem, & tribus quartam adiungemus. Nam si, duabus propositis, primæ in recta AF, regulę AB, æqualis capiatur: & secunda à fine huius, aperto instrumento, per circinum tansferatur in regulam AC, ad numerum similem illi, qui in extremo primæ in regula AB, appositus est, (ita vt pedes circini statuantur vel in similibus partibus vtriusque regulæ, vel in duobus punctis æqualiter distantibus à similibus partibus) eidemque secundæ in regula AB, æqualis sumatur, dabit interuallum inter finem huius secundæ, & numerum in regula AC, similem illi, qui prope finem secundæ scriptus est, tertiam proportionalem; vt ex demonstratis Num. 2. constare potest.

Quo pacto tertia, & quarta proportionalis reperiatur.

EADEM ratione, si, tribus rectis propositis, prima & secunda in instrumentum transferantur, vt dictum est, tertiæ autem in regula AB, æqualis quoque capiatur, dabit interuallum inter finem tertiæ, & numerum regulæ AC, similem illi, qui ad extremum tertiæ in regula AB, notatus est, quartam proportionalem.

QVOD si lineæ propositæ tam magnæ sint, vel aliqua illarum, vt in instrumentum transportari nequeant, sumendæ erunt omnium semisses, vel tertiæ partes, uel quartæ &c. atque cum illis procedendum, vt dictum est. Inuenta enim duplicata, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. offeret tertiam aut quartam proportionalem quæsitam.

26 LOCO prædicti instrumenti construi potest in lamina aliqua, vel plano quolibet, figura eundem vsum habens, facillima hac ratione. Fiat angulus BAC, cuiuscunque magnitudinis; quo autem maior fuerit, eo maiores sinus toti in figura assumi poterunt: ita vt non male feceris, si rectum constituas. Ita namque quadrantem quoque recto angulo oppositum obtinebis: Recta autem AB, in 100. particulas æquales secta, (posset etiam secari in 1000. si commode fieri posset, vt de superiore instrumento diximus) describantur ex centro A, per singulas partes 100. arcus circulorum, qui rectam quoque AC, in 100. particulas æquales distribuent: parataque erit figura.

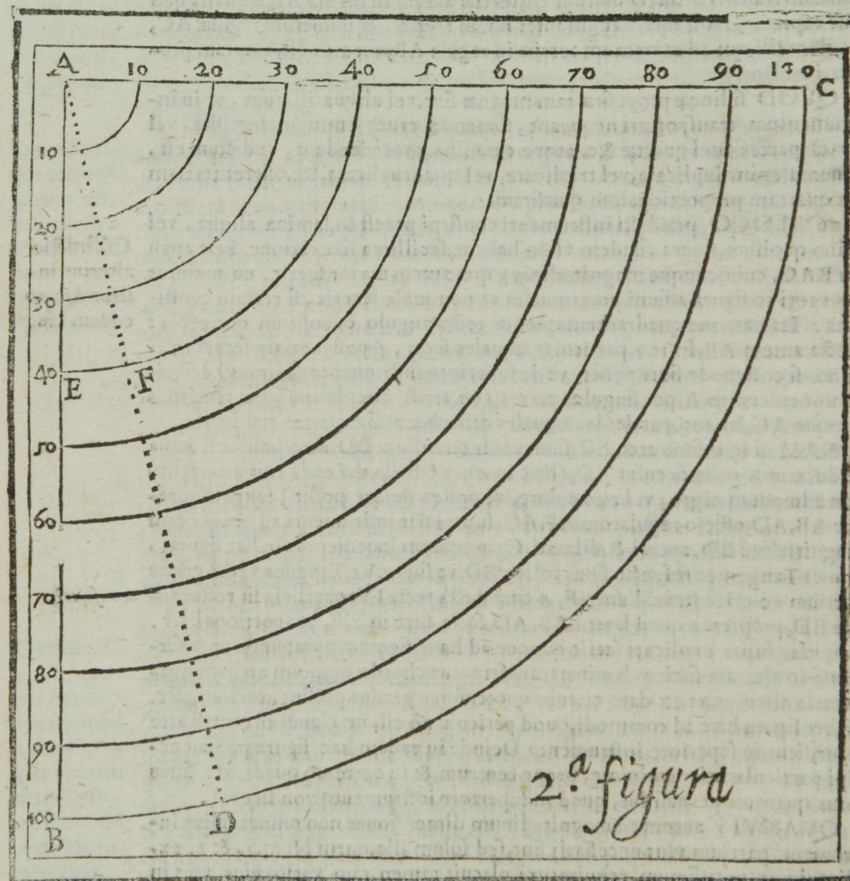
Cōstructio alterius instrumēti pro eodem vsu.

NAM si in infimo arcu BC, sumatur interuallum BD, dato sinui toti æquale, ducaturq. recta occulta AD, (hæc in ænea tabella ducenda erit atramento non admodum nigro, vel alio colore, vt postea deleri possit) fungentur rectæ AB, AD, officio regularum AF. AG, superioris instrumenti ad propositam magnitudinē BD, aperti, & dilatati. Quamobrem inuenientur in hac figura omnes Tangentes respectu sinus totius BD, vt supra. Vt Tangens verbi gratia partium 40. erit interuallum EF, *a* cum ducta recta EF, parallela sit rectæ ductæ BD, propterea quod latera AB, AD, secta sunt in E, F, proportionaliter. Alij vsus supra explicati facile quoque ad hanc figuram aptabuntur: præsertim si in alteram faciem laminæ transferantur chordæ omnium arcuum quadrantis alicuius, vt ex dato circulo quotcunque gradus possint abscindi, &c. Habet figura hæc id commodi, quod periculū nō est, ne clauus in centro atteratur, sicut in superiore instrumento. Deinde in eadem hac figura possunt accipi particulæ etiam minimę, prope centrum, & in extremo quadrante sinus totus quamuis perpusillus, quod in superiore instrumento non licebat.

a 2. sexti.

QVAMVIS autem ad magnitudinum dimensiones non omnes huius instrumenti partium vsus necessarij sint, sed solum ille, quem Num. 1. & 2. explicauimus, potissimum requiratur; placuit tamen tam varios eius vsus in vnum hunc locum congerere, tum vt instrumenti præstantia magis eluceat,

tum vt studiosus lector habeat, vbi alios vsus, quos desiderat, inquirere debeat. Non sum etiam nescius, quam plurimos alios præclari huius instrumenti vsus posse excogitari, quos proprio Marte, atque industria quiuis facile, quando id res postulauerit, cogitando inueniet: nos præcipuos solum indicare voluimus hoc loco.



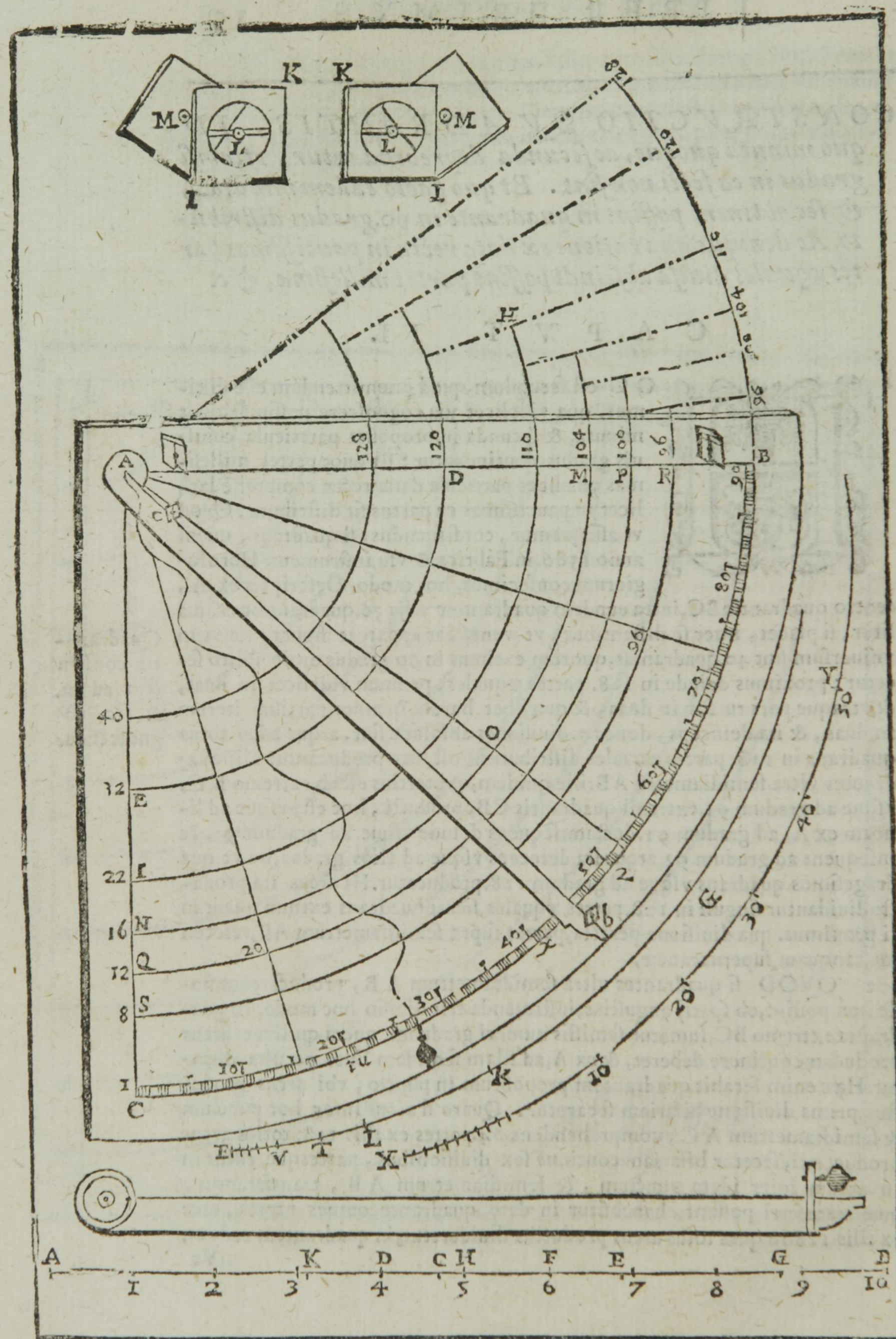
CONSTRVCTIO QVADRANTIS, IN quo minuta quoque, ac secunda deprehendantur, etiamsi gradus in ea secti non sint. Et quo pacto eadem minuta, & sec. obtineri possint in quadrante in 90. gradus distributo. Ac denique qua ratione ex data recta in paucissimas partes æquales diuisa abscindi possint partes millesimæ, &c.

CAPVT II.

1 OC est secundum, quod præmittendum esse diximus, qua videlicet via cognoscere possimus, quot minuta, & secunda in proposita particula cuiusuis gradus contineantur: Et quot partes millesimas quælibet particula datæ rectæ comprehẽdat, licet in paucissimas ea partes sit distributa. Quod vt assequamur, construendus est quadrans, quem anno 1586. in Fabrica, & vsu instrumenti Horologiorum confecimus, hoc modo. Descriptis ex A, centro quadrantis BC, intra eundem quadrantem alijs 36. quadrantibus æqualiter, si placet, inter se distantibus, vt venustior appareat figura: ita vt in vniuersum sint 40. quadrantes, quorum extimus in 90 gradus more solito secetur: proximus deinde in 128. partes æquales, primum videlicet in duas, & vtraque pars rursus in duas, & quælibet harum quatuor partium iterum in duas, & ita deinceps, donec 7. diuisiones absolutæ sint, atque adeo totus quadrans in 128. partes æquales distributus. Post hæc producantur alij quadrantes vltra semidiametrũ AB: ille quidem, qui tertius est ab extremo BC, vsque ad gradum 91. extremi quadrantis CB, producti, hoc est, vsque ad lineam ex A, ad gradum 91. ductam: sequens deinde vsque ad gradum 92. & insequens ad gradum 93. atque ita deinceps vsque ad alios gradus, ita vt quadragesimus quadrans vsque ad gradum 128. producatur. Hi arcus ita producti diuidantur singuli in 128. partes æquales, sicuti quadrans extimo quadranti proximus. qua diuisione peracta, partes supra semidiametrum AB, resecentur, tanquam superuacaneæ,

Quadrantis constructio ad m. & sec. cognoscenda.

2 QVOD si quadrantes vltra semidiametrum AB, produci commode non possint, ob spatij angustias, instituenda erit diuisio hoc modo. In quadrante extremo BC, sumatur semissis numeri graduum, quem quilibet arcus productus continere deberet, & ex A, ad illam semissem linea occulta ducatur. Hæc enim secabit quadrantem propositum in puncto, vbi arcus productus prima diuisione bifariam secaretur. Quare si arcus inter hoc punctum & semidiametrum AC, comprehendens 64. partes ex illis 128. totius arcus producendi, secetur bifariam continue sex diuisionibus, partesque illius in in arcum inter idem punctum, & semidiametrum AB, transferantur, quæ transferri possunt, habebũtur in dato quadrante omnes partes, quæ ex illis 128. in quas totus arcus productus diuideretur, in quadrantem cadunt.


K K
M
L
I
H
128
120
116
104
100
96
A
B
C
D
M
P
R
40
32 E
22 I
16 N
12 Q
8 S
1 C
O
G
Y
X
K
E V T L X
A K D C H F E G D
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Vt si diuidēdus sit quadrans MN, vsq. ad gr.104.producēdus, ducemus ad gr. 52.nimirum ad semisem grad.104.rectā,quæ secet Quadrantē MN, in O.Nā si arcus ON,continens partes 64. ex illis 128. totius arcus producti, secetur continue bifariā sex diuisionibus,partesq. eius in arcū OM,transferantur,habebuntur omnes partes in quadrantē MN,cadentes, non secus,ac si totus arcus productus in 128.partes distributus esset. Sic etiam, si quadrans ad gradum 125.producendus,diuidendus sit, ducenda erit linea occulta ad gradum $62\frac{1}{2}$. nimirum ad semissem graduum 125.Item si quadrans DE, 120.producendus, diuidendus sit, ducenda erit linea occulta ad gradum 60. &c.

Qui numeri quadrantibus ascribēdi sint.

3 HISCE quadrantibus ita diuisis duplices numeri ascribendi sunt, prope semidiametrū quidem AC,numeri quadrantum,vt 1. prope extremū; 2.iuxta sequentem; & 3. iuxta tertium, &c. Ita vides quadranti, qui vsque ad gradum 96.productus est, appositum esse numerum 8, cum is octauus sit. Primus enim est quadrans BC;secundus,qui sequitur, 90. graduum; Tertius graduum 91. quartus graduum 92. quintus graduum 93. Sextus graduum 94. Septimus graduum 95. & Octauus graduum 96.Sic etiam quadranti vsq. ad grad. 100.producto cernis ascriptum esse numerum 12.&c. At vero iuxta semidiametrū AB,numeri illorum graduum scribendi sunt, ad quos vsq. quilibet quadrans extenditur, vt in figura vides. Ita enim cadente filo perpendiculi in partem aliquam integram alicuius quadrantis,illico iuxta semidiametrum AB,apparebit, ad quē gradum vsque quadrans ille productus fuit. Qui quidem graduum numerus in regula trium tertium occupat locum,vt minuta, atque secunda inquirantur,vt paulo post Num. 7. dicemus.

Pinnacidia quo pacto affigenda.

4 IVXTA semidiametrum AB,affigenda sunt duo pinnacidia ad angulos rectos,ita vt foramina,per quæ radius solis,vel visualis transire debet,ad perpendiculum rectæ AB, existant;alioquin non paruus error in dimensione linearum committeretur.

Pinnacidia pro radio visuali quo pacto cōstruēda.

5 QVANDO porro per radium visualem altitudo stellæ inuestiganda est,vel punctum aliquod lineæ dimetiendæ inspiciendum,construi debent duo pinnacidia hoc modo. In tabella ænea quadrata I K, fiat foramen rotundum mediocris magnitudinis, in cuius medio relinquatur foramen L, quod sustineatur à diametro quadam tenui; Et circa I, circumuertatur alia tabella ænea quadrata subtilis,priori æqualis,in cuius medio sit etiam perexiguum foramen M, respondens foramini L, quando hæc tabella priori superimponitur.Huiusmodi duo pinnacidia si fiant, dici vix potest,quam expeditè quācunque stellam,aut aliam quamlibet rem contueri liceat.Nam pinnacidium, quod ab oculo propius abest, claudendum est tabella illa quadrata circumducta circa punctum I,aliud autem aperiendum.Sic enim fiet,vt radius visualis per foramen M,prope oculum immissus,illico conspiciat per maius foramen L,in pinnacidio remotiore stellā, vel aliam rem propositam: quia foramen illud maius apertum facile rem ipsam intueri,& sine vllo negotio foramen exiguum L,in eodem pinnacidio remotiore in ipsam rem visum dirigere nos sinit.

Constructio regulæ,loco fili.

6 POSTREMO ex centro A,egrediatur filum subtilissimum cum appenso perpendiculo. Aut certe loco fili construatur regula ænea admodum tenuis cum linea fiduciæ,in cuius extremitate promineat laminula,ex qua suspendatur perpendiculum hac conditione,vt regula libere pendente, filum aliquod cū perpendiculo demissum,ad vnguem lineæ fiduciæ respondeat. At-

que in hoc summa diligentia adhibenda est, alioquin gradus non recte à linea fiduciæ indicarentur.

Quadrans pendulus.

ATQVE hoc modo Quadrans in suo vsu erit pendulus, siue res in sublimi existens ex B, per A, siue res in plano posita ex A, per B, inspiciatur.

Quadrans stabilis.

QVOD si circa centrum A, regula affigatur cum linea fiduciæ AB, & duobus pinnacidijs c, b, quorum foramina lineæ fiduciæ respondeant, ipsaque regula ita firmetur, vt circa centrum circumducta ad quemcunque gradum immota permaneat, erit Quadrans in suo vsu stabilis eundem semper situm habens, siue res in sublimi existens inspiciatur ex A, per b, posito nimirum latere A C, Horizonti parallelo, in plano horizontali, siue rem in plano positam quis intueatur ex A, per b, latere AC, ad Horizontem existente perpendiculari, & latere AB, eidem Horizonti parallelo, superioremque locum occupante. Verum hæc planius intelligentur, cum de vtroque vsu lib. 2. agemus.

Vsus quadrantis proxime constructi in minutis exquirendis.

7 VSVS quadrantis hoc modo constructi in minutis, ac secundis exquirendis, præclarus est. Nam cadente filo perpendiculi, aut linea fiduciæ A B, in partem aliquam integram alicuius Quadrantis (quod fere semper accidet propter diuersitatem partium in tanta quadrantum multitudine) si fiat vt 128. nimirum vt numerus partium, in quas quilibet arcus productus diuiditur, ad partes à filo abscissas, ita numerus graduum in toto arcu producto comprehensorum, in cuius partem aliquam integram filum incidit, ad aliud, reperietur numerus graduũ in arcu abscisso contentorum. Et si quid in diuisione fuerit residui, illud per 60. multiplicatum, atque in eundem diuisorem, hoc est, in 128. diuisum, dabit minuta graduum. Et si adhuc quippiam remanserit in hac diuisione, illud eodem modo per 60. multiplicatum, & in eundem diuisorem 128, diuisum, exhibebit secunda. Atque hoc modo progrediendo, reperientur Tertia, Quarta, &c. donec nihil in diuisione superfit. Tunc enim vlterius progrediendum non est; Sed satis est, ad secunda vsque progredi. Exempli gratia, Ponatur ex Quadrante P Q, vsque ad gradum 100. producto, qualis est duodecimus, filum perpendiculi abscidisse partes 20. ex illis 128 in quas totus arcus productus distributus est. Fiat ergo, vt 128. ad 20. ita 100. ad aliud; inuenienturque gradus 15. supereruntque in diuisione 80. quæ ducta in 60. faciunt 4800. quæ diuisa per 128. dant minuta 37, & supersunt adhuc 64. quæ si ducantur in 60. & productus numerus 3840. diuidatur per 128. prodibunt Sec. 30, nihilque in diuisione superest. Arcus ergo Q 20, vel arcus Quadrantis BC, inter C. & filum perpendiculi includit gr. 15. Min. 37. Sec. 30. Rursus ponamus ex octauo quadrante RS, vsque ad gradum 96. producto filũ perpẽdiculi abscidisse partes 96. ex illis 128 quæ in toto arcu producto continẽtur. Fiat ergo, vt 128. ad 96. ita 96. ad aliud: reperienturque gradus 72. præcise arcui abscisso conuenire. Item ceciderit filum in partem 64. Quadrãtis sextidecimi M N, vsque ad gradum 104. producti. Si ergo fiat, vt 128. ad 64, ita 104. ad aliud, producentur quoque grad. 52. præcise, atque ita de cæteris; dummodo sis memor, vt si quid in diuisionibus super fuerit, residua diuisionum multiplicentur per 60. & producti numeri per 128. diuidantur, vt dictum est.

DEMONSTRATIO huius operationis perspicua est. Quoniam enim est, (in vltimo exemplo) vt arcus NM, vsque ad grad. 104. productus, quatenus in 128 partes sectus est, ad arcum NO, earundem partium 64. vt idem arcus NM, totus productus, quatenus grad. 104. complectitur, ad eundem ar-

cum NO, respectu eorundem graduum; efficitur, vt si fiat quemadmodum partes 128. totius arcus NM, vsque ad grad. 104. producti ad partes 64. in arcu NO, contentas, ita idem arcus NM, productus graduum 104. ad aliud, reperiantur gradus in eodem arcu NO, contenti, &c.

8 IN gratiam autem studiosorum placet hic tabellam inserere, in qua ex residuo primæ operationis regulæ aureæ, qua gradus eliciuntur, mox apparet, quot minuta, & secunda illi residuo respondeant: Ita vt opus sit semel tantum regulam auream adhibere. Construitur autem tabella, si singula residua, quæ plura, quam 127. esse nequeunt, per 60. multiplicentur, productique numeri per 128. diuidantur. Atque vt structura, & vsus huiusce tabellæ facilius intelligatur, apponemus vnum exemplum. Cadat verbi gratia filum perpendiculi in partem 29. Quadrantis 32. ad gradum vsque 120. producti. Fiat igitur vt 128. ad 29. ita 120. ad aliud; producenturque grad. 27. Quia vero in diuisione supersunt 24, sub quo numero in tabella ponuntur duo hi numeri 11 15. Prior ergo dat minuta, & posterior secunda; Ita vt arcus à filo abscissus complectatur grad. 27. Min. 11. Sec. 15. Atque hæc minuta, & Secunda producuntur, si residuum diuisionis, nimirum 24. ducatur in 60. & productus numerus per 128 diuidatur, &c. Eadem ratio est de reliquis tabellæ numeris. Nam semper superior numerus est ille, qui in diuisione remansit: Inferiorum autem numerorum prior ad minuta, & posterior ad secunda spectat.

Constructio & vsus tabellæ pro minutis & secundis.

SEQVITVR TABELLA.

TABELLA INDICANS, QVOT MINVta, ac Secunda reſiduo primæ operationis regulæ aureæ, qua gradus in ſupra nominatæ tabulæ conſtructione eruuntur, reſpondeant.

1 M. S. 0.28	2 M. S. 0.56	3 M. S. 1.24	4 M. S. 1.52	5 M. S. 2.21	6 M. S. 2.49	7 M. S. 3.17	8 M. S. 3.45	9 M. S. 4.13	10 M. S. 4.41	11 M. S. 5. 9	12 M. S. 5.37
13 M. S. 6. 6	14 M. S. 6.34	15 M. S. 7. 2	16 M. S. 7.30	17 M. S. 7.58	18 M. S. 8.26	19 M. S. 8.54	20 M. S. 9.22	21 M. S. 9.51	22 M. S. 10.19	23 M. S. 10.47	24 M. S, 11.15
25 M. S. 11.43	26 M. S. 12.11	27 M. S. 12.39	28 M. S. 13. 7	29 M. S. 13.36	30 M. S. 14. 4	31 M. S. 14.32	32 M. S. 15. 0	33 M. S. 15.28	34 M. S. 15.56	35 M. S. 16.24	36 M. S. 16.52
37 M. S. 17.21	38 M. S. 17.49	39 M. S. 18.17	40 M. S. 18.45	41 M. S. 19.13	42 M. S. 19.41	43 M. S. 20. 9	44 M. S. 20.37	45 M. S. 21. 6	46 M. S. 21.34	47 M. S. 22. 2	48 M. S. 22.30
49 M. S. 22.58	50 M. S. 23.26	51 M. S. 23.54	52 M. S. 24.22	53 M. S. 24.51	54 M. S. 25.19	55 M. S. 25.47	56 M. S. 26.15	57 M. S. 26.43	58 M. S. 27.11	59 M. S. 27.39	60 M. S. 28. 7
61 M. S. 28.36	62 M. S. 29. 4	63 M. S. 29.32	64 M. S. 30.. 0	65 M. S. 30.28	66 M. S. 30.56	67 M. S. 31.24	68 M. S. 31.52	69 M. S, 32.21	70 M. S. 32.49	71 M. S. 33.17	72 M. S. 33.45
73 M. S. 34.13	74 M. S. 34.41	75 M. S. 35. 9	76 M. S. 35.37	77 M. S. 36. 6	78 M. S. 36.34	79 M. S. 37. 2	80 M. S. 37.30	81 M. S. 37.58	82 M. S. 38.26	83 M. S. 38.54	84 M. S. 39.22
85 M. S. 39.51	86 M. S. 40.19	87 M. S. 40.47	88 M. S. 41.15	89 M. S. 41.43	90 M. S. 42.11	91 M. S. 42.39	92 M. S. 43. 7	93 M. S. 43.36	94 M. S. 44. 4	95 M. S. 44.32	96 M. S. 45. 0
97 M. S. 45.28	98 M. S. 45.56	99 M. S. 46.24	100 M. S. 46.52	101 M. S. 47.21	102 M. S. 47.49	103 M. S. 48.17	104 M. S. 48.45	105 M. S. 49.13	106 M. S. 49.41	107 M. S. 50. 9	108 M. S. 50.37
109 M. S. 51. 6	110 M. S. 51.34	111 M. S. 52. 2	112 M. S. 52.30	113 M. S. 52.58	114 M. S. 53.26	115 M. S. 53.54	116 M. S. 54.22	117 M. S, 54.5	118 M. S. 55.19	119 M. S. 55.47	120 M. S. 56.15
121 M. S. 56.43	122 M. S. 57.11	123 M. S. 57.39	124 M. S. 58. 7	125 M. S. 58.36	126 M. S. 59. 4	127 M. S. 59.32	128 M. S. 60. 0				

Constructio & vſus tabulæ ſequẽtis.

9 PORRO vt ſtudioſos omni labore ſupputandi leuaremus, compoſita à nobis eſt ſequens tabula, in qua confeſtim apparet, quot gradus, minuta, ac ſecunda cuilibet parti cuiuſuis Quadrãtis reſpondeant. Nam ſi in latere tabulæ ſiniſtro ſumatur numerus illius quadrantis, in cuius partem aliquam integram filum perpendiculi cecidit, numerus, inquam, iuxta ſemidiametrũ AC, illi quadranti appoſitus, in vertice vero eiuſdẽ tabulæ accipiatur numerus partiũ à filo abſciſſarũ, reperientur in angulo cõmuni gr. Min. & Sec. arcus abſciſſi. Exemplum. Ceciderit filum in partem 30. Quadrantis 16. qui vſque ad grad. 104. productus fuit. Si ergo in vertice tabulæ ſumatur numerus 30. partium, & in ſiniſtro latere numerus quadrantis 16. deprehendentur in communi angulo grad. 24. Min. 22. Sec. 30. Item cadente filo in partem 111. Quadrantis 15. qui vſque ad grad. 103. fuit productus; ſi in vertice tabulæ accipiatur numerus 111. partium, & in latere ſiniſtro numerus Quadrantis 15. reperientur in angulo communi gradus 89. min. 19. ſec. 13. Atque ita de cæteris. Conſtructio tabulæ ex dictis obſcura non eſt. Nam ſi fiat, vt 128, ad 1. ad 2. ad 3. ad 4. & ita deinceps, vſque ad 128. ita numerus graduum cuiuslibet arcus totius producti ad aliud, reperientur gradus. Minuta & Sec. pro partibus cuiuſque Quadrantis. Continentur autem in tabula tantummodo 40. Quadrantes, quod hi ſatis eſſe videantur: Si quis tamen plures deſcribere velit, facile tabulam extendere poterit ſecundum doctrinam traditam hoc loco ad quotuis Quadrantes. In eadem tabula quando in tertia operatione regulæ aureæ, qua ſecunda inquiruntur, numerus reliquus fuit maior quam 64. maior nimirum dimidio Diuiſoris 128. aſſumpſimus vnum ſecundum integrum.

Quo pacto tabula 40. Quadrantũ extendatur ad plures Quadrantes ſine ope aureæ regulæ.

IAM vero ſi quis tabulam extendere velit ad plures Quadrantes, facere id poterit ſine vlla operatione regulæ aureæ, hoc modo. Gradibus, Minutis ac ſecundis quadrageſimi Quadrantis, qui vſque ad grad. 128. productus fuit, adijciantur differentiæ inter gradus, minuta, ac ſecunda quadrageſimi Quadrantis, & gradus, Minuta, ac ſecunda aliorum quadrantum infra Quadrageſimum. Ita namque conficientur gradus, minuta, ac ſecunda quadrantum ſupra quadrageſimum. Nam gradus, minuta, ac ſecunda trium quorumlibet quadrantum, quorum vnus ſit quadrageſimus, alij vero duo æqualiter ab eo diſtent, obſeruant proportionem Arithmeticam continuam, vt hic apparet,

Partes.	1			2			3			4			5			6		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
38	0	59	4	1	58	7	2	57	11	3	56	15	4	55	19	5	54	22
39	0	59	32	1	59	4	2	58	36	3	58	7	4	57	39	5	57	11
40	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0
41	1	0	28	2	0	56	3	1	24	4	1	53	5	2	21	6	2	49
42	1	0	56	2	1	53	3	2	49	4	3	45	5	4	41	6	5	38

Numeri enim Quadrantum 39. 40. 41. in prima columna ſuperant ſe continue ſecundis 28. In ſecunda vero columna ſecundis 56. & in tertia Minuto 1. Secundis 24. &c. Ita quoque numeri Quadrantum 38. 40. 42. in prima

columna ſuperant ſe continue ſecundis 56. In ſecunda vero Minuto 1. ſecundis 53. & in tertia Minutis 2. ſecundis 49. &c. Quare ſi differentiæ inter gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 39. & Quadrantis 40. adijciantur ordine ad gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 40. componentur gradus, Minuta, ac ſecunda Quadrantis 41. Differentiæ autem inter gradus, Minuta ac Sec. Quadrantis 38. & Quadrantis 40. additæ ordinatim gradibus, Minutis, ac ſecundis Quadrantis 40. conficient gradus Minuta, ac Secunda Quadrantis 42. Sic quoque differentiæ inter gradus, Minuta, ac Secunda Quadrantis 30. & Quadrantis 40. appoſitæ gradibus, Minutis, & ſecundis Quadrantis 40. component gradus, minuta, & ſecunda Quadrantis 50. &c.

SEQVITVR TABVLA QVADRANTIS paulo ante conſtructi, vbi ſinguli arcus producti diſtribuuntur in 128. partes æquales: in qua ſtatim apparet, quot Gradus, Minuta, ac Secunda ſingulis particulis cuiuſuis quadrantis reſpondeant: cuius quidem vſum ſupra expoſuimus.

Numerus hic ordo Quadrantum.

Partes	1			2			3			4			5			6			7		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0	7	0	0
2	0	42	11	1	24	22	2	6	34	2	48	45	3	30	56	4	13	7	4	55	19
3	0	42	39	1	25	19	2	7	58	2	50	37	3	33	17	4	15	56	4	58	36
4	0	43	7	1	26	15	2	9	22	2	52	30	3	35	37	4	18	45	5	1	52
5	0	43	36	1	27	11	2	10	47	2	54	22	3	37	58	4	21	34	5	5	9
6	0	44	4	1	28	7	2	12	11	2	56	15	3	40	19	4	24	22	5	8	26
7	0	44	32	1	29	4	2	13	36	2	58	7	3	42	39	4	27	11	5	11	43
8	0	45	0	1	30	0	2	15	0	3	0	0	3	45	0	4	30	0	5	15	0
9	0	45	28	1	30	56	2	16	24	3	1	53	3	47	21	4	32	49	5	18	17
10	0	45	56	1	31	52	2	17	49	3	3	45	3	49	41	4	35	37	5	21	34
11	0	46	24	1	32	49	2	19	13	3	5	37	3	52	2	4	38	26	5	24	51
12	0	46	52	1	33	45	2	20	37	3	7	30	3	54	22	4	41	15	5	28	7
13	0	47	21	1	34	41	2	22	2	3	9	22	3	56	43	4	44	4	5	31	24
14	0	47	49	1	35	37	2	23	26	3	11	15	3	59	4	4	46	52	5	34	41
15	0	48	17	1	36	34	2	24	51	3	13	7	4	1	24	4	49	41	5	37	58
16	0	48	45	1	37	30	2	26	15	3	15	0	4	3	45	4	52	30	5	41	15
17	0	49	13	1	38	26	2	27	39	3	16	52	4	6	6	4	55	19	5	44	32
18	0	49	41	1	39	22	2	29	4	3	18	45	4	8	26	4	58	7	5	47	49
19	0	50	9	1	40	19	2	30	28	3	20	37	4	10	47	5	0	56	5	51	6
20	0	50	37	1	41	15	2	31	52	3	22	30	4	13	7	5	3	45	5	54	22
21	0	51	6	1	42	11	2	33	17	3	24	22	4	15	28	5	6	34	5	57	39
22	0	51	34	1	43	7	2	34	41	3	26	15	4	17	49	5	9	22	6	0	56
23	0	52	2	1	44	4	2	36	6	3	28	7	4	20	9	5	11	11	6	4	13
24	0	52	30	1	45	0	2	37	30	3	30	0	4	22	30	5	15	0	6	7	30
25	0	52	58	1	45	56	2	38	54	3	31	52	4	24	51	5	17	49	6	10	47
26	0	53	26	1	46	52	2	40	19	3	33	45	4	27	11	5	20	37	6	14	4
27	0	53	54	1	47	49	2	41	43	3	35	37	4	29	32	5	23	26	6	17	21
28	0	54	22	1	48	45	2	43	7	3	37	30	4	31	52	5	26	15	6	20	37
29	0	54	51	1	49	41	2	44	32	3	39	22	4	34	13	5	29	4	6	23	54
30	0	55	19	1	50	37	2	45	56	3	41	15	4	36	34	5	31	52	6	27	11
31	0	55	47	1	51	34	2	47	21	3	43	7	4	38	54	5	34	41	6	30	28
32	0	56	15	1	52	30	2	48	45	3	45	0	4	41	15	5	37	30	6	33	45
33	0	56	43	1	53	26	2	50	9	3	46	52	4	43	36	5	40	19	6	37	2
34	0	57	11	1	54	22	2	51	34	3	48	45	4	45	56	5	43	7	6	40	19
35	0	57	39	1	55	19	2	52	58	3	50	37	4	48	17	5	45	56	6	43	36
36	0	58	7	1	56	15	2	54	22	3	52	30	4	50	37	5	48	45	6	46	52
37	0	58	36	1	57	11	2	55	47	3	54	22	4	52	58	5	51	34	6	50	9
48	0	59	4	1	58	7	2	57	11	3	56	15	4	55	19	5	54	22	6	53	26
39	0	59	32	1	59	4	2	58	36	3	58	7	4	57	39	5	57	11	6	56	43
40	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0	7	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes.	8			9			10			11			12			13			14		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	8	0	0	9	0	0	10	0	0	11	0	0	12	0	0	13	0	0	14	0	0
2	5	37	30	6	19	41	7	1	52	7	44	4	8	26	15	9	8	26	9	50	37
3	5	41	15	6	23	54	7	6	34	7	49	13	8	31	52	9	14	32	9	57	11
4	5	45	0	6	28	7	7	11	15	7	54	22	8	37	30	9	20	37	10	3	45
5	5	48	45	6	32	21	7	15	56	7	59	32	8	43	7	9	26	43	10	10	19
6	5	52	30	6	36	34	7	20	37	8	4	41	8	48	45	9	32	49	10	16	52
7	5	56	15	6	40	47	7	25	19	8	9	51	8	54	22	9	38	54	10	23	26
8	6	0	0	6	45	0	7	30	0	8	15	0	9	0	0	9	45	0	10	30	0
9	6	3	45	6	49	13	7	34	41	8	20	9	9	5	37	9	51	6	10	36	34
10	6	7	30	6	53	26	7	39	22	8	25	19	9	11	15	9	57	11	10	43	7
11	6	11	15	6	57	39	7	44	4	8	30	28	9	16	52	10	3	17	10	49	41
12	6	15	0	7	1	52	7	48	45	8	35	37	9	22	30	10	9	22	10	56	15
13	6	18	45	7	6	6	7	53	26	8	40	47	9	28	7	10	15	28	11	2	49
14	6	22	30	7	10	19	7	58	7	8	45	57	9	33	45	10	21	34	11	9	22
15	6	26	15	7	14	32	8	2	49	8	51	6	9	39	22	10	27	39	11	15	56
16	6	30	0	7	18	45	8	7	30	8	56	15	9	45	0	10	33	45	11	22	30
17	6	33	45	7	22	58	8	12	11	9	1	24	9	50	37	10	39	51	11	29	4
18	6	37	30	7	27	11	8	16	52	9	6	34	9	56	15	10	45	56	11	35	37
19	6	41	15	7	31	24	8	21	34	9	11	43	10	1	52	10	52	2	11	42	11
20	6	45	0	7	35	37	8	26	15	9	16	52	10	7	30	10	58	7	11	48	45
21	6	48	45	7	39	51	8	30	56	9	22	2	10	13	7	11	4	13	11	55	19
22	6	52	30	7	44	4	8	35	37	9	27	11	10	18	45	11	10	19	12	1	52
23	6	56	15	7	48	17	8	40	19	9	32	21	10	24	22	11	16	24	12	8	26
24	7	0	0	7	52	30	8	45	0	9	37	30	10	30	0	11	22	30	12	15	0
25	7	3	45	7	56	43	8	49	41	9	42	39	10	35	37	11	28	36	12	21	34
26	7	7	30	8	0	56	8	54	22	9	47	49	10	41	15	11	34	41	12	28	7
27	7	11	15	8	5	9	8	59	4	9	52	58	10	46	52	11	40	47	12	34	41
28	7	15	0	8	9	22	9	3	45	9	58	7	10	52	30	11	46	52	12	41	15
29	7	18	45	8	13	36	9	8	26	10	3	17	10	58	7	11	52	58	12	47	49
30	7	22	30	8	17	49	9	13	7	10	8	26	11	3	45	11	59	4	12	54	22
31	7	26	15	8	22	2	9	17	49	10	13	36	11	9	22	12	5	9	13	0	56
32	7	30	0	8	26	15	9	22	30	10	18	45	11	15	0	12	11	15	13	7	30
33	7	33	45	8	30	28	9	27	11	10	23	54	11	20	37	12	17	21	13	14	4
34	7	37	30	8	34	41	9	31	52	10	29	4	11	26	15	12	23	26	13	20	37
35	7	41	15	8	38	54	9	36	34	10	34	13	11	31	52	12	29	32	13	27	11
36	7	45	0	8	43	7	9	41	15	10	39	22	11	37	30	12	35	37	13	33	45
37	7	48	45	8	47	21	9	45	56	10	44	32	11	43	7	12	41	43	13	40	19
38	7	52	30	8	51	34	9	50	37	10	49	41	11	48	45	12	47	49	13	46	52
39	7	56	15	8	55	47	9	55	19	10	54	51	11	54	22	12	53	59	13	53	26
40	8	0	0	9	0	0	10	0	0	11	0	0	12	0	0	13	0	0	14	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes.	15			16			17			18			19			20			21		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	15	0	0	16	0	0	17	0	0	13	0	0	19	0	0	20	0	0	21	0	0
2	10	32	49	11	15	0	11	57	11	12	39	22	13	21	34	14	3	45	14	45	56
3	10	39	51	11	22	30	12	5	9	12	47	49	13	30	28	14	13	7	14	55	47
4	10	46	52	11	30	0	12	13	7	12	56	15	13	39	22	14	22	30	15	5	37
5	10	53	54	11	37	30	12	21	6	13	4	41	13	48	17	14	31	52	15	15	28
6	11	0	56	11	45	0	12	29	4	13	13	7	13	57	11	14	41	15	15	25	19
7	11	7	58	11	52	30	12	37	2	13	21	34	14	6	6	14	50	37	15	35	9
8	11	15	0	12	0	0	12	45	0	13	30	0	14	15	0	15	0	0	15	45	0
9	11	22	2	12	7	30	12	52	58	13	38	26	14	23	54	15	9	22	15	54	51
10	11	29	4	12	15	0	13	0	56	13	46	52	14	32	49	15	18	45	16	4	41
11	11	36	6	12	22	30	13	8	54	13	55	19	14	41	43	15	28	7	16	14	32
12	11	43	7	12	30	0	13	16	52	14	3	45	14	50	37	15	37	30	16	24	22
13	11	50	9	12	37	30	13	24	51	14	12	11	14	59	32	15	46	52	16	34	13
14	11	57	11	12	45	0	13	32	49	14	20	37	15	8	27	15	56	15	16	44	4
15	12	4	13	12	52	30	13	40	47	14	29	4	15	17	21	16	5	37	16	53	54
16	12	11	15	13	0	0	13	48	45	14	37	30	15	26	15	16	15	0	17	3	45
17	12	18	17	13	7	30	13	56	43	14	45	56	15	35	9	16	24	22	17	13	36
18	12	25	19	13	15	0	14	4	41	14	54	22	15	44	4	16	33	45	17	23	26
19	12	32	21	13	22	30	14	12	39	15	2	49	15	52	58	16	43	7	17	33	17
20	12	39	22	13	30	0	14	20	37	15	11	15	16	1	52	16	52	30	17	43	7
21	12	46	24	13	37	30	14	28	36	15	19	41	16	10	47	17	1	52	17	52	58
22	12	53	26	13	45	0	14	36	34	15	28	7	16	19	41	17	11	15	18	2	49
23	13	0	28	13	52	30	14	44	33	15	36	34	16	28	36	17	20	37	18	12	39
24	13	7	30	14	0	0	14	52	30	15	45	0	16	37	30	17	30	0	18	22	30
25	13	14	32	14	7	30	15	0	28	15	53	26	16	46	24	17	39	22	18	32	21
26	13	21	34	14	15	0	15	8	26	16	1	52	16	55	19	17	48	45	18	42	11
27	13	28	36	14	22	30	15	16	24	16	10	19	17	4	13	17	58	7	18	52	2
28	13	35	37	14	30	0	15	24	22	16	18	45	17	13	7	18	7	30	19	1	52
29	13	42	39	14	37	30	15	32	21	16	27	11	17	22	2	18	16	52	19	11	43
30	13	49	41	14	45	0	15	40	19	16	35	37	17	30	56	18	26	15	19	21	34
31	13	56	43	14	52	30	15	48	17	16	44	4	17	39	51	18	35	37	19	31	24
32	14	3	45	15	0	0	15	56	15	16	52	30	17	48	45	18	45	0	19	41	15
33	14	10	47	15	7	30	16	4	13	17	0	56	17	57	39	18	54	22	19	51	6
34	14	17	49	15	15	0	16	12	11	17	9	22	18	6	34	19	3	45	20	0	56
35	14	24	51	15	22	30	19	20	9	17	17	49	18	15	28	19	13	7	20	10	47
36	14	31	52	15	30	0	16	28	7	17	26	15	18	24	22	19	22	30	20	20	37
37	14	38	54	15	37	30	16	36	6	17	34	41	18	33	17	19	31	52	20	30	28
38	14	45	56	15	45	0	16	44	0	17	43	7	18	42	11	19	41	15	20	40	19
39	14	52	58	15	52	32	16	52	2	17	51	34	18	51	6	19	50	37	20	50	9
40	15	0	0	16	0	0	17	0	0	18	0	0	19	0	0	20	0	0	21	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes.	22			23			24			25			26			27			28		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	22	0	0	23	0	0	24	0	0	25	0	0	26	0	0	27	0	0	28	0	0
2	15	28	7	16	10	19	16	52	30	17	34	41	18	16	52	18	59	4	19	41	15
3	15	38	26	16	21	6	17	3	45	17	46	24	18	29	4	19	11	43	19	54	22
4	15	48	45	16	31	52	17	15	0	17	58	7	18	41	15	19	24	22	20	7	30
5	15	59	4	16	42	39	17	26	15	18	9	51	18	53	26	19	37	2	20	20	37
6	16	9	22	16	53	26	17	37	30	18	21	34	19	5	37	19	49	41	20	33	45
7	16	19	41	17	4	13	17	48	45	18	33	17	19	17	49	20	2	21	20	46	52
8	16	30	0	17	15	0	18	0	0	18	45	0	19	30	0	20	15	0	21	0	0
9	16	40	19	17	25	47	18	11	15	18	56	43	19	42	11	20	27	39	21	13	7
10	16	50	37	17	36	34	18	22	30	19	8	26	19	54	22	20	40	19	21	26	15
11	17	0	56	17	47	21	18	33	45	19	20	9	20	6	34	20	52	58	21	39	22
12	17	11	15	17	58	7	18	45	0	19	31	52	20	18	45	21	5	37	21	52	30
13	17	21	34	18	8	54	18	56	15	19	43	36	20	30	56	21	18	17	22	5	37
14	17	31	52	18	19	41	19	7	30	19	55	19	20	43	7	21	30	56	22	18	45
15	17	42	11	18	30	28	19	18	45	20	7	2	20	55	19	21	43	36	22	31	52
16	17	52	30	18	41	15	19	30	0	20	18	45	21	7	30	21	56	15	22	45	0
17	18	2	49	18	52	2	19	41	15	20	30	28	21	19	41	22	8	54	22	58	7
18	18	13	7	19	2	49	19	52	30	20	42	11	21	31	52	22	21	34	23	11	15
19	18	23	26	19	13	36	20	3	45	20	53	54	21	44	4	22	34	13	23	24	22
20	18	33	45	19	24	22	20	15	0	21	5	37	21	56	15	22	46	52	23	37	30
21	18	44	4	19	35	9	20	26	15	21	17	21	22	8	26	22	59	32	23	50	37
22	18	54	22	19	45	56	20	37	30	21	29	4	22	20	37	23	12	11	24	3	45
23	19	4	41	19	56	43	20	48	45	21	40	47	22	32	49	23	24	51	24	16	52
24	19	15	0	20	7	30	21	0	0	21	52	30	22	45	0	23	37	30	24	30	0
25	19	25	19	20	18	17	21	11	15	22	4	13	22	57	11	23	50	9	24	43	7
26	19	35	37	20	29	4	21	22	30	22	15	56	23	9	22	24	2	49	24	56	15
27	19	45	56	20	39	51	21	33	45	22	27	39	23	21	34	24	15	28	25	9	22
28	19	56	15	20	50	37	21	45	0	22	39	22	23	33	45	24	28	7	25	22	30
29	20	6	34	21	1	24	21	56	15	22	51	6	23	45	56	24	40	47	25	35	37
30	20	16	52	21	12	11	22	7	30	23	2	49	23	58	7	24	53	26	25	48	45
31	20	27	11	21	22	58	22	18	45	23	14	32	24	10	19	25	6	6	26	1	52
32	20	37	30	21	33	45	22	30	0	23	26	15	24	22	30	25	18	45	26	15	0
33	20	47	49	21	44	32	22	41	15	23	37	58	24	34	41	25	31	24	26	28	7
34	20	58	7	21	55	19	22	52	30	23	49	41	24	46	52	25	44	4	26	41	15
35	21	8	26	22	6	6	23	3	45	24	1	24	24	59	4	25	56	43	26	54	22
36	21	18	45	22	16	52	23	15	0	24	13	7	25	11	15	26	9	22	27	7	30
37	21	29	4	22	27	39	23	26	15	24	24	51	25	23	26	26	22	2	27	20	37
38	21	39	22	22	38	26	23	37	30	24	36	34	25	35	37	26	34	41	27	33	45
39	21	49	41	22	49	13	23	48	45	24	48	17	25	47	49	26	47	21	27	46	52
40	22	0	0	23	0	0	24	0	0	25	0	0	26	0	0	27	0	0	28	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes	29			30			31			32			33			34			35		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	29	0	0	30	0	0	31	0	0	32	0	0	33	0	0	34	0	0	35	0	0
2	20	23	26	21	5	37	21	47	49	22	30	0	23	12	11	23	54	22	24	36	34
3	20	37	2	21	19	41	22	2	21	22	45	0	23	27	39	24	10	19	24	52	58
4	20	50	37	21	33	45	22	16	52	23	0	0	23	43	7	24	26	15	25	9	22
5	21	4	13	21	47	49	22	31	24	23	15	0	23	58	36	24	42	11	25	25	47
6	21	17	49	22	1	52	22	45	56	23	30	0	24	14	4	24	58	7	25	42	11
7	21	31	24	22	15	56	23	0	28	23	45	0	24	29	32	25	14	4	25	58	36
8	21	45	0	22	30	0	23	15	0	24	0	0	24	45	0	25	30	0	26	15	0
9	21	58	36	22	44	4	23	29	32	24	15	0	25	0	28	25	45	56	26	31	24
10	22	12	11	22	58	7	23	44	4	24	30	0	25	15	56	26	1	52	26	47	49
11	22	25	47	23	12	11	23	58	36	24	45	0	25	31	24	26	17	49	27	4	13
12	22	33	22	23	26	15	24	13	7	25	0	0	25	46	52	26	33	45	27	20	37
13	22	52	58	23	40	19	24	27	39	25	15	0	26	2	21	26	49	41	27	37	2
14	23	6	34	23	54	22	24	42	11	25	30	0	26	17	49	27	5	37	27	53	26
15	23	20	9	24	8	26	24	56	43	25	45	0	26	33	17	27	21	34	28	9	51
16	23	33	45	24	32	30	25	11	50	26	0	0	26	48	45	27	37	30	28	26	15
17	23	47	21	24	36	34	25	25	47	26	15	0	27	4	13	27	53	26	28	42	39
18	24	0	56	24	50	37	25	40	19	26	30	0	27	19	41	28	9	22	28	59	4
19	24	14	32	25	4	41	25	54	51	26	45	0	27	35	9	28	25	19	29	16	24
20	24	28	7	25	18	45	26	9	22	27	0	0	27	50	37	28	41	15	29	31	52
21	24	41	43	25	32	49	26	23	54	27	15	0	28	6	6	28	57	11	29	48	17
22	24	55	19	25	46	52	26	38	26	27	30	0	28	21	34	29	13	7	29	4	41
23	25	8	54	26	0	50	26	52	58	27	45	0	28	37	2	29	29	4	30	21	6
24	25	22	30	26	15	0	27	7	30	28	0	0	28	52	30	29	45	0	30	37	30
25	25	36	6	26	29	4	27	22	2	28	15	0	29	7	58	30	0	56	30	53	54
26	25	49	41	26	43	7	27	36	34	28	30	0	29	23	26	30	16	52	30	10	19
27	26	3	17	26	57	21	27	51	6	28	45	0	29	38	54	30	32	49	31	26	43
28	26	16	52	27	11	15	28	5	37	29	0	0	29	54	22	30	48	45	31	43	7
29	26	30	28	27	25	19	28	20	9	29	15	0	30	9	51	31	4	41	31	59	32
30	26	44	4	27	39	22	28	34	41	29	30	0	30	25	19	31	20	37	32	15	56
31	26	57	39	27	53	26	28	49	13	29	45	0	30	40	47	31	36	34	32	32	21
32	27	11	15	28	7	30	29	3	45	30	0	0	30	56	15	31	52	30	32	48	45
33	27	24	51	28	21	34	29	18	17	30	15	0	31	11	43	32	8	26	32	5	9
34	27	38	26	28	35	37	29	32	49	30	30	0	31	27	11	32	24	22	33	21	34
35	27	52	2	28	49	41	29	47	21	30	45	0	31	42	39	32	40	16	33	37	58
36	28	5	37	29	3	45	30	1	52	31	0	0	31	58	7	32	56	15	33	54	22
37	28	19	13	29	17	49	30	16	24	31	15	0	32	13	36	33	12	11	34	10	47
38	28	32	49	29	31	52	30	30	56	31	30	0	32	29	4	33	28	7	34	27	11
39	28	46	24	29	45	56	30	45	28	31	45	0	32	44	32	33	44	4	34	43	36
40	29	0	0	30	0	0	31	0	0	32	0	0	33	0	0	34	0	0	35	0	0

Partes	36			37			38			39			40			41			42		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	36	0	0	37	0	0	38	0	0	39	0	0	40	0	0	41	0	0	42	0	0
2	25	18	45	26	0	56	26	43	7	27	25	19	28	7	30	28	49	41	29	31	52
3	25	35	37	26	18	17	27	0	56	27	43	36	28	26	15	29	8	54	29	51	34
4	25	52	30	26	35	37	27	18	45	28	1	52	28	45	0	29	28	7	30	11	15
5	26	9	22	26	52	58	27	36	34	28	20	9	29	3	45	29	47	21	30	30	56
6	26	26	15	27	10	19	27	54	22	28	38	26	29	22	30	30	6	34	30	50	37
7	26	43	7	27	27	39	28	12	11	28	56	43	29	41	15	30	25	47	31	10	19
8	27	0	0	27	45	0	28	30	0	29	15	0	30	0	0	30	45	0	31	30	0
9	27	16	52	28	2	21	28	47	49	29	33	17	30	18	45	31	4	13	31	49	41
10	27	33	45	28	19	41	29	5	37	29	51	34	30	37	30	31	23	26	32	9	22
11	27	50	37	28	37	2	29	23	26	30	9	51	30	56	15	31	42	39	32	29	4
12	28	7	30	28	54	22	29	41	15	30	28	7	31	15	0	32	1	52	32	48	45
13	28	24	22	29	11	43	29	54	4	30	46	24	31	33	45	32	21	6	33	8	26
14	28	41	15	29	29	4	30	16	52	31	4	41	31	52	30	32	40	19	33	28	7
15	28	58	7	29	46	24	30	34	41	31	22	58	32	11	15	32	59	32	33	47	49
16	29	15	0	30	3	45	30	32	30	31	41	15	32	30	0	33	18	45	34	7	30
17	29	31	52	30	21	9	31	10	19	31	59	32	32	48	45	33	37	58	34	27	11
18	29	48	45	30	38	26	31	28	7	32	17	49	33	7	30	33	57	11	34	46	52
19	30	5	37	30	55	47	31	45	56	32	36	6	33	26	15	34	16	24	35	6	34
20	30	22	30	31	13	7	32	3	45	32	54	22	33	45	0	34	35	37	35	26	15
21	30	39	22	31	30	28	32	21	34	33	12	39	34	3	45	34	54	51	35	45	56
22	30	56	15	31	47	49	32	39	22	33	30	56	34	22	30	35	14	4	36	5	37
23	31	13	7	32	5	9	32	57	11	33	49	13	34	41	15	35	33	17	36	25	19
24	31	30	0	32	22	30	33	15	0	34	7	30	35	0	0	35	52	30	36	45	0
25	31	46	52	32	39	51	33	32	49	34	25	47	35	18	45	36	11	43	37	4	41
26	32	3	45	32	57	11	33	50	37	34	44	4	35	37	30	36	30	56	37	24	22
27	32	20	37	33	14	32	34	8	26	35	2	21	35	56	15	36	50	9	37	44	4
28	32	37	30	33	31	52	34	26	15	35	20	37	36	15	0	37	9	22	38	3	45
29	32	54	22	33	49	13	34	44	4	35	38	54	36	33	45	37	28	36	38	23	26
30	33	11	15	34	6	34	35	1	52	35	57	11	36	52	30	37	47	49	38	43	7
31	33	28	7	34	23	54	35	19	41	36	15	28	37	11	15	38	7	2	39	2	49
32	33	45	0	34	41	15	35	37	30	36	33	45	37	30	0	38	26	15	39	22	30
33	34	1	52	34	58	36	35	55	19	36	52	2	37	48	45	38	45	28	39	42	11
34	34	18	45	35	15	56	36	13	7	37	10	19	38	7	30	39	4	41	40	1	52
35	34	35	37	35	33	17	36	30	56	37	28	36	38	26	15	39	23	54	40	21	34
36	34	52	30	35	50	37	36	48	45	37	46	52	38	45	0	39	43	7	40	41	15
37	35	9	22	35	7	58	37	6	34	38	5	9	39	3	45	40	2	21	41	0	56
38	35	26	15	36	25	19	37	24	22	38	23	26	39	22	30	40	21	34	41	20	37
39	35	43	7	36	42	39	37	42	11	38	41	43	39	41	15	40	40	47	41	40	19
40	36	0	0	37	0	0	38	0	0	39	0	0	40	0	0	41	0	0	42	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes.	43			44			45			46			47			48			49		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	43	0	0	44	0	0	45	0	0	46	0	0	47	0	0	48	0	0	49	0	0
2	30	14	4	30	56	15	31	38	26	32	20	37	33	2	49	33	45	0	34	27	11
3	30	34	13	31	16	52	31	59	32	32	42	11	33	24	51	34	7	30	34	50	9
4	30	54	22	31	37	30	32	20	37	33	3	45	33	46	52	34	30	0	35	13	7
5	31	14	32	31	58	7	32	41	43	33	25	19	34	8	54	34	52	30	35	36	6
6	31	34	41	32	18	45	33	2	49	33	46	52	54	30	56	35	15	0	35	59	4
7	31	54	51	32	39	22	33	23	54	34	8	26	34	52	58	33	37	30	36	22	2
8	32	15	0	33	0	0	33	45	0	34	30	0	35	15	0	36	0	0	36	45	0
9	32	35	9	33	20	37	34	6	6	34	51	34	35	37	2	36	22	30	37	7	58
10	32	55	19	33	41	15	34	27	11	35	13	7	35	59	4	36	45	0	37	30	56
11	33	15	28	34	1	52	34	48	17	35	34	41	36	21	6	37	7	30	37	53	54
12	33	35	37	34	22	30	35	9	22	35	56	15	36	43	7	37	30	0	38	16	52
13	33	55	57	34	43	7	35	30	28	36	17	49	37	5	9	37	52	30	38	39	51
14	34	15	56	35	3	45	35	51	34	36	39	22	37	27	11	38	15	0	39	2	49
15	34	36	6	35	24	22	36	12	39	37	0	56	37	49	13	38	37	30	39	25	47
16	34	56	15	35	45	0	36	33	45	37	22	30	38	11	15	39	0	0	39	48	45
17	35	16	24	36	5	37	36	54	51	37	44	4	38	33	17	39	22	30	40	11	43
18	35	36	34	36	26	15	37	15	56	38	5	37	38	55	19	39	45	0	40	34	41
19	35	56	43	36	46	52	37	37	2	38	27	11	39	17	21	40	7	30	40	57	39
20	36	16	52	37	7	30	37	58	7	38	48	45	39	39	22	40	30	0	41	20	37
21	36	37	2	37	28	7	38	19	13	39	10	19	40	1	24	40	52	30	41	43	36
22	36	57	11	37	48	45	38	40	19	39	31	52	40	23	26	41	15	0	42	6	34
23	37	17	21	38	9	22	39	1	24	39	53	26	40	45	28	41	37	30	42	29	32
24	37	37	30	38	30	0	39	22	30	40	15	0	41	7	30	42	0	0	42	52	30
25	37	57	39	38	50	37	39	43	36	40	36	34	41	29	32	42	22	30	43	15	28
26	38	17	49	39	11	15	40	4	41	40	58	7	41	51	34	42	45	0	43	38	26
27	38	37	58	39	31	52	40	25	47	41	19	41	42	13	36	43	7	30	44	1	24
28	38	58	7	39	52	30	40	46	52	41	41	15	42	35	37	43	30	0	44	24	22
29	39	18	17	40	13	7	41	7	58	42	2	49	42	57	39	43	52	30	44	47	21
30	39	38	26	40	33	45	41	29	4	42	24	22	43	19	41	44	15	0	45	10	19
31	39	58	36	40	54	22	41	50	9	42	45	56	43	41	43	44	37	30	45	33	17
32	40	18	45	41	15	0	42	11	15	43	7	30	44	3	45	45	0	0	45	56	15
33	40	38	54	41	35	37	42	32	21	43	29	4	44	25	47	45	22	30	46	19	13
34	40	59	4	41	56	15	42	53	26	43	50	37	44	47	49	45	45	0	46	42	11
35	41	19	13	42	16	52	43	14	32	44	12	11	45	9	51	46	7	30	47	5	9
36	41	39	22	42	37	30	43	35	37	44	33	45	45	31	52	46	30	0	47	28	7
37	41	59	32	42	58	7	43	56	43	44	55	19	45	53	54	46	52	30	47	51	6
38	42	19	41	43	18	45	44	17	49	45	16	52	46	15	56	47	15	0	48	14	4
39	42	39	51	43	39	22	44	38	54	45	38	26	46	37	58	47	37	30	48	37	2
40	43	0	0	44	0	0	45	0	0	46	0	0	47	0	0	48	0	0	49	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes.	50			51			52			53			54			55			56		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	50	0	0	51	0	0	52	0	0	53	0	0	54	0	0	55	0	0	56	0	0
2	35	9	22	35	51	34	36	33	45	37	15	56	37	58	7	38	40	19	39	22	30
3	35	32	49	36	15	28	36	58	7	37	40	47	38	23	26	39	6	6	39	48	45
4	35	56	15	36	39	22	37	22	30	38	5	37	38	48	45	39	31	52	40	15	0
5	36	19	41	37	3	17	37	46	52	38	30	28	39	14	4	39	57	39	40	41	15
6	36	43	7	37	27	11	38	11	15	38	55	19	39	39	22	40	23	26	41	7	30
7	37	6	34	37	51	6	38	35	37	39	20	9	40	4	41	40	49	13	41	33	45
8	37	30	0	38	15	0	39	0	0	39	45	0	40	30	0	41	15	0	42	0	0
9	37	53	26	38	38	54	39	24	22	40	9	51	40	55	19	41	40	47	42	26	15
10	38	16	52	39	2	49	39	48	45	40	34	41	41	20	37	42	6	34	42	52	30
11	38	40	19	39	26	43	40	13	7	40	59	32	41	45	56	42	32	21	43	18	45
12	39	3	45	39	50	37	40	37	30	41	24	22	42	11	15	42	58	7	43	45	0
13	39	27	11	40	14	32	41	1	52	41	49	13	42	36	34	43	23	54	44	11	15
14	39	50	37	40	38	26	41	26	15	42	14	4	43	1	52	43	49	41	44	37	30
15	40	14	4	41	2	21	41	50	37	42	38	54	43	27	11	44	15	28	45	3	45
16	40	37	30	41	26	15	42	15	0	43	3	45	43	52	30	44	41	15	45	30	0
17	41	0	56	41	50	9	42	39	22	43	28	36	44	17	49	45	7	2	45	56	15
18	41	24	22	42	14	4	43	3	45	43	53	26	44	43	7	45	32	49	46	22	30
19	41	47	49	42	37	58	43	28	7	44	18	17	45	8	26	45	58	36	46	48	45
20	42	11	15	43	1	52	43	52	30	44	43	7	45	33	45	46	24	22	47	15	0
21	42	34	41	43	25	47	44	16	52	45	7	58	45	59	4	46	50	9	47	41	15
22	42	58	7	43	49	41	44	41	15	45	32	49	46	24	22	47	15	56	48	7	30
23	43	21	34	44	13	36	45	5	37	45	57	39	46	49	41	47	41	43	48	33	45
24	43	45	0	44	37	30	45	30	0	46	22	30	47	15	0	48	7	30	49	0	0
25	44	8	26	45	1	24	45	54	22	46	47	21	47	40	19	48	33	17	49	26	15
26	44	31	52	45	25	19	46	18	45	47	12	11	48	5	37	48	59	4	49	52	30
27	44	55	19	45	49	13	46	43	7	47	37	2	48	30	56	49	24	51	50	18	45
28	45	18	45	46	13	7	47	7	30	48	1	52	48	56	15	49	50	37	50	45	0
29	45	42	11	46	37	2	47	31	52	48	26	43	49	21	34	50	16	24	51	11	15
30	46	5	37	47	0	56	47	56	15	48	51	34	49	46	52	50	42	11	51	37	30
31	46	29	4	47	24	51	48	20	37	49	16	24	50	12	11	51	7	58	52	3	45
32	46	52	30	47	48	45	48	45	0	49	41	15	50	37	30	51	33	45	52	30	0
33	47	15	56	48	12	39	49	9	22	50	6	6	51	2	49	51	59	32	52	56	15
34	47	39	22	48	36	34	49	33	45	50	30	56	51	28	7	52	25	19	53	22	30
35	48	2	49	49	0	28	49	58	7	50	55	47	51	53	26	52	51	6	53	48	45
36	48	26	15	49	24	22	50	22	30	51	20	37	52	18	45	53	16	52	54	15	0
37	48	49	41	49	48	17	50	46	52	51	45	28	52	44	4	53	42	39	54	41	15
38	49	13	7	50	12	11	51	11	15	52	10	19	53	9	22	54	8	26	55	7	30
39	49	36	34	50	36	6	51	35	37	52	35	9	53	34	41	54	34	13	55	33	45
40	50	0	0	51	0	0	52	0	0	53	0	0	54	0	0	55	0	0	56	0	0

Partes.	57			58			59			60			61			62			63		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	57	0	0	58	0	0	59	0	0	60	0	0	61	0	0	62	0	0	63	0	0
2	40	4	41	40	46	52	41	29	4	42	11	15	42	53	26	43	35	37	44	17	49
3	40	31	24	41	14	4	41	56	43	42	39	22	43	22	2	44	4	41	44	47	21
4	40	58	7	41	41	15	42	24	22	43	7	30	43	50	37	44	33	45	45	16	52
5	41	24	51	42	8	26	42	52	2	43	35	37	44	19	13	45	2	49	45	46	24
6	41	51	34	42	35	37	42	19	41	44	3	45	44	47	49	45	31	52	46	15	56
7	42	18	17	43	2	49	43	47	21	44	31	52	45	16	24	46	0	56	46	45	28
8	42	45	0	43	30	0	44	15	0	45	0	0	45	45	0	46	30	0	47	15	0
9	43	11	43	43	57	11	44	42	39	45	28	7	46	13	36	46	59	4	47	44	32
10	43	38	26	44	24	22	45	10	19	45	56	15	46	42	11	47	28	7	48	14	4
11	44	5	9	44	51	34	45	37	58	46	24	22	47	10	47	47	57	11	48	43	36
12	44	31	52	45	18	45	46	5	37	46	52	30	47	32	22	48	26	15	49	13	7
13	44	58	36	45	45	56	46	33	17	47	20	37	48	7	58	48	55	19	49	42	39
14	45	25	19	46	13	7	47	0	56	47	48	45	48	36	34	49	24	22	50	12	11
15	45	52	2	46	40	19	47	28	36	48	16	52	49	5	9	49	53	26	50	41	43
16	46	18	45	47	7	30	47	56	15	48	45	0	49	33	45	50	22	30	51	11	15
17	46	45	28	47	34	41	48	23	54	49	13	7	50	2	21	50	51	34	51	40	47
18	47	12	11	48	1	52	48	51	34	49	41	15	50	30	56	51	20	37	52	10	19
19	47	38	54	48	29	4	49	19	13	50	9	22	50	59	32	51	49	41	52	39	51
20	48	5	37	48	56	15	49	46	52	50	37	30	51	28	7	52	18	45	53	9	22
21	48	32	21	49	23	26	50	14	32	51	5	37	51	56	43	52	47	49	53	38	54
22	48	59	4	49	50	37	50	42	11	51	33	45	52	25	19	53	16	52	54	8	26
23	49	25	47	50	17	49	51	9	51	52	1	52	52	53	54	53	45	56	54	37	58
24	49	52	30	50	45	0	51	37	30	52	30	0	53	22	30	54	15	0	55	7	30
25	50	19	13	51	12	11	52	5	9	52	58	7	53	51	6	54	44	4	55	37	2
26	50	45	56	51	33	22	52	32	49	53	26	15	54	19	41	55	13	7	56	6	34
27	51	12	39	52	6	34	53	0	28	53	54	22	54	48	17	55	42	11	56	36	6
28	51	39	22	52	33	45	53	28	7	54	22	30	55	16	52	56	11	15	57	5	37
29	52	6	6	53	0	56	53	55	47	54	50	37	55	45	28	56	40	19	57	35	9
30	52	32	49	53	28	7	54	23	26	55	18	45	56	14	4	57	9	22	58	4	41
31	51	59	32	53	55	19	54	51	6	55	46	52	56	42	39	57	38	26	58	34	13
32	53	56	15	54	22	30	55	18	45	56	15	0	57	11	15	58	7	30	59	3	45
33	53	52	58	54	49	41	55	46	24	56	43	7	57	39	51	68	36	34	59	33	17
34	54	19	41	55	16	52	56	14	4	57	11	15	58	8	26	59	5	37	60	2	49
35	54	46	24	55	44	4	56	41	43	57	39	22	58	37	2	59	34	41	60	32	21
36	55	13	7	56	11	15	57	9	22	58	7	30	59	5	37	60	3	45	61	1	52
37	55	39	51	56	38	26	57	37	2	58	35	37	59	34	13	60	32	49	61	31	24
38	56	9	34	57	5	37	58	4	41	59	3	45	60	2	49	61	1	52	62	0	56
39	56	33	17	57	32	49	58	32	21	59	31	52	60	31	24	61	30	56	62	30	28
40	57	0	0	58	0	0	59	0	0	60	0	0	61	0	0	62	0	0	63	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes	64			65			66			67			68			69			70		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	64	0	0	65	0	0	66	0	0	67	0	0	68	0	0	69	0	0	70	0	0
2	45	0	0	45	42	11	46	24	22	47	6	34	47	48	45	48	30	56	49	13	7
3	45	30	0	46	12	39	46	55	19	47	37	58	48	20	37	49	3	17	49	45	56
4	46	0	0	46	43	7	47	26	15	48	9	22	48	52	30	49	35	37	50	18	45
5	46	30	0	47	13	36	47	57	11	48	40	47	49	24	22	50	7	58	50	51	34
6	47	0	0	47	44	4	48	28	7	49	12	11	49	56	15	50	40	19	51	24	22
7	47	30	0	48	14	32	48	59	4	49	43	36	50	28	7	51	12	39	51	57	11
8	48	0	0	48	45	0	49	30	0	50	15	0	51	0	0	51	45	0	52	30	0
9	48	30	0	49	15	28	50	0	56	50	46	24	51	31	52	52	17	21	53	2	49
10	49	0	0	49	45	56	50	31	52	51	17	49	52	3	45	52	49	41	53	35	37
11	49	30	0	50	16	24	51	2	49	51	49	13	52	35	37	53	22	2	54	8	26
12	50	0	0	50	46	52	51	33	45	52	20	57	53	7	30	53	54	22	54	41	15
13	50	30	0	51	17	21	52	4	41	52	52	2	53	39	22	54	26	43	55	14	4
14	51	0	0	51	47	49	52	35	37	53	23	26	54	11	15	55	59	4	55	46	52
15	51	30	0	52	18	17	53	6	34	53	54	51	54	43	7	55	31	24	56	19	41
16	52	0	0	52	48	45	53	37	30	54	26	15	55	15	0	56	3	45	56	52	30
17	52	30	0	53	19	13	54	8	26	54	57	39	55	46	52	56	36	6	57	25	19
18	53	0	0	53	49	41	54	39	22	55	29	4	56	18	45	57	8	26	57	58	7
19	53	30	0	54	20	9	55	10	19	56	0	28	56	50	37	57	40	47	58	30	56
20	54	0	0	54	50	37	55	41	15	56	31	52	57	22	30	38	13	7	59	3	45
21	54	30	0	55	21	6	56	12	11	56	3	17	57	54	22	58	45	28	59	36	34
22	55	0	0	55	51	34	56	43	7	57	34	41	58	26	15	59	17	49	60	9	22
23	55	30	0	56	22	2	57	14	4	58	6	6	58	58	7	59	50	9	60	42	11
24	56	0	0	56	52	30	57	45	0	58	37	30	59	30	0	60	22	30	61	15	0
25	56	30	0	57	22	58	58	15	56	59	8	54	60	1	52	60	54	51	61	47	49
26	57	0	0	57	53	26	58	46	52	59	40	19	60	33	45	61	27	11	62	20	37
27	57	30	0	58	23	54	59	17	49	60	11	43	61	5	37	61	59	32	62	53	26
28	58	0	0	58	54	22	59	48	45	60	43	7	61	37	30	62	31	52	63	26	15
29	58	30	0	59	24	51	60	19	41	61	14	32	62	9	22	63	4	13	63	59	4
30	59	0	0	59	55	19	60	50	37	61	45	56	62	41	15	63	36	34	64	31	52
31	59	30	0	60	25	47	61	21	34	62	17	21	63	13	7	64	8	54	65	4	41
32	60	0	0	60	56	15	61	52	30	62	48	45	63	45	0	64	41	15	65	37	30
33	60	30	0	61	26	43	62	23	26	63	20	9	64	16	52	65	13	36	66	10	19
34	61	0	0	61	57	11	62	54	22	63	51	34	64	48	45	65	45	56	66	43	7
35	61	30	0	62	27	39	63	25	19	64	22	58	65	20	37	66	18	17	67	15	56
36	62	0	0	62	58	7	63	56	15	64	54	22	65	52	30	66	50	37	67	48	45
37	62	30	0	63	28	36	64	27	11	65	25	47	66	24	22	67	22	58	68	21	34
38	63	0	0	63	59	4	64	58	7	65	57	11	66	56	15	67	55	19	68	54	22
39	63	30	0	64	29	32	65	29	4	66	28	36	67	28	7	68	27	39	69	27	11
40	64	0	0	65	0	0	66	0	0	67	0	0	68	0	0	69	0	0	70	0	0

Numerus ſiu e ordo Quadrantum.

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes.	71			72			73			74			75			76			77		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	71	0	0	72	0	0	73	0	0	74	0	0	75	0	0	76	0	0	77	0	0
2	49	55	19	50	37	30	51	19	41	52	1	52	52	44	4	53	26	5	54	8	26
3	50	28	36	51	11	15	51	53	54	52	36	34	53	19	13	54	1	52	54	44	32
4	51	1	52	51	45	0	52	28	7	53	11	15	53	54	22	54	37	30	55	20	37
5	51	35	9	52	18	45	53	2	21	53	45	56	54	29	32	55	13	7	55	56	43
6	52	8	26	52	52	30	53	36	34	54	20	37	55	4	41	55	48	45	56	32	49
7	52	41	43	53	26	11	54	10	47	54	55	19	55	39	51	56	24	22	57	8	54
8	53	15	0	54	0	0	54	45	0	55	30	0	56	15	0	57	0	0	57	45	0
9	53	48	17	54	33	45	55	19	13	56	4	41	56	50	9	57	35	37	58	21	6
10	54	21	34	55	7	30	55	53	26	56	39	22	57	25	19	58	11	15	58	57	11
11	54	54	51	55	41	15	56	27	39	57	14	4	58	0	28	58	46	52	59	33	17
12	55	28	7	56	15	0	57	1	52	57	48	45	58	35	37	59	22	30	60	9	22
13	56	1	24	56	48	45	57	36	6	58	23	26	59	10	47	59	58	7	60	45	28
14	56	34	41	57	22	30	58	10	19	58	58	7	59	45	56	60	33	45	61	21	34
15	57	7	58	57	56	15	58	44	32	59	32	49	60	21	6	61	9	22	61	57	39
16	57	41	15	58	30	0	59	18	45	60	7	30	60	56	15	61	45	0	62	33	45
17	58	14	32	59	3	45	59	52	58	60	42	11	61	31	24	62	20	37	63	9	51
18	58	47	49	59	37	30	60	27	11	61	16	52	62	6	34	62	56	15	63	45	56
19	59	21	6	60	11	15	61	1	24	61	51	34	62	41	43	63	31	52	64	22	2
20	59	54	22	60	45	0	61	35	37	62	26	15	63	16	52	64	7	30	64	58	7
21	60	27	39	61	18	45	62	9	51	63	0	56	63	52	2	64	43	7	65	34	13
22	61	0	56	61	52	30	62	44	4	63	35	37	64	27	11	65	18	45	66	10	19
23	61	34	13	62	26	15	63	18	17	64	10	19	65	2	21	65	54	22	66	46	24
24	62	7	30	63	0	0	63	52	30	64	45	0	65	37	30	66	30	0	67	22	30
25	62	40	47	63	33	45	64	26	43	65	19	41	66	12	39	67	5	37	67	58	36
26	63	14	4	64	7	30	65	0	56	65	54	22	66	47	49	67	41	15	68	34	41
27	63	47	21	64	41	15	65	35	9	66	29	4	67	22	58	68	16	52	69	10	47
28	64	20	37	65	15	0	66	9	22	67	3	45	67	58	7	68	52	30	69	46	52
29	64	53	54	65	48	45	66	43	36	67	38	26	68	33	17	69	28	7	70	22	58
30	65	27	11	66	22	30	67	17	49	68	13	7	69	8	26	70	3	45	70	59	4
31	66	0	28	66	56	15	67	52	2	68	47	49	69	43	36	70	39	22	71	35	9
32	66	33	45	67	30	0	68	26	15	69	22	30	70	18	45	71	15	0	72	11	15
33	67	7	2	68	3	45	69	0	28	69	57	11	70	53	54	71	50	37	72	47	21
34	67	40	19	68	37	30	69	34	41	70	31	52	71	29	4	72	26	15	73	23	26
35	68	13	36	69	11	15	70	8	54	71	6	34	72	4	13	73	1	52	73	59	32
36	68	46	52	69	45	0	70	43	7	71	41	15	72	39	22	73	37	30	74	35	37
37	69	20	9	70	18	45	71	17	21	72	15	56	73	14	32	74	13	7	75	11	43
38	69	53	26	70	52	30	71	51	34	72	50	37	73	49	41	74	48	45	75	47	49
39	70	26	43	71	26	15	72	25	47	73	25	19	74	24	51	75	24	22	76	23	54
40	71	0	0	72	0	0	73	0	0	74	0	0	75	0	0	76	0	0	77	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes.	78			79			80			81			82			83			84		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	70	0	0	79	0	0	80	0	0	81	0	0	82	0	0	83	0	0	84	0	0
2	54	50	37	55	32	49	56	15	0	56	57	11	57	39	22	58	21	34	59	3	45
3	55	27	11	56	9	51	56	52	30	57	35	9	58	17	49	59	0	28	59	43	7
4	56	3	45	56	46	52	57	30	0	58	13	7	58	56	15	59	39	22	60	22	30
5	56	40	19	57	23	54	58	7	30	58	51	6	59	34	41	60	18	17	61	1	52
6	57	16	52	58	0	56	58	45	0	59	29	4	60	13	7	60	57	11	61	41	15
7	57	53	26	58	37	58	59	22	30	60	7	2	60	51	34	61	36	6	62	20	37
8	58	30	0	59	15	0	60	0	0	60	45	0	61	30	0	62	15	0	63	0	0
9	59	6	34	59	52	2	60	37	30	61	22	58	62	8	26	62	53	54	63	39	22
10	59	43	7	60	29	4	61	15	0	62	0	56	62	46	52	63	32	49	64	18	45
11	60	19	41	61	6	6	61	52	30	62	38	54	63	25	19	64	11	43	64	58	7
12	60	56	15	61	43	7	62	30	0	63	16	52	64	3	45	64	50	37	65	37	30
13	61	32	49	62	20	9	63	7	30	63	54	51	64	42	11	65	29	32	66	16	52
14	62	9	22	62	57	11	63	45	0	64	32	49	65	20	37	66	8	27	66	56	15
15	62	45	56	63	34	13	64	22	30	65	10	47	65	59	4	66	47	21	67	35	37
16	63	22	30	64	11	15	65	0	0	65	48	45	66	37	30	67	26	15	68	15	0
17	63	59	4	64	48	17	65	37	30	66	26	43	67	15	56	68	5	9	68	54	22
18	64	35	37	65	25	19	66	15	0	67	4	41	67	54	22	68	44	4	69	33	45
19	65	12	11	66	2	21	66	52	30	67	42	39	68	32	49	69	22	58	70	13	7
20	65	48	45	66	39	22	67	30	0	68	20	37	69	11	15	70	1	52	70	52	30
21	66	25	19	67	16	24	68	7	30	68	58	36	69	49	41	70	40	47	71	31	52
22	67	1	52	67	53	26	68	45	0	69	36	34	70	28	7	71	19	41	72	11	15
23	67	38	26	68	30	28	69	22	30	70	14	32	71	6	34	71	58	36	72	50	37
24	68	15	0	69	7	30	70	0	0	70	52	30	71	45	0	72	37	30	73	30	0
25	68	51	34	69	44	32	70	37	30	71	30	28	72	23	26	73	16	24	74	9	22
26	69	28	7	70	21	34	71	15	0	72	8	26	73	1	52	73	55	19	74	48	45
27	70	4	41	70	58	36	71	52	30	72	46	24	73	40	19	74	34	13	75	28	7
28	70	41	15	71	35	37	72	30	0	73	24	22	74	18	45	75	13	7	76	7	30
29	71	17	49	72	12	39	73	7	30	74	2	21	74	57	11	75	52	2	76	46	52
30	71	54	22	72	49	41	73	45	0	74	40	19	75	35	37	76	30	56	77	26	15
31	72	30	56	73	26	43	74	22	30	75	18	17	76	14	4	77	9	51	78	5	37
32	73	7	30	74	3	45	75	0	0	75	56	15	76	52	30	77	48	45	78	45	0
33	73	44	4	74	40	47	75	37	30	76	34	13	77	30	56	78	27	39	79	24	22
34	74	20	37	75	17	49	76	15	0	77	12	11	78	9	22	79	6	34	80	3	45
35	74	57	11	75	54	51	76	52	30	77	50	9	78	47	49	79	45	28	80	43	7
36	75	33	45	76	31	52	77	30	0	78	28	7	79	26	15	80	24	22	81	22	30
37	76	10	19	77	8	54	78	7	30	79	6	6	80	4	41	81	3	17	82	1	52
38	76	46	52	77	45	56	78	45	0	79	44	4	80	43	7	81	42	11	82	41	15
39	77	23	26	78	22	58	79	22	30	80	22	2	81	21	34	82	21	6	83	20	37
40	78	0	0	79	0	0	80	0	0	81	0	0	82	0	0	83	0	0	84	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes	85			86			87			88			89			90			91		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	85	0	0	86	0	0	87	0	0	88	0	0	89	0	0	90	0	0	0	0	0
2	59	45	56	60	28	7	61	10	19	61	52	30	62	34	41	63	16	52	63	59	4
3	60	25	47	61	8	26	61	51	6	62	33	45	63	16	24	63	59	4	64	41	43
4	61	5	37	61	48	45	62	31	52	63	15	0	63	58	7	64	41	15	65	24	22
5	61	45	28	62	29	4	63	12	39	63	56	15	64	39	51	65	23	26	66	7	2
6	62	25	19	63	9	22	63	53	26	64	37	30	65	21	34	66	5	37	66	49	41
7	63	5	9	63	49	41	64	34	13	65	18	45	66	3	17	66	47	49	67	32	21
8	63	45	0	64	30	0	65	15	0	66	0	0	66	45	0	67	30	0	68	15	0
9	64	24	51	65	10	19	65	55	47	66	41	15	67	26	43	68	12	11	68	57	39
10	65	4	41	65	50	37	66	36	34	67	22	30	68	8	26	68	54	22	69	40	19
11	65	44	32	66	30	56	67	17	21	68	3	45	68	50	9	69	36	34	70	22	58
12	66	24	22	67	11	15	67	58	7	68	45	0	69	31	52	70	18	45	71	5	37
13	67	4	13	67	51	34	68	38	54	69	26	15	70	13	36	71	0	56	71	48	17
14	67	44	4	68	31	52	69	19	41	70	7	30	70	55	19	71	43	7	72	30	56
15	68	23	54	69	12	11	70	0	28	70	48	45	71	37	2	72	25	19	73	13	36
16	69	3	45	69	52	30	70	41	15	71	30	0	72	18	45	73	7	30	73	56	15
17	69	43	36	70	32	49	71	22	2	72	11	15	73	0	28	73	49	41	74	38	54
18	70	23	26	71	13	7	72	2	49	72	52	30	73	42	11	74	31	52	75	21	34
19	71	3	17	71	53	26	72	43	36	73	33	45	74	23	54	75	14	4	76	4	13
20	71	43	7	72	33	45	73	24	22	74	15	0	75	5	37	75	56	15	76	46	52
21	72	22	58	73	14	4	74	5	9	74	56	15	75	47	21	76	38	26	77	29	4
22	73	2	49	73	54	22	74	45	56	75	37	30	76	29	4	77	20	37	78	12	11
23	73	42	39	74	34	41	75	26	43	76	18	45	77	10	47	78	2	49	78	54	51
24	74	22	30	75	15	0	76	7	30	77	0	0	77	52	30	78	45	0	79	37	39
25	75	2	21	75	55	19	76	48	17	77	41	15	78	34	13	79	17	11	80	20	0
26	75	42	11	76	35	37	77	29	4	78	22	30	79	15	56	80	9	22	81	2	49
27	76	22	2	77	15	56	78	9	51	79	3	45	79	57	39	80	51	34	81	45	28
28	77	1	52	77	56	15	78	50	37	79	45	0	80	39	22	81	33	45	82	28	7
29	77	41	43	78	36	3[illegible]	79	31	24	80	26	15	81	21	6	82	15	56	83	10	47
30	78	21	34	79	16	52	80	12	11	81	7	30	82	2	49	82	58	7	83	53	27
31	79	1	24	79	57	11	80	52	58	81	48	45	82	44	32	83	40	19	84	36	0
32	79	41	15	80	37	30	81	33	45	82	30	0	83	26	15	84	22	30	85	18	45
33	80	21	6	81	17	49	82	14	32	83	11	15	84	7	58	85	4	41	86	1	24
34	81	0	56	81	58	7	82	55	19	83	52	30	84	49	41	85	46	52	86	44	4
35	81	40	47	82	38	26	83	36	6	84	33	45	85	31	24	86	29	4	87	26	43
36	82	20	37	83	18	45	84	16	52	85	15	0	86	13	7	86	11	15	88	9	22
37	83	0	28	83	59	4	84	57	39	85	56	15	86	54	51	87	53	26	88	52	2
38	83	40	19	84	39	22	85	38	26	86	37	30	87	36	34	88	35	37	89	34	41
39	84	20	9	85	19	41	86	19	13	87	18	45	88	18	17	89	17	49	0	0	0
40	85	0	0	86	0	0	87	0	0	88	0	0	89	0	0	90	0	0	0	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes.	92			93			94			95			96			97			98		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	64	41	15	65	23	26	66	5	37	66	47	49	67	30	0	68	12	11	68	54	22
3	65	24	22	66	7	2	66	49	41	67	32	21	68	15	0	68	57	39	69	40	19
4	66	7	30	66	50	37	67	33	45	68	16	52	69	0	0	69	43	7	70	26	15
5	66	50	37	67	34	13	68	17	49	69	1	24	69	45	0	70	28	36	71	12	11
6	67	33	45	68	17	49	69	1	52	69	45	56	70	30	0	71	14	4	71	58	7
7	68	16	52	69	1	24	69	45	56	70	30	28	71	15	0	71	59	32	72	44	4
8	69	0	0	69	45	0	70	30	0	71	15	0	72	0	0	72	45	0	73	30	0
9	69	43	7	70	28	36	71	14	4	71	59	32	72	45	0	73	30	28	74	15	56
10	70	26	15	71	12	11	71	58	7	72	44	4	73	30	0	74	15	56	75	1	52
11	71	9	22	71	55	47	72	42	11	73	28	36	74	15	0	75	1	24	75	47	49
12	71	52	30	72	39	22	73	26	15	74	13	7	75	0	0	75	46	52	79	33	45
13	72	35	37	73	22	58	74	10	19	74	57	39	75	45	0	76	32	21	77	19	41
14	73	18	35	74	6	34	74	54	22	75	42	11	76	30	0	77	17	49	78	5	37
15	74	1	52	74	50	9	75	38	26	76	26	43	77	15	0	78	3	17	78	51	34
16	74	45	0	75	33	45	76	22	30	77	11	15	78	0	0	78	48	45	79	37	30
17	75	28	7	76	17	21	77	6	34	77	55	47	78	45	0	79	34	13	80	23	26
18	76	11	15	77	0	56	77	50	37	78	40	19	79	30	0	80	19	41	81	9	22
19	76	54	22	77	44	32	78	34	41	79	24	51	80	15	0	81	5	9	81	55	19
20	77	37	30	78	28	7	79	18	45	80	9	22	81	0	0	81	50	37	82	41	15
21	78	20	37	79	11	43	80	2	49	80	53	54	81	45	0	82	36	6	83	27	11
22	79	3	45	79	55	19	80	46	50	81	38	26	82	30	0	83	21	34	84	13	7
23	79	46	52	80	38	54	81	30	56	82	22	58	83	15	0	84	7	2	84	59	4
24	80	30	0	81	22	30	82	15	0	83	7	30	84	0	0	84	52	30	85	45	0
25	81	13	7	82	6	6	82	59	4	83	52	2	84	45	0	85	37	58	86	30	56
26	81	56	15	82	49	41	83	43	7	84	36	34	85	30	0	86	23	26	87	16	52
27	82	39	22	83	33	17	84	27	11	85	21	6	86	15	0	87	8	54	88	2	49
28	83	22	30	84	16	52	85	11	15	86	5	37	87	0	0	87	54	22	88	48	45
29	84	5	37	85	0	28	85	55	19	86	50	9	87	45	0	88	39	51	89	34	41
30	84	48	45	85	44	4	86	39	22	87	34	41	88	30	0	89	25	19	0	0	0
31	85	31	52	86	27	39	87	23	26	88	19	13	89	15	0	0	0	0			
32	86	15	0	87	11	15	88	7	30	89	3	45	90	0	0	0	0	8			
33	86	58	7	87	54	51	88	51	34	89	48	17	0	0	0	0	0	0			
34	87	41	15	88	38	26	89	35	37	0	0	0	0	0	0						
35	88	24	22	89	22	2	0	0	0												
36	89	7	30	0	0	0															
37	89	50	37	0	0	0															
38	0	0	0	0	0	0															

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes.	99			100			101			102			103			104			105		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	69	36	34	70	18	45	71	0	56	71	43	7	72	25	19	73	7	30	73	49	41
3	70	22	58	71	5	37	71	48	17	72	30	56	73	13	36	73	56	15	74	37	58
4	71	9	22	71	52	30	72	35	37	73	18	45	74	1	52	74	45	0	75	28	7
5	71	55	47	72	39	22	73	22	58	74	6	34	74	50	9	75	33	45	76	17	21
6	72	42	11	73	26	15	74	10	19	74	54	22	75	38	26	76	22	30	77	6	34
7	73	28	36	74	13	7	74	57	39	75	42	11	76	26	43	77	11	15	77	55	47
8	74	15	0	75	0	0	75	45	0	76	30	0	77	15	0	78	0	0	78	45	0
9	75	1	24	75	46	52	76	32	21	77	17	49	78	3	17	78	48	45	79	34	13
10	75	47	49	76	33	45	77	19	41	78	5	37	78	51	34	79	37	30	80	23	26
11	76	34	13	77	20	37	78	7	2	78	53	26	79	39	51	80	26	15	81	12	39
12	77	20	37	78	7	30	78	54	22	79	41	15	80	28	7	81	15	0	82	1	52
13	78	7	2	78	54	22	79	41	43	80	29	4	81	16	24	82	3	45	82	51	6
14	78	53	26	79	41	15	80	29	4	81	16	52	82	4	41	82	52	30	83	40	19
15	79	39	51	80	28	7	81	16	24	82	4	41	82	52	58	83	41	15	84	20	32
16	80	26	15	81	15	0	82	3	45	82	52	30	83	41	15	84	30	0	85	18	45
17	81	12	39	82	1	52	82	51	6	83	40	19	84	29	32	85	18	45	86	7	58
18	81	59	4	82	48	45	83	37	30	84	28	7	85	17	49	86	7	30	86	57	11
19	82	45	28	83	35	37	84	25	47	85	15	56	86	6	6	86	56	15	87	46	24
20	83	31	52	84	22	30	85	13	7	86	3	45	86	54	22	87	45	0	88	35	37
21	84	18	17	85	9	22	86	0	28	86	51	34	87	42	39	88	33	45	80	24	51
22	85	4	41	85	56	15	86	47	49	87	39	22	88	30	56	89	22	30	0	0	0
23	85	51	6	86	43	7	87	35	9	88	27	11	89	19	13	0	0	0	0	0	0
24	86	37	30	87	30	0	88	22	30	89	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	87	23	54	88	16	52	89	9	51	0	0	0									
26	88	10	19	89	3	45	89	57	11	0	0	0									
27	88	56	43	89	50	37	0	0	0	0	0	0									
28	89	43	7	0	0	0															
29	0	0	0	0	0	0															
30	0	0	0																		

Numerus siue ordo Quadrantum

Partes	106			107			108			109			110			111			112		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	74	31	52	75	14	4	75	56	15	75	38	26	77	20	37	78	2	49	78	45	0
3	75	21	34	76	4	13	76	46	52	77	29	32	78	12	11	78	54	51	79	52	30
4	76	11	15	76	54	22	77	37	30	78	20	37	79	3	45	79	46	52	80	30	0
5	77	0	56	77	44	32	78	28	7	79	11	43	79	55	19	80	38	54	81	22	30
6	77	50	37	78	34	41	79	18	45	80	2	49	80	46	52	81	30	56	82	15	0
7	78	40	19	79	24	51	80	9	22	80	53	54	81	38	26	82	22	58	83	7	30
8	79	30	0	80	15	0	31	0	0	81	45	0	82	30	0	83	15	0	84	0	0
9	80	19	41	81	5	9	81	50	37	82	36	6	83	21	34	84	7	2	84	52	30
10	81	9	22	81	55	19	82	41	15	83	27	11	84	13	7	84	59	4	85	45	0
11	81	59	4	82	45	28	83	31	52	84	18	17	85	4	41	85	51	6	86	37	30
12	82	48	45	83	35	37	84	22	30	85	9	22	85	56	15	86	43	7	87	30	0
13	83	38	26	84	25	47	85	13	7	86	0	28	86	47	49	87	35	9	88	22	30
14	84	28	7	85	15	56	86	3	45	86	51	34	87	39	22	88	27	11	89	15	0
15	85	17	49	86	6	6	86	54	22	87	42	39	88	30	56	89	19	13	0	0	0
16	86	7	30	86	56	15	87	45	0	88	33	45	89	22	30	0	0	0			
17	86	57	11	87	46	24	88	35	37	89	24	51	0	0	0	0	0	0			
18	87	46	52	88	36	34	89	26	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
19	88	36	34	89	26	43	0	0	0												
20	89	26	15	0	0	0	0	0	0												
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0												

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes	113			114			115			116			117			118			119		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	79	27	11	80	9	22	80	51	34	81	33	45	82	15	56	82	58	7	83	40	19
3	80	20	9	81	2	49	81	45	28	82	28	7	83	10	47	83	53	26	84	36	6
4	81	13	7	81	56	15	82	39	22	83	22	30	84	5	37	84	48	45	85	31	52
5	83	6	6	82	49	41	83	33	17	84	16	52	85	0	28	85	44	4	86	27	39
6	82	59	4	83	43	7	84	27	11	85	11	15	85	55	19	86	39	22	87	23	26
7	83	52	2	84	36	34	85	21	6	86	5	37	86	50	9	87	34	41	88	19	13
8	84	45	0	85	30	0	86	15	0	87	0	0	87	45	0	88	30	0	89	15	0
9	85	37	58	86	23	26	87	8	54	87	54	22	88	39	51	89	25	19	0	0	0
10	86	30	56	87	16	52	88	2	49	88	48	45	89	34	41	0	0	0	0	0	0
11	87	23	54	88	10	19	88	56	43	89	43	7	0	0	0	0	0	0			
12	88	16	52	89	3	45	0	0	0	0	0	0									
13	89	9	51	89	57	11	0	0	0												
14	0	0	0	0	0	0															
15	0	0	0																		

Partes	120			121			122			123			124			125			126		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	84	22	30	85	4	41	85	46	52	86	29	4	87	11	15	87	53	27	88	35	37
3	85	18	45	86	1	24	86	44	4	87	26	43	88	9	22	88	52	2	89	34	41
4	86	15	0	86	58	7	87	41	15	88	24	22	89	7	30	89	50	37	0	0	0
5	87	11	15	87	54	51	88	38	26	89	22	2	0	0	0	0	0	0	0	0	8
6	88	7	30	88	51	34	89	35	37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	89	3	45	89	48	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	90	0	0	0	0	0															
9	0	0	0																		

Partes	127			128		
	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0
2	89	17	49	90	0	0
3	0	0	0	0	0	0

Quo pacto per circinũ deprehendantur Minuta, ac secunda in quauis proposita gradus particula,

10 QVANDO intra Quadrantem non descripti sunt plures quadrantes, sed vnicus tantum adest in 90. gradus exquisitè distributus, cognoscemus solo circini beneficio, quot Minuta, ac secunda in quauis gradus particula contineantur: id quod etiam in libello de vsu, & fabrica instrumenti horologiorum, & in Astrolabio fecimus, hoc scilicet modo. Sit data verbi gratia particula t u, in gradu 20. superioris Quadrantis B C. Sumatur ea diligentissime beneficio circini, & à principio Quadrantis, id est, à puncto C, incipiendo, eadem apertura circini accipiantur 60. æquales particulæ vsque ad punctum X, ita vt arcus CX, sexagecuplus sit arcus t u: Quot enim gradus integri in hoc arcu sexagecuplo comprehenduntur, tot minuta complectetur particula data t u. Et si vltra gradus integros in arcu CX, superſit aliqua particula, accipiatur ea sexagies quoque, initio facto à puncto C. Nam quot gradus integri in hoc arcu sexagecuplo continentur, tot secunda vltra Minuta inuenta continebuntur in data particula t u. Quod si adhuc aliquid supersit, reperientur eodem modo Tertia, &c. Itaque cum in arcu CX, qui sexagecuplus est particulæ t u, contineantur 40. gradus integri, comprehendet particula t u, quadraginta Minuta, & insuper tot secunda, quot gradus continentur in arcu, qui sexagecuplus sit particulæ vltra 40. gradus in arcu CX, contentæ, &c.

HOC autem ita demonstro. Quam proportionem habet arcus 60. graduum ad 1. gradum, eam habet arcus CX, ad particulam t u, cum vtrobique proportio sit sexagecupla. Igitur permutando erit, vt arcus 60 graduum ad arcum CX, ita 1. gradus ad particulam t u: Ac proinde quot partes sexagesimæ arcus 60. graduum, hoc est, quot gradus in arcu CX, continentur, tot sexagesimæ partes vnius gradus, id est, tot minuta in particula t u, existent. Item quam proportionem habet arcus 60. Minutorum ad 1. Minutum, eam habet arcus sexagecuplus particulæ, quæ vltra gradus integros vsque ad X, superest ad hanc ipsam particulã. Permutando igitur erit, vt arcus 60. Minutorum ad arcum sexagecuplum dictæ particulæ reliquæ, ita 1. Minutum ad dictam particulam reliquam. Quare quot partes sexagesimæ arcus 60. Minutorum, hoc est, quot minuta in arcu dictæ particulæ sexagecuplo (sumendo nunc gradus Quadrãtis BC, pro Minutis) continentur, tot partes sexagesimę vnius Minuti, id est, tot Secunda, in reliqua illa particula includentur, & sic deinceps, si opus sit, de Tertijs, Quartis, &c. intelligatur. Sed satis est, meo iudicio, si minuta diligenter inquirantur. Et si quidem particula remanens maior fuerit semisse gradus, pro illa vnum Minutum assumatur, Minutisque inuentis adijciatur, quod tunc in illa particula contineantur plura Secunda quam 30. Si vero eadem particula semisse gradus fuerit minor, nihil Minutis inuentis adijciatur, quod tunc in illa particula pauciora Secunda includantur, quam 30. Si denique dicta particula semissi gradus fuerit æqualis, liberum sit addere Minutis inuentis vnum Minutum, vel non addere.

11 QVIA vero facile error committi potest, si circino particulam dictam gradus, vel minuti sexagies ordine sumere velimus, rectius feceris, quando particula data semisse gradus minor est, si eam vna cum præcedente gradu acceptam primo loco quintuples, deinde hunc arcum quintuplum duples, tertio hũc arcũ duplũ triples, ac tandẽ quarto hunc arcũ triplũ iterũ duples. Vltimus. n. hic arcus erit datæ particulę vna cũ gradu accepto sexagecuplus.

Quare

Quare ſi ex eo demantur 60. gradus, indicabunt reliqui gradus numerum minutorum in data particula contentorum. Quod ſi per æſtimationem cognoueris, particulam ſemiſſe gradus minorem non ſuperare min. 24. (Nam ſi ſuperaret 24. minuta, non poſſemus ratione iam explicanda inquirere minuta; propterea quod circumducendo circinum, totum Quadrantem excederemus, vt patebit.) commodius minuta datæ particulæ cognoſcemus hoc modo. Datam particulam cum gradu præcedenti primo loco quadruplicabimus: deinde hunc arcum quadruplum duplabimus, vt habeamus octuplum arcus ex particula, & vno gradu compoſiti; tertio arcum hunc octuplum iterum duplabimus, vt fiat arcus ſedecuplus arcus ex data particula, & vno gradu compoſiti; quarto hunc arcum rurſus duplabimus; & quinto tandem hunc duplũ iterum duplabimus; vt habeatur arcus continens arcum ex particula propoſita, & vno gradu ſexagies & quater, cuius extremum punctam diligenter notetur. Nam ſi ex toto arcu ab eo puncto incipiendo, auferatur arcus quadruplus particulæ datæ vnà cum vno gradu, ſupererit arcus ſexagecuplus eiuſdẽ particulæ vnà cum vno gradu; ex quo denique ſi demantur 60. gradus, reliqui gradus numerum minutorum indicabunt. Quòd ſi data particula ſemiſſe gradus fuerit maior, explorabimus eodem modo minuta in reliqua particula minore comprehenſa. Hæc namque minuta ex 60. detracta relinquent minuta in particula illa maiore comprehenſa. Bene autem vides, quando data particula minor parum à ſemiſſe gradus differt, tutius eſſe quintuplare illam vnà cum vno gradu; deinde hunc arcum duplare, tertio hunc arcum triplare, & poſtremo hunc iterum duplare. Hac enim ratione ex vltimo arcu duplato auferendi tantum ſunt 60. gradus, & nunquam totus quadrans exhauritur, vt patet.

12 NEQVE vero ſemper opus eſt, vt particula illa gradus, vel particula minor vnà cum vno gradu ſexagies repetatur, ſed ſatis eſt, vt ea aliquoties repetita incidat præciſe in aliquem gradum; quod non raro accidere ſolet. Nam tunc conſtituetur fractio, cuius numerator eſt numerus graduum percurſorum: Denominator autem numerus tot vnitatum, quoties particula circino repetita fuerit. Verbi gratia, ſi aliqua gradus particula vicies repetita incidat in 6. gradum, complectetur particula illa $\frac{6}{20}$. vnius gradus. Quare ſi numerator 6. per 60. multiplicetur, & productus numerus 360. per denominatorem 20. diuidatur, indicabit Quotiens 18. particulam illam continere 18. minuta. Sic ſi alia particula ſepties repetita incidat in tertium gradum, comprehendet ea $\frac{3}{7}$. vnius gradus. Si igitur numerator 3. per 60. multiplicetur, & numerus productus 180. per denominatorem 7. diuidatur, reperientur 25. min. Et quia in diuiſione ſuperſunt 5. ſi ea rurſum multiplicentur per 60. productuſque numerus 300 per eundem denominatorem 7. diuidatur, dabit quotiens adhuc $42\frac{6}{7}$. ſecunda.

DEMONSTRATIO huius praxis hæc eſt. Quoniam in priori exemplo, ita ſe habent 20. gradus ad 1. gradum, vt particula vicies repetita ad vnam particulam; erit permutando arcus 20. graduum ad arcum continentem particulam vicies, hoc eſt, ad arcum 6. graduum, vt 1. gradus ad vnam particulam: & conuertendo 6. grad. ad 20. grad. vt 1. particula ad 1. grad. Cum ergo 6. grad. ſint $\frac{6}{20}$. graduum 20. continebit quoque vna particula $\frac{6}{20}$. vnius gradus, quod eſt propoſitum. In poſteriori vero exemplo, quia ita ſe habent 7. grad. ad 1. gradum, vt particula ſepties repetita, hoc eſt,

vt 3. gradus ad 1. particulam; erit permutando arcus 7. graduum ad 3. grad. vt 1. grad. ad 1. particulam: & conuertendo 3. gradus ad 7. gra. vt vna particula ad 1. grad. Cum ergo 3. gradus sint $\frac{3}{7}$. septem graduum, complectetur quoque 1. particula $\frac{3}{7}$. vnius gradus; quod est propositum. eademq. in cæteris ratio est.

QVANDO particula minor cum vno gradu repetita incidit in gradũ aliquem præcisè, auferendi erunt ex gradibus percursis tot gradus, quoties particula illa cum vno gradu repetita fuit. Reliquus enim numerus erit Numerator fractionis: Denominator autem erit, qui prius. Vt si particula illa minor cum 1. gradu repetita septies incidit in 10. gradum; demendi erunt 7. gradus repetiti. Atq. ita habebũtur iterũ $\frac{3}{7}$. vnius gradus in data particula.

Quo pacto ex quouis gradu particula quotlibet Minutorum abscindatur.

13 SI vicissim ex quouis gradu auferre velimus particulam quotlibet minutorum, ita agendum erit. In quadrante superiore B C, accipiatur circino arcus tot graduum, quot minuta desiderantur; atque (vt confusionem vitemus) in arcum interuallo semidiametri quadrantis B C, descriptum transferatur. Si enim hic arcus in 60. partes æquales secetur, (primum, videlicet in duas: deinde vna harum iterum in duas: Tertio vna harum in tres; ac postremo vna harum in quinque) continebit vna particula sexagesima numerũ minutorum propositum. Verbi gratia, si particula quæratur continens 50. min. accipiemus in arcu F G, ad interuallum semidiametri A C, descripto arcum FG, arcui C Z, graduum 50. æqualem, eumque in 60. partes æquales secabimus, primum in duas in puncto K: Deinde arcum FK, iterum in duas in puncto L; tertio arcum FL, in tres in punctis T, V. Ac tandem arcum F V, in quinque. Vna namque harum 5. particularum comprehendet 50. min. ac proinde si transferatur circino in quemlibet gradum Quadrantis B C, abscissa erunt 50. Min. ex eo gradu. Hoc ita demonstro. Quoniam est, vt arcus 60. graduũ ad 1. gradum, ita arcus C Z, vel FG, graduum 50. ad sexagesimam partem eiusdem arcus FG; erit permutando, vt arcus 60. graduum ad arcum F G, graduum 50; ita 1. gradus ad sexagesimam particulam arcus FG: & conuertendo, vt arcus FG, graduum 50. ad arcum graduum 60, ita particula sexagesima arcus F G, ad 1. gradum. Cum ergo arcus F G, contineat $\frac{50}{60}$, arcus 60. graduum, continebit quoque particula sexagesima arcus FG, $\frac{50}{60}$. vnius gradus, hoc est, 50. Min. Quod est propositum.

SED hæc res incommodissima est in paruis Quadrantibus, præsertim si pauca Minuta vtpote 1. 2. vel 3. abscindenda sint. Quis enim in Quadrante exiguo arcum 1. gradus, vel 2. vel 3. in 60. particulas distribuat? Quam ob rem commodius id, quod proponitur, efficiemus hac ratione. Ex eodem quadrante superiore BC, arcus grad. 61. transferatur in arcum X Y, ad interuallum semidiametri AC. descriptum, ab X, vsque ad Y. Atque hic arcus X Y, in 6. partes æquales secetur; Primum scilicet in 2. deinde vtraque semissis in 3. Deinde prima pars in 10. particulas æquales diuidatur, ita vt quælibet harum particularum sit $\frac{1}{60}$. arcus XY. Et quoniam vna harum particularum est ad arcum X Y, vt 1. gradus Quadrantis B C, ad arcum 60. graduum; cum vtrobique proportio sit subsexagecupla; erit permutando vna illarum particularum ad 1, grad. vt arcus X Y, ad arcum 60. graduum. Quocirca quemadmodum arcus X Y, arcum grad. 60. continet semel, & insuper vnam eius partem sexagesimam, id est, 1. grad. ex constructione; Ita quoque vna illarum particularum comprehendet 1. gradum semel, & insuper

vnam

vnam partem sexagesimã vnius gradus, hoc est, 1. Minutum. Ex quo fit, vt duæ particulæ complectantur 2. grad. & insuper 2. Minuta. At vero 3. particulæ contineant 3. grad. & 3. Min. & sic deinceps.

ITAQVE si in Quadrantem BC, transferatur vna particula sexagesima arcus XY, à puncto C, vel à quouis gradu, habebitur 1. Min. in 2. gradu, vel quouis alio. Et si duæ particulæ transferantur, habebuntur in tertio gradu duo Minuta: tria autem Min. in 4. gradu, si tres particulæ transferantur, & sic de cæteris.

PARI ratione, si quis desideret quotlibet gradus, ac Minuta, inquirenda prius erit particula Minutorum, quæ desiderantur, eaque ad gradus propositos adijcienda. Quod si particula minutorum inuentorum tam exigua fuerit, vt circino vix accipi possit, accipienda ea erit vnà cum 1. gradu: & hic arcus ex 1. gradu & particula conflatus adijciendus ad numerum graduum propositum minus vno. Vt si velit quis grad. 89. Min. 59. Inuenienda prius erunt 59. Minuta. quod fiet, si 59. particulæ arcus XY, in Quadrantem BC, transferantur. Nam particula in 60. gradu complectetur 59. Min. vt dictum est. Si igitur arcus ex illa particula, & 1. gradu conflatus adijciatur ad arcũ 88. grad. conficietur arcus grad. 89. Min. 59. Eademque ratio est de cæteris. Accipientur autem in arcu XY, particulæ 59. si vnus pes circini in puncto 50. statuatur, & alter in nona particula primæ partis sextæ totius arcus XY, versus X. Ita accipientur quoque particulæ 49. 48. 39. 34. &c. vt perspicuum est.

IAM vero si Minuta non in Quadrante BC, sed in maiori, minoriue accipienda sint, inquirenda ea erunt in Quadrante BC, beneficio arcus XY, vt docuimus; Deinde arcui inter C, & finem particulæ inuentæ auferendus ex Quadrante proposito arcus similis. quod fiet, si ille Quadrans ex centro A, describatur, rectaque ex A, per finem particulæ in BC, inuentæ educatur, &c.

14 QVAE Num. 13. præcedenti diximus, perbelle etiam quadrant in lineas rectas. Nam eadem ratione cognoscemus, si linea recta in quotuis partes æquales secetur, quantam fractionem quælibet particula vnius partis contineat: Et viciſsim quo pacto ex vna parte abscindenda sit quæcunque fractio proposita. Quæ res incredibile est, quantam vtilitatem cum alijs rebus Geometricis, tum verò maxime Dimensionibus, quæ per scalam altimetram fieri solent, afferat, vt lib. 3. cum de Quadrato Geometrico, vbi scalæ altimetræ vsus apparebit, perspicuum erit. Sit enim recta linea AB, vt ad pedem Quadrantis superioris vides, secta in 10. partes æquales. (In tot enim partes libet tam vmbram rectam, quam versam scalæ altimetræ distribuere: quamuis ab alijs vtraque in 12. diuidatur: quod per illam diuisionem facilius Dimensiones perficiantur, vt suo loco patebit. Magis tamẽ probarem, si vtrumq. vmbræ latus in 100 partes secaretur, si id magnitudo instrumenti cõmode permittit) propositumq. sit, quot partes decimas contineat particula DC, partis quintæ. Beneficio circini sumpta particula DC, decupletur ab A, vsque ad E. Et quoniã in AE, continentur sex partes totius lineæ AB, continebit propterea particula DC. $\frac{6}{10}$. vnius partis decimæ, hoc est, $\frac{6}{100}$. totius lineæ. Ita vt si recta AB, diuisa cogitetur in 100. partes, tribuendo singulis decimis partibus denas particulas, segmentum AC, comprehendat $\frac{46}{100}$. Quia vero vltra $\frac{6}{10}$. superest adhuc particula

Quo pacto reperiatur fractio cuiusque particulæ in parte qualibet lineæ rectæ in partes æquales diuisæ.

FE, vnius decimæ, ſi ea rurſum decupletur ab A, vſque ad G, reperientur in A G, octo partes totius lineæ AB. Continet ergo particula FE, $\frac{8}{10}$. vnius decimæ, hoc eſt, propoſita particula D C, vltra $\frac{6}{10}$. vnius partis rectæ A B, continet inſuper $\frac{8}{10}$, vnius decimæ, (vnius inquam decimæ ex illis $\frac{6}{10}$. quas in particula D C, diximus comprehendi) nimirum $\frac{8}{100}$. vnius partis. ſi ſingulæ partes decimæ rectæ A B, diuiſæ eſſent in 100. particulas; atque adeo, ſi recta A B, ſecta intelligatur in 1000. partes, tribuendo ſingulis decimis partibus centenas particulas, ſegmentum AC, complectetur $\frac{468}{1000}$. quippe cum in AD, contineantur $\frac{400}{1000}$. Et in DC, $\frac{68}{100}$. vnius partis rectæ AB, ſiue $\frac{68}{1000}$. totius lineę A B; cum quælibet centeſima particula vnius partis decimæ ſit $\frac{1}{1000}$. Atque in hunc modum progredi licebit ad decimas vnius decimæ ex illis $\frac{6}{10}$. quæ in particula DC, continentur. nimirum ad fractionem à 10000. denominatam, &c. ſed ſatis mihi videtur ad partes milleſimas peruenire.

DEMONSTRATIO hic eadem eſt, quæ in gradibus, ac Minutis. Eandem enim proportionem habet recta 10. partium ad 1. partem, quam recta AE, ad particulam DC, cum vtrobique proportio ſit decupla, ideoque permutando erit vt recta 10. partium ad rectam AE, ita 1. pars ad particulam DC. Quamobrem ſicut in AE, continentur $\frac{6}{10}$. rectæ AB, decem partium, & inſuper particula FE, reſpectu vnius partis lineæ AB, decem partium, ita quoque in particula data DC, continebuntur $\frac{6}{10}$. vnius partis, & inſuper talis particula reſpectu vnius decimæ qualis eſt FE, reſpectu vnius partis lineæ AB, decem partium, &c.

Denominatio facilis fractionum milleſimarum.

ITAQVE, vt vides, duabus operationibus ad milleſimas partes peruenitur, ac ſi latus totum AB, in 1000. partes ſectum eſſet, quod conſideratione dignum eſt. Et duo quidem Numeratores decimarum eo ordine poſiti, quo inuenti ſunt, dant Numeratorem centeſimarum: cui ſi præponatur ad ſiniſtram numerus integrarum partium ante datam particulam exiſtentium, conflabitur Numerator milleſimarum. Vt in ſuperiori exemplo, quia ante datam patticulam D C, reperiuntur 4. partes, inuentæque ſunt $\frac{6}{10}$. & $\frac{8}{10}$. erit tota fractio $\frac{468}{1000}$. Sic ſi inuentæ eſſent pro aliqua particula in octaua parte, $\frac{7}{10}$. $\frac{0}{10}$. conſtitueretur fractio $\frac{870}{1000}$. Item ſi in tertia parte inuentæ eſſent $\frac{0}{10}$. $\frac{7}{10}$. fieret fractio $\frac{307}{1000}$. & ſic de cæteris. Quod ſi recta AB, id eſt, latus vtriuſque vmbræ diuideretur in 100. partes, reperirentur partes milleſimæ vnica operatione; ſi nimirum particula data in vna centeſima decuplaretur: quia tunc intelligerentur ſingulæ centeſimæ in denas particulas ſubdiuiſæ. Sed quia particula data in centeſima aliqua parte perparua eſt, vt vix circino capi poſſit, accipiemus eam cũ vna centeſima, vel duabus, & ex decuplo abijciemus 10. vel 20. centeſimas, vt reliquæ centeſimæ exhibeant decimas vnius centeſimæ. Eadem ratione, quando data particula in linea 10. partium eſt perpuſilla, accipienda erit reliqua particula maior decies. Nam reliqua pars rectæ A B, à B, vſque ad finem illius particulæ decuplę dabit numerum decimarum in propoſita minore particula, &c. Hac ratione, ſi particulam CH, decuples, incides in punctum K. Ergo ſegmentum B K, dabit $\frac{6}{10}$. & inſuper particulam D K, vt ſupra; cum DK, particulæ FE, ſit æqualis. Ratio huius rei eſt, quod ambæ particulæ DC, C H, decuplatæ conficere debeant totam AB, vt conſtat.

AD Maiorem quoque commoditatem pro inueſtigandis partibus decimis, hoc

hoc est, pro decuplanda particula proposita, costrui poterit circinus duplicis aperturæ, in quo scilicet crura producta se mutuo intersecent, atq. vna apertura alterius sit semper decupla, instar circini, quo linea duas in partes æquales diuidi solet. Ita enim fiet, vt accepta per minorem aperturam particula abscissa, particula maior exhibeat eam particulam decies sumptam, vt non opus sit toties circinum circumducere: qua quidem in re facile error committi potest, qui illo circino, si recte fabricatus sit, facilius vitatur. Sed sine hoc circino idem fieri potest per instrumentum partium, quod capite præcedenti construximus. Nam si particula data circino capiatur, & summa diligentia ei sumatur in instrumento interuallum inter 10. & 10. æquale, erit interuallum inter 100. & 100. datæ particulæ decuplum.

15 IAM vero si vicissim ex qualibet parte rectæ A B, auferendæ sint quotcunque decimæ partes vnius, diuidendum erit segmentum continens numerum partium decimarum in 10. partes æquales. Nam vna pars decima huius segmenti continebit decimas partes quæsitas. Vt si cupiat quis $\frac{7}{10}$, diuidendum erit segmentum rectæ AB, includens 7. partes, in 10. particulas. Quælibet namque harum comprehendet $\frac{7}{10}$. vnius partis rectæ A B. Eademque ratio est de cæteris. Sed commodius hunc vsum nobis præstabit instrumentum partium supra constructum. Eius enim beneficio ex quauis recta abscindemus non solum quotcunque decimas, sed etiam centesimas, decimasnonas, nonagesimas octauas, & sic deinceps, vsque ad dimidiatam partem. Nam si velimus $\frac{3}{100}$. alicuius lineæ, capiemus ei lineæ interuallum inter 100. & 100. æquale. Circinus namq. extensus inter 3. & 3. dabit $\frac{3}{100}$. quæsitas. Ita quoq. circini pedes inter 50. & 50. dabunt $\frac{50}{100}$. id est, $\frac{1}{2}$. Rursus pedes circini inter 20, & 20. dabunt $\frac{20}{100}$. hoc est, $\frac{1}{5}$. & sic de cæteris, vt fusius in vsu prædicti instrumenti partium cap. 1. exposuimus.

Quo modo ex data linea auferendæ sint quotcunque partes decimæ vel aliæ partes.

PROBLEMATA VARIA Triangulorum rectilineorum.

CAPVT III.



ERTIO loco præmissuros nos polliciti sumus varia problemata triangulorum rectilineorum, vt & latera eorum, atque anguli ex quibusdam datis, & cognitis promptè, atque expedite, cum id res postulauerit, possint erui: quod hoc tertio capite exequemur. Priori autem loco de triangulis rectangulis: posteriori vero de obliquangulis agemus. In margine porrò adscripsimus propositiones nostri tractatus triangulorum rectilineorum, in Theodosio nostro editi, in quibus problemata hæc demonstrantur, vt studiosi intelligant, vnde eorum demonstrationes, quando libuerit, petere debeant.

TRIAN-

TRIANGVLORVM RECTILINEORVM Rectangulorum problemata.

I. PROPORTIONES LATERVM

Ex datis omnibus angulis cuiusuis trianguli patefacere.

1. Triang. rectil. *Singulis lateribus adscribantur sinus angulorum oppositorum. Latera enim easdem proportiones habent, quæ inter sinus angulorum lateribus oppositorum reperiuntur.*

II LATVS

Ex base, & alterutro angulorum acutorum, ac proinde & altero, notum efficere.

2. Triang. rectil.

Vt sinus totus.	*ad basem*	*Ita sinus anguli lateri quæsito oppositi*	*ad latus quæsitũ in partibus basis.*

III. LATVS

Ex base, & altero latere cognoscere.

3. Triang. rectil.

Vt basis	*ad sinum totum.*	*ita datum latus.*	*ad sinum anguli dato lateri oppositi.*

Deinde, sumpto complemento anguli inuenti pro reliquo angulo.

Vt sinus totus	*ad basem*	*Ita sinus anguli, qui lateri quæsito opponitur,*	*Ad latus quæsitum in partibus basis, & alterius lateris.*

IIII. LATVS

Ex altero latere, & alterutro angulo acuto, ac proinde & altero, eruere.

2. Triang. rectil.

Vt sinus totus	*ad latus datum.*	*Ita tangẽs anguli quæsito lateri oppositi*	*Ad latus quæsitũ in partibus dati lateris*

Vel

2. Triang. rectil.

Vt sinus anguli dato lateri oppositi.	*ad latus datum.*	*Ita sinus alterius anguli.*	*ad latus quæsitum in partibus dati lateris.*

V. BASEM

Ex vno latere, & vno angulo acuto, ac proinde & altero, inuestigare.

Vt

Vt ſinus totus *ad latus datum:* *Ita ſecans angulo dato lateri adiacentis.* *Ad baſem in partibus lateris dati.* 2. Triang. rectil.

Vel

Vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti *ad ſinum totum* *Ita latus datum* *Ad baſem in partibus lateris dati.* 2. triang. rectil.

VI. BASEM

Ex vtroque latere perſcrutari, vna cum angulis acutis.

Vt latus alterutrum datum *ad ſinum totum:* *Ita alterum latus datū* *ad tangētem anguli huic alteri lateri oppoſiti.* 3. Triang. rectil.

Deinde, ſumpto complemento anguli inuenti pro reliquo angulo,

Vt ſinus totus *ad latus alterutrum datum:* *ita ſecans anguli accepto lateri adiacentis* *ad baſem in partibus lateris dati.*

VII. ANGVLVM

Ex baſe, & vno latere inquirere.

Vt baſis *ad ſinum totum* *ita latus datum* *ad ſinum anguli dato lateri oppoſiti.* 3. Triang. rectil.

Complementum anguli inuenti dabit alterum angulum.

VIII. ANGVLVM

Ex vtroque latere reddere cognitum.

Vt latus alterutrum *ad ſinum totum:* *ita alterum latus datū* *ad tangentē anguli huic alteri lateri oppoſiti* 3. triang. rectil.

Complementum anguli inuenti dabit alterum angulum.

TRIANGVLORVM RECTILINEORVM obliquangulorum Problemata.

IX. SEGMENTA LATERIS A Perpendiculari facta

Ex datis tribus lateribus cognoſcere.

Vt

9. triang. rectil.	*Vt latus, in quod cadit perpendicularis*	*ad summam aliorum duorum laterum*	*ita differentia eorũdẽ duorũ laterum*	*ad quartũ quendã numerum.*

Et si quidem quartus numerus inuentus minor fuerit latere, in quod cadit perpendicularis, auferendus is erit ex illo latere. Semissis enim reliqui numeri dabit minus segmentum, quod ex toto latere subductum relinquet segmentum maius.

Si vero quartus numerus inuentus maior fuerit latere, in quod cadit perpendicularis, auferendum erit hoc latus ex illo numero. Semissis enim reliqui numeri dabit segmentum minus, exterius videlicet inter perpendicularem, & angulum obtusum: quod additum eidem lateri conflabit aliud segmentum maius inter perpendicularem, & angulum acutum.

latus in quod cadit perpendic. 21.
Summa a[illegible] 27
Differentia [illegible] 7
21. 27. 7
semissis 6 [illegible]

X. LATERA DVO

EX tertio latere, & duobus quibusuis angulis, ac proinde omnibus tribus, cum tertius sit aliorum complementum ad semicirculum, hoc est, ad grad. 180. inuenire.

10. triang. rectil.	1 *Vt sinus anguli dato lateri oppositi*	*ad latus datum:*	*ita sinus alterutrius reliquorũ angulorum*	*ad latus huic angulo oppositum.*

Rursus

1. triang. rectil.	*Vt sinus anguli dato lateri oppositi.*	*ad latus datum:*	*ita sinus tertij anguli*	*ad latus huic tertio angulo oppositum.*

2 IN Isoscele vnius tantum lateris inuentione opus est, cum vnum datum sit cum angulis. In æquilatero vero ttangulo, si vnum latus datum sit, erunt & reliqua illi æqualia, data.

XI. LATVS

EX duobus reliquis lateribus, & duobus quibusuis angulis, ac proinde omnibus tribus, cum tertius sit aliorum complementum ad semicirculum, id est, ad grad. 180. addiscere.

10. triang. rectil.	*Vt sinus anguli alterutri lateri dato oppositi*	*ad latus oppositum datum:*	*ita sinus aguli quæsito lateri oppositi*	*ad latus quæsitum.*

XII. LATVS

EX duobus lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso colligere.

Vt

1 *Vt sinus totus*	*ad secantem complementi arcus, qui semissi aggregati datorum laterum ad sinus reuocatorum, vt sinui, debetur:*	*Ita differentia inter eã semissem, & alterutrum datorum laterum ad sinus reuocatorũ*	*ad quartum quendam numerum.*	Problema 17. triang. sphæric.

Latera data ad sinus reuocabuntur, si vtrumque multiplicetur per 10. vel 100. vel 1000. &c. ita vt maioris lateris numerus habeat tot figuras, quot continentur in maioribus sinubus tabulæ sinuum, nimirum 5. si sinus totus statuatur 100000. vel 7. si sinus totus ponatur 10000000.

Deinde

Vt sinus totus	*ad tangẽtem semissis arcus, qui detracto dato angulo ex semicirculo relinquitur:*	*ita quartus numerus inuentus*	*ad tangentem differentiæ inter semissẽ eiusdem arcus, & alterutrũ angulorum non datorum.*

Hæc autem tangens hoc etiam modo inuenietur, qui priori præferendus videtur.

2 *Vt semissis aggregati duorum laterum datorum.*	*ad tangentem semissis arcus, qui detracto dato angulo ex semicirculo relinquitur:*	*ita differentia inter semissem aggregati duorum datorũ laterum, & utrũlibet laterum*	*ad tangentem differentiæ inter semissem arcus prædicti, & alterutrũ angulorũ nõ datorũ*	Alio modo qui priori præferẽdus videtur.

Arcus huius tangentis inuentæ additus ad semissem eiusdem arcus (est autem hic arcus summa duorum angulorum non datorum, nimirum dati anguli complementum ad semicirculum, hoc est, ad grad. 180.) dabit maiorem angulum non datum, qui videlicet maiori lateri dato opponitur: ex eadem vero semisse detractus relinquum faciet minorem angulum non datum, qui nimirum lateri minori dato opponitur.

Post hæc.

Vt sinus vtriuslibet anguli inuenti	*ad latus oppositum:*	*ita angulus datus*	*ad latus oppositũ quod quæritur.*	1. triang. rectil.

Itaque antequam tertium latus inueniatur, disquirendi prius sunt reliqui duo anguli: qui commodius videntur posteriori via Num. 2. exposita indagari, quam priori illa ratione Num. 1. explicata.

3 Si duo latera sint æqualia; *a* erunt reliqui duo anguli æquales. Semissis ergo arcus, qui detracto angulo dato ex semicirculo relinquitur, dabit vtrumque, &c. *a 5. primi.*

XIII. LATVS

EX duobus lateribus, & angulo vni eorum opposito (si modo constet species anguli alteri lateri dato oppositi, quando datus angulus acutus est) exquirere.

13. triang. rectil. 1 *Vt latus datum dato angulo oppositum ad sinum anguli dati: ita alterum latus datũ, ad sinum anguli huic alteri lateri oppositi.*

Hic sinus inuentus dabit angulum alteri dato lateri oppositum, si acutus fuerit: (erit autem semper acutus, quando datus angulus est obtusus) si vero fuerit obtusus, arcus sinus inuenti ex semicirculo demptus, reliquum faciet eum angulum: Propterea quando datus angulus est acutus, oportet dari huius alterius speciem, vt sciamus, num acutus sit, vel obtusus. Summa autem horum angulorum ex semicirculo subtracta relinquet tertium angulum quæsito lateri oppositum. Ergo.

1. triang. rectil. *Vt sinus dati anguli ad datum latus ei oppositum; ita sinus tertij anguli inuenti quæsito lateri oppositi. ad latus quæsitũ.*

a 5 primi. 2 Si duo latera data sint æqualia: a erit angulus alteri dato lateri oppositus, dato angulo æqualis.

XIIII. ANGVLOS DVOS

EX duobus lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso, reperire.

Inuenientur ex ijs, quæ data sunt, duo anguli, vt in priori parte problematis 12. dictum est: si nimirum inquiratur tangens differentiæ inter semissem arcus, qui detracto angulo dato ex semicirculo relinquitur, & alterutrum angulorum, qui quæruntur, &c. quæ quidem tangens duobus modis inuenta est in priori parte problematis 12. in quo latus proponitur inuestigandum ex duobus lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso. Quod vt fieret, inuenti prius fuerunt alij duo anguli, qui in hoc problemate 14. quæruntur.

XV. ANGVLOS DVOS

Ex duobus lateribus, & angulo vni eorum opposito (si modo constet species anguli alteri lateri dato oppositi, quando datus angulus acutus est) expiscari.

Hic etiam adhibenda est prior operatio problematis 13. in quo latus opponitur inquirendum ex ijsdem datis: quod vt fieret, inuenti prius fuere reliqui duo anguli, qui in hoc problemate 15. indagandi proponuntur.

XVI. ANGVLOS OMNES TRES

EX tribus omnibus lateribus peruestigare.

1. Ducta

1 Ducta ad maximum latus perpendiculari ex angulo opposito 2 (vt nimirum perpendicularis semper intra triangulum cadat) inueniantur per problema 9. segmenta duo maximi lateris facta à perpendiculari. Deinde. 11. triang. rectil.

Vt minimũ latus	*ad sinum totum:*	*ita minus segmentum maximi lateris*	*ad sinum complementi anguli medio lateri oppositi.*	1. triang. rectil.

Rursus.

Vt medium latus	*ad sinum totum:*	*ita maius segmentum maximi lateris*	*ad sinum complementi anguli medio lateri oppositi.*	1. triang. rectil.

Inuentis duobus angulis ad maximum latus, qui medio lateri, & minimo opponuntur; si eorum summa ex semicirculo dematur, reliquus fiet tertius angulus lateri maximo oppositus.

2 In Isoscele, ducta perpendiculari ad basem *a*, quam bifariam secabit, Schol. 26. lib. 1. Eucl.

Vt alterum laterum æqualium	*ad sinum totum:*	*ita semissis basis*	*ad sinum complementi vnius angulorum æqualium ad basem.*

Summa duorum angulorum æqualium inuentorum ex semicirculo detracta, reliquum faciet tertium angulum.

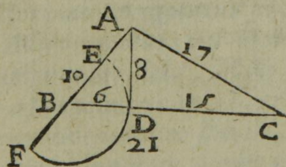
3 IN æquilatero triangulo dabuntur anguli, etiamsi latera non dentur, cum quilibet gradus 60. tertiam videlicet partem duorum rectorum, vel duas tertias partes vnius recti, complectatur.

XVII. PERPENDICVLAREM IN LATVS quodcunque ex angulo opposito cadentem

EX tribus omnibus lateribus efficere notam.

Per problema 9. inquirantur segmenta lateris facta à perpendiculari. Deinde differentia inter vtrumuis segmentum, & latus adiacens ducatur in summam eiusdem segmenti, & lateris adiacentis. Radix namque quadrata numeri producti perpendicularem quæsitam indicabit.

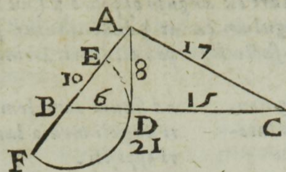
In triangulo enim ABC, sit AB, 10. AC, 17. & BC, 21. inuestigandaq. sit perpendicularis AD. Per problema 9. reperietur segmentum BD, 6. & CD, 15. Differentia inter BD, & AB, est 4. quæ ducta in 16. summam rectarum BD, & AB, faciet 64. cuius radix quadrata 8. dat perpendicularem AD. Quod quia in nostro tractatu triangulorum rectilineorum demonstratum non est, demonstro hoc proposito Theoremate.



17 / 15 / 32 / 2 / 64 / radix 8.

10 / 6 / 16 / 4 / 64 / radix 8

Theorema.



In triangulo rectangulo rectangulum sub differentia basis, & alterutrius lateris circa rectum angulum, & sub summa basis, & eiusdem lateris, æquale est quadrato alterius lateris circa angulum rectum.

Nam in triangulo rectangulo ABD, cuius angulus D, rectus, si ex B, per D, semicirculus describatur EFD, erit AE, differentia inter basem AB, & latus BD: At AF, summa erit basis AB, & eiusdem lateris BD, cum BD, BE, BF, rectæ sint æquales. Dico igitur rectangulum sub AE, AF, æquale esse quadrato lateris AD. Recta enim AD, cum perpendicularis sit ad semidiametrum BD, a *semicirculum tanget in D.* b *Igitur rectangulum sub AE, AF, quadrato tangentis AD, æquale erit, quod erat demonstrandum.*

a coroll. 16. ter.
b 36. ter.

FINIS LIBRI PRIMI.





GEOMETRIAE PRACTICAE
LIBER SECVNDVS.

Linearum Rectarum per Quadrantem Astronomicum Dimensionem explicans,





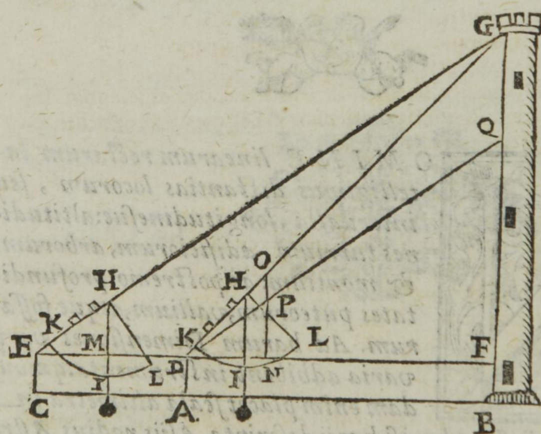
OMINE linearum rectarum intelligimus distantias locorum, seu interualla, longitudinesue: altitudines turrium, ædificiorum, arborum, & montium: ac postremo profunditates puteorum, vallium, atque fossarum. Ad harum Dimensiones varij varia adhibent instrumenta: quibusdam enim placet scala altimetra in dorso Astrolabij, seu planisphærij descripta. Alijs radius Astronomicus Gemmæ Frisij, vel radius dictus Latinus, quod à Domino Latino Vrsino nobili Romano excogitatus sit; vel baculus Iacob: Alijs annulus Astronomicus, vel Holometrum; Alijs denique alia instrumenta arrident. Mihi vero præ cæteris probatur Quadrans Astronomicus in 90. gradus distributus: & Quadratum Geometricum tum stabile, tum pendulum, cuius duo latera in certas quasdam partes æquales sint diuisa. Hoc autem 2. lib. qua ratione per Quadrantem

Astro-

Astronomicum Dimensio linearum rectarum perficiatur, docebimus. Quæ ratio vt intelligatur, in promptu, & ad manum esse debent tabulæ sinuum, Tangentium, atque secantiũ in nostro Theodosio, & in aliorum auctorum libris descriptæ, vnde petendæ erunt. Superuacaneum enim esse duximus, easdem hic repetere, ne opus in maiorem formam excrescat.

DISTANTIAM in plano, siue accessibilis ea sit, siue inaccessibilis, per duas stationes in eodem plano factas per Quadrantem metiri, quando in eius extremo erecta est altitudo aliqua perpendicularis, etiamsi infimum eius extremum non cernatur. Atque hinc altitudinem quoque ipsam elicere.

PROBLEMA I.



SIT distantia, siue longitudo inuestiganda, A B, in plano C B, erectaque sit in extremo B, altitudo quæpiam perpendicularis B G, licet extremum B, non appareat. Statura mensoris sit D A, ab oculo ad pedes vsque. Ne autẽ hæc statura mutetur, sed eadẽ sẽper maneat, recte feceris, si pro ea statura baculum eidem æqualem accipias, ad cuius extremum oculum applices. Ducta autem cogitatione per D, ipsi C B, parallela E F, fiat prima statio in D, Secunda vero in E, puncto remotiore: sitque recta D E, quæ differentia stationum dicitur, nota secundum aliquam mensuram vulgarem. Deinde dirigatur latus quadrantis H K, in quo sunt pinnacidia, versus fastigium G, ita vt oculus in D, positus per vtriusque pinnacidij foramina, fastigium G, videat, libere pendente perpendiculo H I: diligenterque per ea, quæ cap. 2. libr. 1. Num. 7. & 10. tradita sunt, notetur in gradibus, ac minutis angulus G D F, quem arcus I L, in Quadrante manifestabit, complemen-

Differentia stationum.

plementũ videlicet arcus IK, Cum enim filum perpendiculi HI, sit ad DF, rectum, erit angulus GDF, complementum anguli DHI, æqualis nimirum angulo IHL, qui eiusdem anguli DHI, complementum etiam est. Atque hunc angulum GDF, angulum obseruationis dicemus. Eodem modo obseruetur in secunda statione angulus GEF, per radium visualem ab oculo, & per pinnacidia Quadrantis ad fastigium G, directum. Sumptis autem EM, DN, æqualibus, erigantur perpendiculares MN, NO, (in figura conincidit MH, cum filo perpendiculi; quod nihil refert.) Si igitur EM, DN, statuantur sinus toti, erunt MH, NO, Tangentes angulorum obseruationum E, & D. Ducta quoque DQ, ipsi EG, parallela secante NO, in P, *a* erit angulus NDP, angulo E, æqualis. Cum ergo duo anguli N.D, trianguli NDP, duobus angulis M, E, trianguli MEH, sint æquales, (est enim & rectus N, recto M, æqualis) lateraque DN, EM, quibus adiacent, æqualia; *b* erunt latera NP, MH, æqualia: ac proinde OP, differentia erit inter Tangentes angulorum obseruationum. *c* Quia vero est, vt OP, ad PN, ita GQ, ad QF: *d* Et vt GQ, ad QF, ita ED, ad DF; erit quoque vt OP, differentia Tangentium angulis obseruationum respondentium ad PN, siue ad HM; Tangentem remotioris stationis, ita ED, differentia stationum ad DF, distantiam quæsitam. Quocirca si fiat,

Angulus obseruationis.

a 29. *primi*

b 26. *primi.*

c *schol.* 4. *lib.* 6.

d 2. *sext.*

Vt OP, differentia inter Tangentes angulorum obseruationum.	*ad PN, vel HM, Tangentem minorem:*	*Ita ED, differentia stationum nota in mensura aliqua vulgari*	*ad aliud; hoc est, ad DF,*

Distantiæ inuẽtio per tangentes.

prodibit distantia DF, quæsita, siue AB, in eadem mensura differentiæ stationum: cui si adijciatur differentia stationum ED, cognita etiam fiet distantia EF; vel CB, à remotiori statione.

ALITER

2 POSITO sinu toto GF, erit DF, Tangens anguli DGF, complementi anguli obseruationis GDF. quem angulum DGF, indicat arcus Quadrantis IK, à perpendiculo versus oculum, *e* cum angulus DHI, æqualis sit angulo DGF, externus interno. Eodem modo EF, Tangens erit anguli EGF, complementi alterius anguli obseruationis GEF. At ED, differentia inter eas Tangentes existet. Si igitur fiat,

e 29. *primi.*

vt ED, differentia inter Tangentes angulorum, qui cõplemẽta sunt angulorũ obseruationũ,	*ad DF, Tangentem complementi anguli obseruationis GDF, in propinquiore statione, hoc est, ad Tangentem minorem:*	*Ita ED, differentia stationum nota in aliqua mẽsura vulgari*	*ad aliud hoc est, ad DF,*

Distantiæ inuentio alia per tangentes.

procreabitur distantia minor quæsita DF, vel AB, in eadem mensura differentiæ stationum: cui si addatur differentia stationum ED, nota quoque fiet distantia maior EF.

a 4 *sexti.*

3 Rursus *a* si fiat,

Vt DN, si nus totus	*ad NO, Tangentem anguli GDF, in propinquiore statione:*	*Ita DF, distātia inuenta minor*	*ad aliud, hoc est, ad FG;*

Altitudinis inuētio per tangentes.
b 4. *sexti.*

Inuenietur altitudo FG, in mensura distantiæ inuentæ DF, minoris, cui si addatur mensuris statura FB, cognita erit tota altitudo BG. Item *b* si fiat,

Vt EM, si nus totus	*ad MH, tāgentē anguli GEF, in remotiore statione:*	*ita EF, distātia inuenta maior*	*ad aliud, hoc est, ad FG,*

Altitudinis inuentio alia per tangentes.

reperietur eadem altitudo FG, in mensura distantiæ inuentæ EF, maioris, cui si addatur statura mensoris FB, nota fiet tota altitudo B G.

ALITER

c 32. *primi.*

d 10. Triāg. rectil.

4 SI per solos sinus idem expedire lubeat, erit operatio aliquanto longior. Primum enim inuenienda est vtraque hypotenusa E G, D G, in aliqua mensura nota, hoc modo. *c* Quoniam angulus GDF, æqualis est duobus angulis E, EGD: si angulus E, in remotiore statione obseruatus dematur ex angulo GDF, in propinquiore statione deprehenso, reliquus fiet angulus E G D, differentia nimirum inter duos angulos obseruationum. *d* Quod si fiat,

Vt sinus anguli EGD, differentiæ inter angulos duos obseruationum	*ad ED, differētiam stationum notam:*	*Ita sinus anguli DEG, vel. Ita sinus anguli EDG, complemēti anguli GDF, ad duos rectos,*	*ad D G, vel ad E G,*

Inuentio Hypotenusarum.
e 10 triang. rectil.

producetur tam DG, quam EG, nota in partibus differentiæ stationum. Igitur *e* si fiat,

Vt sinus totus anguli recti F,	*ad hypotenusam DG, proxime inuētā*	*Ita sinus anguli DGF, complementi anguli obseruationis in propinquiore statione*	*ad DF,*

Distātiæ inuentio per solos sinus.
f 10. triang. rectil.

nota fiet distantia D F, cui si adijciatur differentia stationum E D, cognita etiam erit longior distantia EF. quam inuenies quoque, *f* si fiat,

Vt sinus totus anguli recti F,	*ad hypotenusam EG, nuper inuētam*	*Ita sinus anguli EGF, complementi anguli obseruationis in remotiore statione*	*ad EF.*

g 10. triang. rectil.
Altitudinis inuētio per solos sinus.

Altitudo autem F G, per solos sinus inuenietur, *g* si fiat,

Vt sinus totus anguli recti F,	*ad hypotenusam EG, vel ad hypotenusam DG:*	*Ita sinus anguli E, obseruati minoris, vel Ita sinus anguli GDF, obseruati maioris*	*ad FG, ad FG.*

5 PER Quadrantem stabilem eodem modo dimensio fit: solum anguli obser-

obſeruationũ in duabus ſtatio nibus hac ratione inueſtiga n tur. Collocato Quadrante ſupra baſem aliquam planam Horizonti æquidiſtantem, ita vt rectus ſit ad Horizontem. quod beneficio alicuius perpẽdiculi efficies. Collocato, inquam, hoc modo Quadrante, eleua dioptram, donec per foramina pinnacidiorum faſtigium G, videas. Ita enim in propinquiore ſtatione D, angulus obſeruationis erit GDF; In remotiore vero G E F. Vtrumque autem metietur arcus Quadrantis inter rectam EF, & dioptræ lineam fiduciæ. Reliqua omnia fient, ſicut in Quadrante pendulo, vt figura demonſtrat. Solum ad altitudinem F G, inuentam adijcienda erit altitudo baſis; cui impoſitus eſt Quadrans, non autem ſtatura menſoris, niſi altitudini baſis ſit æqualis.

G Q O H P E M D N F

6 IAM vero ſine numeris, id eſt, ſine multiplicatione ac diuiſione numerorum omnia hæc explorari poterunt, (quod ijs, qui parum in numeris, & vſu ſinuum, Tangentium, ac ſecantium exercitati ſunt, pergratum fore non dubito.) hoc modo. In charta aliqua, vel plano conſtruatur figura illi omnino ſimilis, quam ab oculo vſque ad altitudinem ſupra concepimus eſſe conſtructam; quod ita fiet. Ex inſtrumento partium cap. 1. ſuperioris libri fabricato, vel (ſi inſtrumentum non adſit) ex aliqua recta in particulas plurimas æquales diuiſa capiantur circino tot particulæ æquales, quot palmi, vel pedes inter duas ſtationes comprehenduntur; transferaturque interuallum illud circini in rectam quamcunque ex E, in D: atque in D, & E, omni adhibita diligentia, anguli obſeruationum GDF, GEF, primæ, & ſecundæ ſtationis fiant: Punctumque G, in quo rectæ DG, E G, conueniunt, diligenter notetur, (Ne in hoc puncto erretur, propter obliquam ſectionem, docebimus in ſequenti lemmate, quo pacto exquiſitiſſime deprehendi poſſit. Niſi enim hoc fiat, menſuræ non inuenientur accurate.) ex quo perpendicularis demittatur GF. Figura ita conſtructa, ſi rectæ DF, EF, FG, DG, EG, per circinum tranſportentur in latus 100. partium prædicti inſtrumenti, vel in dictam rectam in plurimas partes æquales diuiſam, illico apparebit, quot particulæ inter pedes circini includantur. Atque tot palmos, aut pedes quælibet illarum rectarum complectetur, quot particulæ in earum interuallis deprehenſæ fuerint.

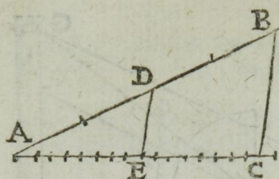
Problema hoc 1. quo pacto ſine numeris ab ſoluatur.

G E D F

ALITER

7 IDEM aſſequentur via quadam generali, quæ in omnes dimenſiones quadrat, videlicet. Fiat angulus quicunque BAC. Deinde ſumpta verbi gratia, in exemplum regula trium Num. 1. huius propoſitionis, accipiatur primæ quantitati O P, (hoc eſt, differentiæ Tangentium angulo-

Problema hoc 1. qua ratione aliter sine numeris absoluatur.



rum obseruatorum) æqualis; vel si nimis parua est, multiplex A D. (Nos duplam accepimus.) Item secundæ P N, (hoc est, Tangenti minoris anguli) æqualis, vel æque multiplex cum A D, nimirum D B. Post hæc ex instrumento partium capiantur tot particulæ AE, quot palmi, aut pedes in ED, differentia stationum continentur. Ducta autem recta DE, agatur ei parallela BC. Nam quot partes instrumenti partium includet interuallum EC, tot palmos, aut pedes distantia DF, complectetur; *a* cum quatuor quantitates AD, DB, AE, EC, proportionales sint.

a 24. *Sexti.*

EODEM modo procedes in alijs exemplis, hoc obseruato, vt quando sinus alicuius anguli in regula trium reperitur, accipias ex tabula sinuum sinum, abiectis quinque figuris, vt sinus totus sit 100. Verbi gratia. In vltimo exemplo Num. 4. recta AD, sumenda esset æqualis 100. particulis instrumenti partium, nimirum sinui toti. At D B, æqualis hypotenusæ E G, vel DG, in figura Num 6. Et A E, si angulus E, est grad. 30. Min. 15. æqualis $50\frac{4}{10}$. ferme particulis: quia tantus est sinus grad. 30. Min. 15. Vel si angulus G D F, est grad. 53. Min. 20. accipienda esset A E, æqualis particulis $80\frac{2}{10}$. fere. Ita enim interuallum E C, dabit tot palmos, aut pedes rectæ FG, quot particulæ in eo comprehenduntur. Et sic de cæteris.

QVANDO autem tota regula 100. partium est nimis longa, sumi potest pro sinu toto quoduis interuallum inter 100, & 100. dummodo respectu huius sinus totius accipiantur postea sinus, vt cap. 1. lib. 1. Num. 12. declarauimus.

POTERIS autem nonnunquam ordinem immutare, ponendo nimirum secundam quantitatem DB, in recta A C; & tertiam A E, in recta D B, prout videlicet id expedire cognoueris ad parallelas DE, BC, ducendas.

L E M M A.

DATIS duabus rectis ad inuicem inclinatis, punctum, in quo conueniant, inuenire.

QVOD hic proponitur, demonstratum à nobis fuit lemmate 13. lib. 1. nostri Astrolabij pluribus vijs. Sed quia eius insignis est vtilitas in puncto concursus duarum rectarum exquirendo, demonstrabimus illud ipsum hoc loco paulo aliter. Sint ergo duæ rectæ A B, C D, oblique se in concursu B, secantes. Ex quotlibet punctis E, F, G, vtcunque in altera earum assumptis describantur versus alteram ad quodcunque idem interuallum arcus H I, KL, M N, ex quibus



arcus quadrante minores abscindantur in I, L, N, pūctis, per quæ ex centris rectæ egrediantur secantes CD, in O, P, Q. Sumptis deinde in EI, producta ipsi EO, tot partibus æqualibus vsque ad R, quot satis esse uidebuntur, vt recta ex R, versus concursum ducta non valde oblique ipsas rectas secet, accipiantur in FL, GN, productis totidem partes ipsis FP, PQ, æquales vsque ad S, T. Dico tam rectam RS, quam RT, & quā ST, in punctum B, concursus cadere, ita vt puncta R, S, T, B, in vna recta linea iaceant. a *Quoniam enim anguli E, F, G, æquales sunt,* b *erunt rectæ ER, FS, GT, parallelæ.* c *Cum ergo ER, FS, GT, easdem proportiones habeant, quas EO, FP, GQ, hoc est,* d *EB, FB, GB, habent,* e *cadent rectæ RS, RT, ST, in punctum B, quod est propositum.* a 27. Tertij. b 28. Primi c 15. Quin. d 4. Sexti, et permutādo. e schol. 4. sexti.

HOC ergo lemma si adhibeatur, satis exquisite in superiore figura Num. 6. punctum concursus G, deprehendetur, proindeque mensure rectarū, quas sine numeris inuenire docuimus, non multum a vero aberunt.

8 *VERVM commode obliquam illam sectionem in concursu G, vitabimus, si figuram hoc alio modo construemus, Fiat in figura Num 6. angulus rectus EFG, & in quolibet puncto G, vbi concursum esse volumus, constituantur anguli FGD, FGE, æquales complementis angulorum obseruationum. Ita enim DE, respondebit differentiæ stationum, &c Quocirca si cogitetur DE, secta in tot partes æquales, quot palmi, vel pedes in differentia stationum fuerunt assumpti, cognoscemus per ea, quæ ad finem Num. 1. cap. 1. lib. 1. docuimus, quot ex ijs partibus in distantijs DF, EF, & in altitudine FG, atque hypotenusis GD, GE, comprehendantur. Atque hoc modo punctum concursus G, dubium, aut incertum esse non potest, cum illud ante omnia elegerimus.* Quo pacto in fig. Num. 6. obliqua sectio in puncto concursus G, vitetur.

SCHOLIVM.

Vt etiam pro tyronibus semel explicemus, quid per nostrum loquendi modum intelligamus, cum dicimus verbi gratia, Num. 1. huius problematis, Fiat.

Vt OP, differentia inter tangentes angulorum obseruationum	*ad PN, vel HM, Tangētē minorem.*	*Ita ED, differentia stationum*	*ad DF:*

Sciendum est, nos hoc modo redigere opus ad terminos regulæ trium. Quapropter si iuxta tenorem regulæ numerus in tertio loco positus ducatur in eum, qui secundum locum occupat, hoc est, differentia stationum in proposito exemplo multiplicetur per Tangentem minorem, productusque numerus per eum, qui in primo loco collocatur, id est, per differentiam Tangentium, diuidatur: (nisi quando primus numerus est sinus totus. Tunc enim diuisio non fit, sed ex producto quinque figuræ abijciuntur, vel septem, prout sinus totus statuitur 100000. vel 10000000.) procreabitur in quotiente quartus numerus, qui quæritur, nimirum distantia DF. Eademque est ratio de cæteris. Altitudinis inuētio per vnicam stationem, quādo distantia nota est.

COROLLARIVM I.

ITAQVE quando distantia à loco mensoris vsque ad altitudinem igno-

a 4. Triang. rectil. ignotam cognita est, inuenietur altitudo per vnicam stationem. *a* Si fiat.

Vt sinus totus | *ad Tangentem anguli obseruationis:* | *Ita distantia nota* | *ad altitudinem.*

Hoc enim demonstratum est Num. 3. huius problematis 1. tam per angulum obseruationis G D F, & distantiam D F, quam per angulum obseruationis GEF, & distantiam EF. Vtroque enim modo inuenta est altitudo G F.

COROLLARIVM. II.

Altitudo montis quo pacto inuestigetur.

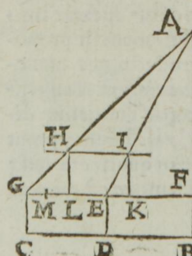
PERSPICVVM etiam est, si G, sit cacumen alicuius montis, nos per hoc problema 1. eius altitudinem posse metiri per duas stationes D, E, in plano factas: si nimirum prius inuestigetur recta D F, vel E F, ab oculo mensoris vsque ad perpendicularem G F, quæ à cacumine G, in planum Horizontis cadit, etiamsi eius extremum F, non videamus.

ALTITVDINEM inaccessibilem, quando distantia à loco mensoris ad basem altitudinis ignota est, per duas stationes in plano factas, per quadrantem dimetiri. Atque hinc distantiam quoque ipsam eruere, etiam si extremus eius terminus non cernatur.

PROBLEMA II.

1 SIT inquirenda altitudo A B, siue ea turris sit, siue mons, siue aliquid aliud, licet non cernatur eius perpendiculi infimus terminus B, vt in omni monte contingit: planum autem, cui perpendicularis est altitudo, sit C B. Statura mensoris D E. Ducta autem cogitatione per E, ipsi CB, parallela G F, fiat prima statio in D, propinquior, secunda vero in G, remotior, vt differentia stationum sit G E. Deinde per radios visuales EA, GA, ad verticem A, directos diligenter obseruentur anguli AEF, AGF, siue per quadrantem pendulum, vt Num. 1. problematis præcedentis docuimus, siue per stabilem, vt Num. 5. eiusdem problematis præcepimus. Eodem enim semper modo dicti anguli obseruantur, quando è loco inferiori altitudinis fastigium inspicitur. Cogitetur quoque ducta H I, ipsi G F, parallela, *b* vt demissæ perpendiculares H L, I K, in parallelogrammo L I, sint æquales, pro sinubus totis: quorum tangentes sunt EK, G L, angulis, I, H, qui complementa sunt angulorum obseruationum E, G, debitæ. Et quoniam angulus GAF, maior est angulo EAF, *c* estque priori angulus GHL, & posteriori angulus E I K, æqualis: erit quoque GHL, maior quam EIK, ideoque tangẽs GL, maior Tangente EK, quòd sinus toti H L, IK, æquales sint. Abscindatur L M, ipsi E K, æqualis, vt G M, sit differentia Tangentium GL, EK, *d* Et quia est vt GL, ad LH, ita GF, ad FA, erit permutando, vt GL, ad GF, ita LH, vel IK, ad FA; *e* Vt autem

b 34. prim



c 29. primi.

d 4. sexti.
e 4. sexti & permutãdo

I K, ad

IK, ad FA, ita quoque est EK, ad EF. Igitur erit, vt tota GL, ad totam GF, ita EK, vel LM, ex GL, ablata, ad EF, ex GF, ablatam: *a* ac proinde erit etiã vt GM, ex GL, reliqua ad GE, ex GF, reliquam, ita tota GL, ad totam GF, hoc est, *b* ita LH, sinus totus, ad FA. Quamobrem si fiat,

a 19. quinti

b 4. sexti & permutãdo.

Vt GM, differentia Tangentium GL, EK, complementorum angulorum obseruationum	*ad GE, differentiam stationum.*	*ita LH, sinus totus.*	*ad FA,*

inuenta erit altitudo FA, in partibus differentiæ stationum, cui si adijciatur FB, statura mensoris, tota altitudo AB, nota euadet.

Altitudinis inuẽtio per Tangentes.

2 ITEM si fiat.

Vt GM, differentia Tangentium complementorum angulorum obseruationum.	*ad GE, differentiam stationum:*	*ita GL, Tangens cõplementi anguli obseruationis in remotiori statione*	*ad GF,*

efficietur nota GF, distantia maior, quandoquidem paulo ante demonstratum est, esse GM, ad GE, vt GL, ad GF. Quod si ex GF, inuenta detrahatur GE, differentia stationum, nota relinquetur EF, distantia minor.

Distantiæ inuentio.

ALITER.

3 SI per solos sinus dimensio instituatur, inuestiganda primum erit alterutra hypotenusarum GA, EA, vel vtraque. hoc scilicet modo *c*. Quoniam angulus AEF, duobus G, GAE, æqualis est, si angulus G, in remotiore statione tollatur ex angulo AEF, in statione propinquiore, reliquus fiet angulus GAE, differentia inter duos angulos G, AEF obseruationum. *d* Ergo si fiat,

c 32. primi.

d 10. trian. rectil.

Vt sinus anguli GAE, differentiæ inter duos angulos obseruationũ	*ad GE, differentiam stationũ:*	*ita sinus anguli AGE,*	*ad AE,*
		vel	
		ita sinus anguli GEA, complementi anguli AEF, ad duos rectos.	*ad GA,*

nota fiet tam AE, quam AG, in partibus differentiæ stationum.

e Si igitur fiat.

Hypotenusarum inuẽtio.

e 10. trian. rectil.

Vt sinus totus anguli recti F,	*ad rectam EA:*	*ita sinus anguli AEF, in propinquiore statione,*	*ad AF,*
	vel	*vel*	
	ad rectam GA, proxime inuẽtã	*ita sinus anguli AGF, in remotiore statione*	*ad AF,*

gigne-

Altitudinis inuētio per solos sinus.

gignetur altitudo AF, & si adiungetur FB, statura mensoris, tota altitudo AB, efficietur nota.

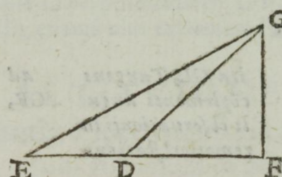
a 10. triang. rectil.

DISTANTIA autem vtraque EF, GF, per solos etiam sinus inuenietur, *a* si fiat.

Distātiæ inuentio per solos sinus.

Vt sinus totus anguli recti F.	*ad hypotenusam EA.*	*ita sinus anguli EAF, complementi anguli in propinquiore statione,*	*ad EF.*
	vel	*vel*	
	ad hypotenusam G A:	*ita sinus anguli GAF, complementi anguli in remotiore statione.*	

Problema quo pacto sine numeris soluatur.



4 SINE numerorum multiplicatione ac diuisione eadem inuestigabuntur, si illi figuræ, quam ab oculo mensoris ad altitudinem vsque concepimus esse construendam, similem omni diligentia constituamus, vt Num. 6. & 8. præcedentis problematis 1. diximus, vt manifestum, est si in ea figura Num. 6. altitudo intelligatur FG, & distantiæ FD, FE, &c. Idemque efficies per ea, quæ Num. 7. eiusdem problematis 1. tradita sunt.

COROLLARIVM I.

Distantiæ inuētio per vnicam stationē, quando altitudo nota est.

ITAQVE si altitudo fuerit nota, inuenietur distantia per vnicam stationem, *b* si fiat.

b 4. triang. rectil.

Vt sinus totus AF,	*ad Tangentem FE, complementi anguli in propinquiore statione:*	*ita altitudo nota AF,*	*ad distantiam FE,*
	vel		*vel*
	ad Tangentem FG, complementi anguli in remotiore statione:		*ad distantiam F G.*

ITEM si distantia nota fuerit, reperietur altitudo per vnicam quoque stationem, si fiat,

Vt sinus totus GF,	*ad AF, Tangentem anguli G, obseruati in remotiori statione:*	*ita GF, distantia nota*	*ad AF, altitudinem*

Vel

Vt sinus totus EF,	*ad AF, Tangentem anguli E, obseruati in statione propinquiore:*	*ita EF, distantia nota,*	*ad AF, altitudinem.*

COROLLARIVM II.

MANIFESTVM etiam est, si punctum A, sit cacumen alicuius montis,

ctis, eodem pacto inuestigari posse lineam perpendicularem AF, quæ ex cacumine in Horizontis planum demittitur: si nimirũ duæ stationes fiant in E, G.

Ex vertice montis, aut turris, in cuius summitate duæ stationes fieri possint, e quibus signum aliquod in Horizonte appareat, altitudinem ipsius montis, turrisue dimetiri. Atque hinc ipsam quoque distantiam à turris basi, vel perpendiculo montis ad signũ illud inuestigare.

PROBLEMA III.

1 SIT mons, aut turris GHNM, cuius altitudo perpendiculum EF, vel etiam latus turris GM, vel HN. Eligantur duæ stationes in G, H; & ab oculo mensoris tam in I, quam in K, posito cerni possit signum L, in Horizonte, vel plano, cui turris, aut mons insistit. Dirigatur latus Quadrantis penduli, in quo pinnacidia, versus L, diligenterque angulus K, notetur, quem arcus Quadrantis inter latus pinnacidiorum, & filum perpendiculi libere pendentis determinat. Eodemq. pacto angulus I, obseruetur. Per Quadrantem stabilem vterque obseruabitur, si vnum eius latus ad Horizontem sit rectum, (quod tum demum fiet, quando filum perpendiculi ex centro pendentis illi lateri adhærebit) & dioptra attollatur, donec per pinnacidiorum foramina signum L, cerni possit. Nam arcus inter dictũ latus, & lineam fiduciæ in dioptra angulum obseruationis metietur. Intelligatur quoque filum perpendiculi in vtroque situ Quadrantis penduli, vel latus quadrantis stabilis ad Horizontem rectũ productum vsque ad basem montis, aut turris ad M, N. Sumptis deinde rectis æqualibus KO, IP, pro sinubus totis, ducantur PQ, OR, ad IN, KM, perpendiculares, *a* quæ *a 28. primi.*

para-

parallelæ erunt plano Horizontis, hoc eſt, rectæ NL; & Tangentes angulorum obſeruationum I, K. a Ipſæ autem HN, GM, altitudini EF, æquales erũt. Et quoniã in triangulis INL, KML, anguli recti N, M, ſunt æquales, & ILN, minor quam KLM, pars toto; erit reliquus NIL, reliquo MKL, maior, ideoq. & Tangens PQ, Tangente OR, maior. Abſciſſa ergo PT, ipſi OR, æquali; b quia eſt, vt IP, ſinus totus ad PQ, Tangentem maioris anguli obſeruationis, ita IN, ad NL: erit permutando, vt IP, ad IN, ita PQ, ad NL. Eademque ratione erit, vt KO, ad KM, hoc eſt, vt IP, ad IN, c (cum KO, KM, ipſis IP, IN, ſint æquales) ita OR, hoc eſt, ita PT, ad ML; atque ideo erit, vt PQ, ad NL, ita PT, ad ML. Quia ergo eſt, vt tota PQ, ad totam NL, ita PT, ablata ad ML, ablatam, d erit quoque reliqua TQ, differentia Tangentium, ad reliquam NM, differentiam ſtationum, e (quod NM, HG, æquales ſint.) vt tota PQ, ad totam NL, f hoc eſt, vt IP, ad IN. Quamobrem ſi fiat.

a 34. primi. b 4 ſexti. c 34. primi. d 19. quinti. e 34. primi. f 4. ſexti.

Vt TQ, differentia inter Tangentes angulorũ obſeruationũ	*ad NM, vel HG, differentiam ſtationum:*	*ita ſinus totus IP,*	*ad IN,*

Altitudinis inuentio. reperietur rẽcta IN, ex qua ſi dematur IH, ſtatura menſoris, nota relinquetur HN, vel EF, altitudo quæſita. Et ſi rurſus fiat,

Vt TQ, differentia Tangentium	*ad NM, vel GH, differentiam ſtationum:*	*ita PQ, Tangens maior*	*ad NL, diſtãtiam.*

Diſtantiæ inuentio. nota fiet diſtantia NL; à qua ſi ſubtrahatur NF, vel HE, quam metiri licebit, cognita relinquetur FL, diſtantia à perpendiculo montis. Vel ſi dematur NM, differentia ſtationum, nota relinquetur diſtantia ML, à turri vſque ad L. Item g ſi fiat.

g 4. ſexti.

Vt IP, ſinus totus	*ad PQ, Tangentem maiorem:*	*ita IN, paulo ante inuenta*	*ad NL, diſtantiam,*

inuenietur rurſus diſtantia NL, &c.

2 VERVM ita eſſe TQ, differentiam Tangentium ad NM, vel HG, differentiam ſtationum, vt eſt PQ, Tangens maior ad diſtantiam NL, vt paulo ante oſtenſum eſt, facilius demonſtrabimus, ſi ducatur recta IT, quæ producta ſecet NL, in S. Nam in triangulis IPT, KOR, duo latera IP, PT, duobus lateribus KO, OR, æqualia ſunt, anguloſque continent æquales, vtpote rectos. h Igitur anguli T, R, æquales ſunt; i ideoque KL, IS, parallelæ. k Et quia ducta IK, æqualis eſt & ipſi SL, & differentię ſtationum HG, vel NM, l liquido conſtat, ita eſſe TQ, differentiam Tangentium ad SL, quæ differentiæ ſtationum IK, vel HG, æqualis eſt, vt eſt PQ, Tangens maior ad diſtantiam NL,

h 4. primi. i 28. primi. k 34. primi l ſchol. 4. ſexti.

ALITER

3 PER ſolos ſinus ita Problema efficiemus. Primum inquiremus hypotenuſas

tenuſas IL, KL, hoc modo. *a* Quoniã angulus LKV, duobus angulis LIK, ILK, æqualis eſt; ſi L I K, angulus complementi maioris anguli obſeruationis LIN, auferatur ex LKV, angulo complementi minoris anguli obſeruationis LKM, reliquus fiet angulus ILK. *b* Si ergo fiat. *a 32. primi.* *b 10. triãg. rectil.*

Vt ſinus anguli ILK, differentia inter duos angulos complementorum angulorum obſeruationum	*ad IK, differẽtiã ſtationũ:*	*Ita ſinus anguli IKL, conflati ex recto, & angulo obſeruationis minore, vel Ita ſinus anguli LIK, cõplemẽti maioris anguli obſeruationis.*	*ad I L, ad K L,*

euadet nota tam I L, quam kL, in menſura differentiæ ſtationum. *c* Igitur ſi fiat, Hypotenuſarum inuẽtio. *c 10. triãg. rectil.*

Vt ſinus totus anguli recti N,	*ad Hypotenuſã proxime inuentam IL,*	*Ita ſinus anguli ILN, complementi maioris anguli obſeruationis*	*ad IN,*

Vel

Vt ſinus totus anguli recti M,	*ad hypotenuſãKL, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli KLM, cõplemẽti minoris anguli obſeruationis*	*ad KM,*

cognita fiet altitudo IN, vel KM, ex qua ſi dematur ſtatura menſoris, altitudo quæſita relinquetur HN, vel GM, hoc eſt, EF. Altitudinis inuentio per ſolos ſinus

DISTANTIA autem vtraque NL, ML, reperietur, *d* ſi fiat, *d 10. triang. rectil.* Diſtantiæ inuẽtio per ſolos ſinus

Vt ſinus totus anguli recti N, vel M,	*ad Hypotenuſam inuentã IL, vel KL,*	*Ita ſinus anguli maioris obſeruati NIL, vel Ita ſinus anguli minoris obſeruati MKL,*	*ad NL, diſtantiam. ad ML, diſtantiam*

4 SINE numeris eædem rectæ IN, NL, IL. KL, &c. reperientur, vt in ſuperioribus: ſi nimirum (vtemur figura huius problematis, ne nouam conſtruere cogamur) ſumpta recta IK, tot partium, quot palmi, pedeſue in differentia ſtationum exiſtunt, fiant anguli VKL, VIL, complementorum angulorum MKL, NIL, obſeruationum, & concurſus L, notetur, ex quo ducatur LN, ipſi IK, parallela, & ad hanc perpendicularis in I, excitetur I N, &c. Vel ſi angulus rectus conſtituatur INL, & in aſſumpto puncto L, vbi concurſum eſſe volumus, fiat tam angulus N L I, complementi maioris anguli obſeruationis, quam angulus NLK, complementi minoris anguli obſeruationis, &c. Reliqua autem fiant, vt in problemate 1. Num. 6. & 8. dictum eſt. Idemque efficies per ea, quæ Num. 7. in eodem problemate 1. ſcripſimus. Quo pacto problema cõficiatur ſine numeris

EX VERTICE MONTIS, VEL TVRRIS per duas ſtationes in aliqua haſta erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſupra aliam exiſtat,

factas, è quibus ſignum aliquod in Horizonte videri poſsit, altitudinem ipſius montis, aut turris metiri. Atque hinc diſtantiam quoque à perpendiculo montis, vel turris vſque ad ſignum viſum cognoſcere.

PROBLEMA IIII.

1 NON poſſunt aliquando commode duæ ſtationes in ſummitate mõtis, vel turris fieri. Quare tunc ita agendum erit. Sit altitudo AB, ſupra planum B C, menſuranda ex ſummitate A. Erigatur haſta aliqua quotlibet palmorum, aut pedum. Et primum inſpiciatur ſignum C, in plano per angulum B D C; Deinde idem inſpiciatur ex loco ſuperiore haſtæ per angulum B E C. Vterque autem angulus obſeruabitur vel per quadrantem pendulum, vt in priori angulo vides, vel per ſtabilem [illegible]um dioptra, vt in poſteriori. Sumptis quoque æqualibus D F, EG, pro ſinubus totis, ducantur ad EB, perpendiculares FH, GI, pro Tangentibus angulorum obſeruationum. Ducta autem DL, ipſi EC, parallela ſecante FH, in K: *a* quoniam anguli B D L, & E, æquales ſunt, & F, G, recti, nec nõ & latera adiacentia DF, EG, æqualia; *b* erunt latera F K, GI, æqualia: atque adeo KH, differentia Tangentium. Quia vero ex ſchol. propoſitionis 4. lib. 6. Euclid. eſt, vt K H, ad FK, ita LC, ad BL: *c* Vt autem LC, ad BL, ita eſt, ED, ad BD; erit quoque vt K H, ad FK, ita ED, ad DB. Si igitur fiat,

a 29. primi

b 26. primi

c 1. ſexti

Vt KH, differentia inter Tangentes angulorũ obſeruationum	*ad FK, vel ad GI, Tangẽtem minorem:*	*Ita ED, ſpatium inter angulos obſeruationum, quod notum eſſe poteſt per aliquam menſuram,*	*ad DB,*

Altitudidis inuentio

inuenietur DB, ex qua ſi dematur portio haſtæ AD, inter altitudinis faſtigium A, & inferiorem angulum obſeruationis D, nota relinquetur altitudo propoſita AB.

EODEMQVE modo in turri eadem altitudo deprehendetur, ſi pro haſta AE, duæ feneſtræ eligantur, è quibus ſignum C, ſub ijſdem angulis videatur, vt patet. Sed tunc altitudini D B, inuentæ (ſi feneſtræ ſint D, E,) adijcienda eſt portio turris inter punctum D, feneſtræ inferioris, & turris faſtigium E, vt tota altitudo turris habeatur EB. *d* Et ſi fiat,

d 4. ſexti.

Diſtãtiæ inuentio.

Vt DF, ſinus totus	*ad F H, Tangentem maiorem:*	*Ita D B, altitudo inuenta*	*ad B C,*

inuenta erit diſtantia B C.

ALI-

ALITER

2 POSITO ſinu toto CB, erit BE, Tangens anguli BCE, complementi minoris anguli obſeruationis E, & BD, Tangens anguli BCD, complementi maioris anguli obſeruationis D; ideoque DB, differentia illarum Tangentium. Quamobrem ſi fiat,

Vt DE, differentia Tangentium complementorũ angulorũ obſeruationũ	*ad DB, Tangentem minorem:*	*Ita DE, differentia ſtationum oculorũ*	*ad DB,*

prodibit altitudo DB, cognita ab oculo in prima ſtatione vſque ad baſem altitudinis, &c.

Altitudinis inuẽtio alia

ALITER

3 VT per ſolos ſinus inſtituatur operatio, inueſtiganda prius eſt vtraque hypotenuſa CD, CE, vel alterutra earum, hoc modo. *a* Quoniam angulus BDC, duobus E, & DCE, æqualis eſt, ſi minor angulus obſeruationis E, ex maiori angulo obſeruationis BDC, ſubtrahatur, notus relinquetur angulus DCE. *b* Itaque ſi fiat,

a 29. *primi*

b 10. Triang. rectil.

Vt ſinus anguli DCE differentiæ angulorum obſeruationum	*ad DE, differentiam ſtationum oculorum:*	*Ita ſinus minoris anguli obſeruationis E;*	*ad CD,*
		Vel	
		Ita ſinus anguli EDC, complementi maioris anguli obſeruationis ad duos rectos,	*ad CE,*

Hypotenuſarum inuẽtio.

reperietur tam hypotenuſa CD, quam CE, in partibus differentiæ ſtationum DE. *c* Quapropter ſi iam fiat,

c ...cio. Triang. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam CD,*	*Ita ſinus anguli BCD, complementi maioris anguli obſeruationis BDC,*	*ad DB,*
	Vel	*Vel*	
	ad hypotenuſã CE, proxime inuentam:	*Ita ſinus anguli BCE, complementi minoris anguli obſeruationis E;*	*ad EB,*

cognita erit vtraque altitudo DB, EB, &c. Si autem fiat,

Altitudinis inuẽtio per ſolos ſinus.

Vt sinus totus angули recti B,	*ad Hypotenusam CD,*	*Ita sinus anguli D, maioris obseruati,*	*ad BC,*
	Vel	*Vel*	
	ad hypotenusam CE, nuper inuētā	*Ita sinus anguli E, minoris obseruati.*	*ad BC,*

cognoscetur quoque distantia BC, per solos sinus.

Distātiæ inuentio per solos sinus.

4 ABSQVE numeris problema efficiemus, vt in præcedentibus, si nimirum in recta EB, sumatur portio ED, tot partium æqualium, quot palmi pedesue in ED, differentia stationū oculorum existunt, & tam angulusE, minor obseruationis, quā BDC, maior constituatur, concursusq. C, notetur, à quo ad EB, perpendicularis ducatur C B, &c. vel si angulus rectus efficiatur B, & in quouis puncto C, vbi optamus esse concursum, constituatur tam angulus BCD, complemento maioris anguli obseruationis, quam angulus BCE, complemento minoris anguli obseruationis æqualis, &c. Reliqua autem absoluantur, vt in Problemate 1. Num. 6.& 8. dictum est. Idemque efficies per ea, quæ ibidem. Num. 7. explicata sunt.

Problematis solutio sine numeris

COROLLARIVM

IGITVR si distantia signi ex turre visi vsque ad turrim nota fuerit, nimirum recta C B, reperietur altitudo turris per vnicam stationem in fastigio A, factam: *a* si videlicet fiat,

a 4. Triang. rectil.

Vt sinus totus C B,	*ad BD, Tangentē anguli BCD, qui cōplementum est anguli obseruationis D,*	*Ita distātia nota C B,*	*ad BD,*

Et si ex inuenta BD, auferatur mensoris statura AD, nota relinquetur altitudo turris BA.

Altitudinis inuētio per vnicam stationem quādo distātia nota est.

VEL PER SOLOS SINVS

Vt sinus anguli obseruationis D,	*ad distantiam CB, notam*	*Ita sinus anguli BCD, cōplementi anguli obseruationis D.*	*ad BD*

QVOD si oculus D, statuatur in aliqua fenestra turris, adijcienda erit portio turris inter oculum, & fastigium ad altitudinem D B, inuentam. Ita namque conficietur tota altitudo turris E B, si fastigium sit E, vt perspicuum est.

EX VERTICE MONTIS, AVT TVRRIS altitudinem ipsius, si in plano, cui insistit, spatium aliquod è directo mensoris notum sit, deprehendere.

PRO-

PROBLEMA V.

1 QVANDO ſpatium aliquod D E, è directo mẽſoris à monte vel turri remotum fuerit notum, metiemur ipſam altitudinem F G, e faſtigio G, hac ratione. Inſpiciantur termini D, E, per angulos FG D, FGE, ſiue per Quadrantem pendulum, ſiue per ſtabilem. Et quoniam, poſito ſinu toto G F, Tangentes angulorum obſeruationum ſunt D F, EF, ipſarumque differentia DE, ſpatium propoſitum: Si fiat,

Vt DE, differentia Tangentiũ angulis obſeruationum debitarum	*ad ſinum totum GF:*	*Ita DE, ſpatiũ notum*	*ad GF,*

manifeſta erit altitudo GF, quæſita in partibus ſpatij noti D E,

ALITER

2 PER ſolos ſinus eandem altitudinem GF, adipiſcemur, ſi prius hypotenuſam GD, venabimur, hoc modo. *a* Fiat, *a* io. triang. rectil.

Vt ſinus anguli DGE, differentia angulorum obſeruationum	*ad DE, ſpatium cognitum*	*Ita ſinus anguli E, cõplementi maioris anguli obſeruationis*	*ad hypotenuſã GD,*

Numerus enim productus dabit hypotenuſam G D, in partibus ſpatij D E, notam. *b* Si ergo rurſus fiat, *b* io. triang. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad hypotenuſam GD, proxime inuentam:*	*Ita ſinus anguli D, complementi minoris anguli obſeruationis*	*ad GF, altitudinẽ,*

producetur altitudo GF, in partibus hypotenuſæ GD, ſiue ſpatij DE, nota.

3 SINE numeris agendum erit, vt in problemate 1. declaratum eſt. Solutio problematis ſine numeris

DISTANTIAM AB OCVLO, VEL PEDE menſoris ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum, per duas ſtationes in plano factas metiri.

PROBLEMA VI.

1 SIT inquirenda diſtantia puncti A, in muro GH, ſiue perpendiculari ad Horizontem, ſiue inclinato, vel etiam in tecto quopiam; ab oculo B, vel pede C, poſita ſtatura menſoris B C. Concipiatur ducta B D, ipſi plano

CE,

C E, parallela, ſitque primo punctum A, altius, quam oculus B. Inſpecto puncto A, notetur angulus ABD, quem latus pinnacidiorum in quadrante pendulo, vel linea fiduciæ in dioptra Quadrantis ſtabilis cum recta BD, facit. Deinde accede verſus punctum A, quotlibet palmis aut pedibus vſque ad D, vt BD, differentia ſtationum nota ſit. Rurſumque ex D, punctum A, inſpiciatur, notato diligenter angulo A D E: exiſtentque rectæ A B, A D, BD, BC, DE, in eodem plano, in eo videlicet, quod per ſtaturas menſoris BC, DE, & per punctum A, ducitur. *a* Et quia angulus A D F, duobus B, & BAD, eſt æqualis: ſi angulus B, in remotiore ſtatione auferatur ex angulo D, in propinquiore, notus fiet reliquus angulus A. *b* Si igitur fiat,

a 32. *primi*

b 10. Trian. rectil.

Vt ſinus anguli A, quo angulus minor B, à maiori differt,	*ad BD, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli ADB, qui complementũ eſt maioris anguli D, ad duos rectos,*	*ad AB, diſtantiam quæſitã,*

reperta erit quæſita diſtantia AB, in partibus differentiæ ſtationum.

QVOD ſi oculus exiſtat in D, & recedatur à puncto D, vſque ad B, inuenietur eadem arte diſtantia DA, ſi loco anguli ADB, ſumatur angulus B, in remotiore ſtatione, vt liquet. *c* Eſt enim vt ſinus anguli A, quo angulus minor B, à maiori A D F, differt, ad B D, differentiam ſtationum: ita ſinus anguli B, in remotiori ſtatione ad DA.

c 10. Trian. rectil.

2 DISTANTIA vero à puncto A, ad pedem menſoris C, hoc eſt, recta AC, cognoſcetur per Problema 12. triang. rectil. cap. 3. lib. 1. cum in triangulo obliquangulo ABC, duo latera AB, B C, nota ſint, nimirum diſtantia inuenta, & ſtatura menſoris, comprehendantque angulum A B C, notum, vtpote conflatum ex recto CBD, & angulo obſeruationis ABD.

3 SIT deinde punctum A, in muro HI, infra oculum B. Inſpecto puncto A, obſeruetur angulus C B A, quem latus pinnacidiorum cum perpendiculi filo, vel dioptræ linea fiduciæ cum B C, facit: Deinde accede verſus A, vſque ad D, & iterum conſidera angulum EDA: exiſtentque rectæ A B, A D, BD, BC, DE, in vno eodemque plano, in eo videlicet, quod per ſtaturas menſoris BC, DE, & per punctum A, ducitur. *d* Et quoniam angulus F D A, complementi anguli obſeruationis in propinquiore ſtatione æqualis eſt duobus DBA, D A B, ſi DBA, angulus cõplementi anguli remotioris ſtationis dematur ex angulo A D F, complementi anguli ſtationis propinquioris, reliquus fiet notus B A D. *e* Si ergo fiat,

d 32. *primi*

e 10. Triang. rectil.

Vt

Vt sinus anguli BAD, differentia inter angulos complementorum angulorum obseruationum	*ad BD, differentiam stationum:*	*Ita sinus anguli ADB, cõstati ex recto BDE, & ex angulo obseruationis ADE, in propinquiore statione*	*ad AB distãtiã quæsitã.*

cognita erit distantia AB, quam quærimus, in partibus differentiæ stationum BD.

QVOD si oculus ponatur in D, & recedatur à pũcto D, vsq; ad B, reperietur eodem modo distantia DA, si pro angulo BDA, assumes angulum DBA, cõplementi anguli ABC, obseruationis in remotiore statione, vt manifestum est. *a* Nam est, vt sinus anguli BAD, differentiæ inter angulos complementorum angulorum obseruationum, ad BD, differentiam stationum: ita sinus anguli DBA, complementi anguli ABC, in remotiore statione, ad DA. *a* 10. triang. rectil.

4 VT autem distantia CA, a pede ad punctum A, inueniatur, ita progrediemur. Quoniam in triangulo rectangulo ABG, (si ex puncto A, concipiatur ducta ad BC, staturam mensoris perpendicularis AG,) basis AB, nota est per inuentionem, & angulus BAG, notus, quippe cum sit complementum anguli obseruationis ABG; *b* Si fiat, *b* 2. triang. rectil.

Vt sinus totus	*ad basem AB, proxime inuentam:*	*Ita sinus anguli BAG, complementi anguli obseruationis,*	*ad BG,*

cognoscetur BG, in partibus basis AB, hoc est, in partibus differentiæ stationum BD, in quibus AB, inuenta fuit. Ablata autem BG, ex mensoris statura BC, nota fiet reliqua CG. *c* Item si fiat, *c* 2. triang. rectil.

Vt sinus totus	*ad basem AB, nuper inuentam:*	*Ita sinus anguli obseruationis ABG,*	*ad AG,*

nota etiam fiet AG, in partibus eiusdem basis AB, vel differentiæ stationum BD. Quia ergo in triangulo rectangulo ACG, duo latera AG, GC, per inuentionem nota facta sunt; *d* cognoscetur quoque basis AC, quod est propositũ. *d* 3. triang. rectil.

5 MANIFESTVM autem est, eodem pacto vtramque distantiam AB, AC, reperiri, etiamsi punctũ A, in plano sit, in quo mensor consistit, nimirum in Horizonte, qui ponatur transire per rectam AG, ita vt statura mensoris sit BG. Immo tunc per vnicam stationem vtraque distantia AB, AG, reperietur. Nam posito sinu toto BG, statura mensoris; AB, secans est anguli obseruationis ABG, & AG, Tangens. Quocirca si fiat,

Vt BG, sinus totus	*ad BA, secantem anguli obseruationis ABG,*	*Ita BG, statura mensoris*	*ad BA,*
	Vel		
	ad GA, Tagentem anguli obseruationis ABG:		*ad GA,*

vtraque distantia & BA, ab oculo B, & GA, à G, pede mensoris cognita fiet.

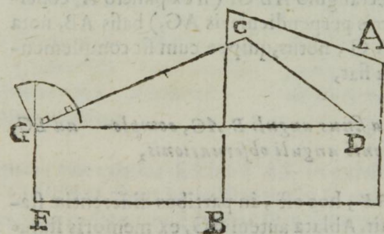
Problema quo pacto sine numeris soluendum sit.

6 IAM vero sine numeris operabimur, vt in præcedentibus, vt manifestum est, si rectè figura construatur, quemadmodum Num. 6. & 8. problematis 1. dictum est.

INTERVALLVM INTER DVO PVNCTA in quolibet plano eleuato, siue illud ad Horizontem rectum sit, siue inclinatum, metiri.

PROBLEMA VII.

1 IN plano quolibet eleuato AB. propositum sit interuallum CD, quod ex plano EB, inuestigandum sit. Posito oculo in G, vt statura mensoris sit, GE, inuestigetur per præcedens problema 6. vtraque distantia G C, GD, in partibus staturæ mensoris G E, siue differentiæ duarum stationum, è quibus ipsæ distantiæ inuestigantur. Deinde applicato Quadrante stabili ad oculum G, ita vt eius planum per puncta C, D, transeat, & vna eius semidiameter ad punctum D, vergat, (quod fiet, si posita linea fiduciæ dioptræ supra illam semidiametrum, punctum D, per foramina pinnacidiorum conspiciatur) vertatur dioptra, donec per eam punctum C, appareat, arcusque inter dictam semidiametrum, & lineam fiduciæ interceptus notetur. hic enim angulum G, metietur. Quòd si altera semidiameter Quadrantis vltra rectam G C, existat, erit angulus acutus CGD: Si vero altera illa semidiameter citra rectam G C, extiterit, dictus angulus erit obtusus, qui cognoscetur, si ad rectũ adijciatur reliquus angulus inter alteram illam semidiametrum, & rectam G C. quem quidem reliquum inuestigabimus per Quadrantem, vt de acuto C G D, diximus, si videlicet in recta C D, mente notemus punctum, in quod altera illa semidiameter incurreret producta. Si namque tunc semidiameter illa rectæ GC, congruat, & dioptra ad illud punctum mente notatum dirigatur, indicabunt gradus inter illam semidiametrum, & dioptram prædictum angulum reliquum. Si denique altera illa semidiameter precise in C, tendat, angulus C G D, rectus erit. Quia ergo in triangulo GCD, obliquangulo latera nota GC, GD, continent angulum notum G; cognoscetur latus CD, per problema 12. triang. rectil. cap. 3. lib. 1.

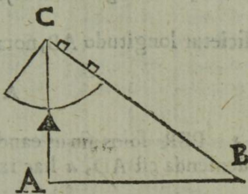


Problematis solutio sine numeris.

2 ABSQVE numeris facile problema soluetur, si fiat angulus G, æqualis ei, qui per Quadrantem obseruatus fuit, & in rectis GC, GD, ex instrumento partium tot particulæ sumantur, quot palmi, aut pedes indistantijs GC, GD, inuenti sunt, &c.

LONGITVDINEM LINEAE RECTAE, quando mensor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota, quæ perpendicularis sit in eo extremo ad planum, in quo linea iacet, existens alterum extremum videre potest, per Quadrantem comprehendere.

PROBLEMA VIII.



1 SIT exquirenda longitudo AB, hoc est, distantia inter A, & B, etiamsi puncta intermedia siue propter tumores interiectos, siue propter valles, cerni nequeant, dummodo in extremo A, existens mensor, vel in aliqua altitudine cognita ad planum, in quo linea A B, perpendiculari, ita vt AC, sit vel statura mensoris, vel hasta aliqua erecta, vel turris. Inspecto extremo B, obseruetur angulus C. Et quia posito sinu toto AC, distantia AB, est Tangens anguli obseruati C: si fiat,

Vt sinus totus AC,	*ad AB, tangentem anguli obseruati C.*	*Ita AC, statura mensoris, vel altitudo nota,*	*Ad AB, lõgitudinem.*

procreabitur longitudo AB, in partibus altitudinis notæ AC. Quæ per solos sinus etiam producetur, *a* si fiat, *a* 4. triang. rectil.

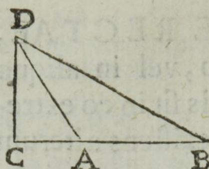
Vt sinus anguli B, cõplementi anguli C, ob seruati	*Ad AC, staturam mensoris, vel altitudinem notam*	*Ita sinus anguli C, obseruationis*	*ad A B, lõgitudinem*

2 SINE numeris eadem longitudo AB, cognoscetur, vt in præcedentibus dictum est: si videlicet ex instrumento partium accipiatur AC, tot particularum, quot palmi, pedesue in altitudine A C, existunt, constituaturque angulus obseruationis C, ac tandem ad AC, perpẽdicularis excitetur AB, &c. Solutio problematis sine numeris.

LONGITVDINEM, AD CVIVS EXTREMA accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipsa longitudo producta ad pedes mensoris pertingat, ex altiudine aliqua nota dimetiri.

PROBLEMA IX.

1 SIT longitudo AB, è directo mensoris in C, existentis, ita vt recta



BA, producta transeat per C. Sit quoque CD, vel statura mensoris, vel altitudo quæpiam nota. Si igitur per præcedens problema 8. inquiratur vtraq. longitudo CB, CA, & CA, ex CB, detrahatur, reliqua fiet AB, ac proinde cognita.

ALITER

2 POSITO sinu toto CD, si termini A, B, per angulos CDA, CDB, spectentur, erit CA, Tangens minoris anguli, & CB, maioris, at AB, differentia earum Tangentium. Quare si fiat,

Vt sinus totus CD,	*Ad AB, differentiam Tangentiũ angulorum obseruationum*	*Ita CD, altitudo nota*	*Ad AB, longitudinem,*

efficietur longitudo AB, nota in partibus altitudinis notæ CD.

ALITER

3 PER solos sinus eandem longitudinem AB, cognoscemus: sed prius inuenienda est AD, *a* hac ratione fiat, *a 5. triang. rectil.*

Vt sinus anguli CAD, complementi minoris anguli obseruationis	*ad CD, altitudinem notam:*	*Ita sinus totus anguli recti C,*	*ad AD,*

Productus enim numerus dabit AD, notam in partibus altitudinis notæ CD. *b* Si ergo rursus fiat, *b 10. triãg. rectil.*

Vt sinus anguli CBD, cõplementi maioris anguli obseruationis	*Ad AD, proxime inuentam*	*Ita sinus anguli ADB, differẽtiæ inter duos angulos obseruatos*	*ad AB, longitudinem,*

prodibit nota longitudo AB, in partibus rectæ AD, hoc est, altitudinis notæ CD, in quibus recta AD, fuit inuenta.

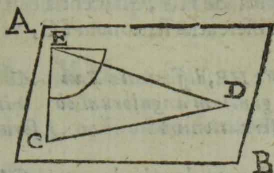
4 SINE numeris rem perficies, quemadmodum in præcedentibus, vt liquet.

LONGITVDINEM TRANSVERSAM in Horizonte, cuius vtrumque extremum inspici potest, notam efficere.

PROBLEMA X.

1 SIT planum Horizontis AB, in quo iaceat longitudo CD, in transuersum, pes autem mensoris sit in E, ita vt recta DC, per pedes mensoris in E, non transeat. Quando namque longitudo DC, è directo mensoris sita est, inue-

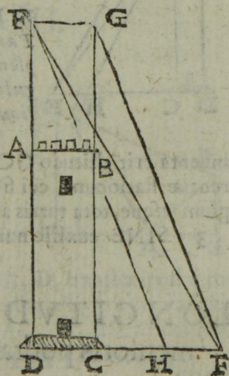
inuesti gabitur ea per problema 9. præcedens. Vt ergo transuersa longitudo CD, nota efficiatur, inuestiganda primum erit vtriusque puncti extremi C, D, distantia à pede mensoris E, & quidem per vnicam stationem in E, factam, vt problemate 6. Num. 5. dictum est. Deinde per Quadrantem cum dioptra angulus C E D, exquirendus in plano Horizontis. quod fiet, si Quadrantis planum erectum transeat semel per puncta E, C, & iterum per puncta E, D, vt designari possint partes rectarum EC, ED. Quadrantis enim vno latere incumbente rectæ E C, dioptra vero rectæ ED, si angulus est acutus, indicabit arcus inter illud latus, ac dioptram, angulum CED. Quod si alterum Quadrantis latus rectæ ED, congruet, erit angulus CED, rectus: Si vero recta E D, vltra alterum latus Quadrantis extiterit, dictus angulus obtusus erit, qui cognitus erit, si recto angulo addatur reliquus inter alterum latus, & rectam ED: Qui quidem reliquus angulus per Quadrantem explorabitur vt de acuto diximus in problemate 7. Atque ita habebimus triangulum ECD, cuius duo latera nota sunt EC, ED, angulumque notum comprehendunt C E D. *a* Igitur, & tertium latus CD, cognitum erit. *a 12. Triang. rectil.*



2 QVO pacto autem sine ope numerorum problema perficiendum sit, traditum est in problemate 7. Num. 2.

LONGITVDINEM IN HORIZONTE inter turrim aliquam, & aliud quodpiam signũ, ex turri per duas stationes in fastigio factas: vel in duabus fenestris, quarum vna sit sub altera ad perpendiculum, quando spatium inter illas fenestras notum est, etiamsi totius turris altitudo ignota sit, dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere.

PROBLEMA XI.



1 QVAMVIS problema hoc solutum iam sit in problemate 3. & 4. occasione altitudinis inquirendæ, libet tamen idem hic per se, & paulo aliter expedire. Sit ergo turris A B C D, & longitudo proposita CE: statura autem mensoris B G, vel A F. Inspecto extremo E, in prima statione per angulum CGE, & in secunda per angulum DFE, ducatur F H, ipsi GE, parallela. Et quia in triangulis FDH, GCE, anguli D, C, recti sunt, *b* & H, E, æquales *c* latusque F D, lateri GC, æquale: *d* erunt quoque & anguli G, DFH, æquales, & latera DH, CE. Posito autem sinu to-

b 29. primi.
c 34. primi.
d 26. primi.

to FD, erit DE, Tangens maioris anguli obſeruationis DFE, & DH, Tangens anguli DFH, hoc eſt, anguli æqualis G, in prima ſtatione obſeruati: ac proinde HE, differentia erit earum Tangentium. *a* quæ quidem æqualis eſt differentiæ ſtationum FG, vel AB, vel DC. Si igitur fiat,

a 34. primi

Vt HE, differentia Tangentium angulorum obſeruationum	*Ad CE, Tangentem minoris anguli obſeruationis CGE,*	*Ita HE, vel FG, differentia ſtationum*	*ad CE, longitudinem,*

gignetur longitudo optata CE, in partibus differentiæ ſtationum HE, vel FG, &c. Quòd ſi rurſus fiat,

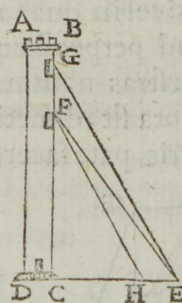
Vt HE, differentia Tangentiũ angulorũ obſeruationũ	*Ad FD, ſinũ totum*	*Ita HE, vel FG, differẽtia ſtationum*	*ad FD,*

inuenietur recta FD, à qua ſi tollatur ſtatura menſoris AF, reliqua fiet altitudo turris AD.

2 SED iam ex duabus feneſtris F, G, inſpiciatur extremum E, per angulos CFE, CGE, ducaturque FH, ipſi GE, parallela. *b* Quoniam igitur angulus CFH, angulo CGE, æqualis eſt: ſi ponatur ſinus totus CE, erit CG, Tangens anguli CEG, complementi minoris anguli obſeruationis G, & CF, Tangens anguli CEF, complementi maioris anguli obſeruationis CFE: at FG, differentia ſtationum, hoc eſt, interuallum inter feneſtras, differentia erit dictarum Tangentium.

b 29. primi.

Qua mobrem ſi fiat,



Vt FG, differentia Tangentiũ cõplementorum angulorum obſeruationum,	*Ad CE, ſinum totum*	*Ita FG, differẽtia ſtationum inter feneſtras,*	*ad CE, lõgitudinem propoſitam,*

cognita erit longitudo CE, deſiderata. Et ſi rurſum fiat,

Vt FG, differẽtia Tangentium cõplemẽtorum angulorũ obſeruationum	*ad GC, Tangẽtem complementi minoris anguli obſeruati*	*Ita FG, differẽtia ſtationum inter feneſtras*	*ad GC,*

inuenta erit altitudo GC, à ſuperiori feneſtra ad baſem, in partibus differentiæ ſtationum, cui ſi addatur portio GB, à ſuperiori feneſtra ad faſtigium vſque, tota turris altitudo BC, non ignorabitur.

3 SINE auxilio numerorum procedendum eſt, vt in ſuperioribus.

LONGITVDINEM RECTAE E DIRECTO menſoris poſitæ, cuius extremum vtrumque, vel alterum

terum non appareat, nisi ad dextram, vel sinistram accedat mensor, per quadrantem comprehendere:

PROBLEMA XII.

1 SIT longitudo AB, & mensor in extremo A, constitutus videre non possit alterum extremum, nisi ad dextram sinistramue recedat vsque ad D, punctum, è quo vtrumque extremum cerni possit. Erit igitur lõgitudo AB, mensori in D, existenti posita in transuersum. Quare ea per problema 10. inuestigabitur.



2 EODEM modo, si mensor existat in C, è directo longitudinis, sed vel neutrum extremum, vel alterum duntaxat intueri possit, longitudinem AB, venabimur. Si namque ex C, ad sinistram, vel dextram procedemus, donec in D, vtrumque extremum videamus, inuenietur transuersa longitudo AB, per problema 10. vt prius. Neque vero refert, siue per angulum rectum BCD, recedatur in latus, siue per angulum acutum BAD, &c.

3 OPERATIO sine numeris instituenda est, vt in superioribus.

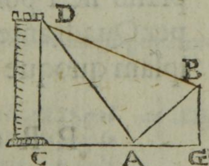
4 QVANDO mensor in A, existens videre potest extremum B, inuestigabitur longitudo AB, per problema 8.

SI autem è directo longitudinis existat in C, & vtrumque etremum cernat, explorabitur per problema 9. eadem longitudo AB.

DISTANITAM alicuius signi in Horizonte positi, à summitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipsum signum accessus non pateat, per quadrantem colligere.

PROBLEMA XIII.

1 IN Horizontis plano punctum A, distet à summitate D, alicuius altitudinis CD, per rectam AD, quam metiri iubemur, Vbicunque oculus mensoris existat, nimirum in B, vt sit statura mensoris BG, inuestigentur per problema 6. distantiæ punctorum A, D, ab oculo mensoris B.



Deinde angulus exploretur ABD, quem nobis præbebit Quadrans cum dioptra, si ad oculum ita applicetur, vt eius planum per tria puncta B, A, D, transeat, posito centro in B; atque vnum eius latus rectæ BA, incumbat, dioptra vero ad punctum D, dirigatur, &c. Itaque cum in triangulo BAD, duo latera nota BA, BD, angulum notum contineant B; *a* cognoscetur quoque latus AD.

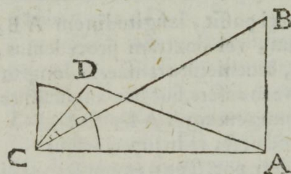
a 10. Triãg. rectil.

2 QVA

2 QVA ratione eadem distantia AD, exquirenda sit absque numeris, docuimus Num. 5. problematis 7.

ALTITVDINEM INACCESSIBILEM, cuius basis non videatur, & ad quam per nullum spatium secundum lineam rectam accedere possimus, aut recedere, vt duę stationes fieri possint, sed solum ad dextram, sinistramue ad locum, è quo eius basis appareat, per Quadrantem explorare.

PROBLEMA XIIII.



1 SIT altitudo AB, ad quam ex C, loco mensoris non liceat accedere, aut ab ea recedere secundum lineam rectam, sed solum in latus, verbi gratia vsque ad D, vnde basem videre possimus. Inquiratur per problema 10 longitudo transuersa AC, ex loco D: inspiciaturq. vertex B, ex C, per angulum ACB. Et quia, posito sinu toto AC, altitudo AB, Tangens est anguli obseruationis ACB, a si fiat,

a 4. Trian. rectil.

Vt sinus totus AC,	*ad AB, Tangentem anguli obseruati ACB:*	*Ita longitudo AC, per problema 10. inuenta*	*Ad AB, altitudinem,*

prodibit nota altitudo AB, in partibus, in quibus AC, inuenta fuit.

2 NON erit autem difficile problema hoc sine numerorum auxilio exequi, si superiora præcepta consulantur.

ALTITVDINEM INACCESSIBILEM, quando neque distantia à loco mensoris ad eius basem nota est, neque è directo ipsius duæ stationes in plano fieri possunt, neque denique basis appareat, per Quadrantem notam reddere. Atque hinc obiter ipsam quoque distantiam elicere.

PROBLEMA XV.

1 SIT altitudo AB, locus mensoris C, distantia CB, incognita: basis B, non appareat, & à loco C, non liceat accedere ad AB, neque recedere, vt duæ stationes fiant in plano. Erigatur hasta CE, si non præstò sit turris aliqua CO, & statura mensoris sit CD. Sumpta deinde portione hastæ DE, notarum

rum partium, concipiantur ductæ DM, EN, ipsi CB, parallelæ, obseruenturque per Quadrantem anguli ADM, AEN. Sumptis quoque rectis æqualibus EF, DG, pro sinubus totis, erigantur perpẽdiculares FH, GI, pro Tangentibus angulorum obseruationum. Sumpta item AL, æquali ipsi DE, ducatur recta DL, *a* quæ parallela erit ipsi EA; secabitque GI, in *K*. *b* Quoniam vero angulus DKG, angulo DLB, & hic angulo EAB, & hic angulo EHF, æqualis est; erit angulus DKG, angulo EHF, æqualis: Est autem & rectus G, recto F, æqualis, & latus DG, lateri EF, æquale; *c* erunt quoque latera GK, FH, æqualia, & anguli D, E, æquales: ideoque IK, differentia erit inter Tangentes GI, GK, angulorum GDI, GDK, siue FEH. *d* Et quia est, vt IK, ad KG, ita AL, ad LM; erit per contrariam compositionem à nobis in scholio propos. 18. lib. 5. demonstratam, ita quoque IK, ad IG, vt AL, hoc est, vt ED, differentia stationum, ad altitudinem AM. Igitur si fiat,

a 33.primi.
b 29.primi.
c 26.primi.
d schol. 4. sexti.

Vt IK, differentia Tangentiũ	*ad IG, Tangente maiorem:*	*Ita AL, vel ED, differẽtia stationum*	*Ad AM, altitudinem,*

gignetur altitudo AM, cui si apponatur statura mensoris MB, tota altitudo AB, nota efficietur. *e* Iam si fiat,

e 4. sexti.

Vt GI, sinus totus	*ad GD, Tangentẽ cõplemẽti maioris anguli obseruationis:*	*Ita altitudo inuenta AM,*	*ad MD, distantiam,*

inuenta erit distantia DM, vel CB.

2 PER solos sinus idem problema conficiemus, si prius inuestigetur hypotenusa AD, hoc modo. *f* Fiat,

f 10.Triãg. rectil.

Vt sinus anguli ADL, differentia inter angulos obseruationum ADM, LDM,	*ad AL, hoc est, ad DE, differentiã stationũ:*	*Ita sinus anguli ALD, qui relinquitur, si DLM, cõplementum minoris anguli LDM, obseruati ex duobus rectis subtrahatur,*	*ad AD,*

Nam productus numerus offeret hypotenusam AD. *g* Si ergo rursus fiat,

g 10.triang. rectil.

Vt

Vt sinus totus anguli recti M,	*ad hypotenusam AD, inuentam:*	*Ita sinus maioris anguli obseruationis ADM,* *ad AM,*

a io. trang. rectil.

procreabitur altitudo AM, &c. a Si autem fiat,

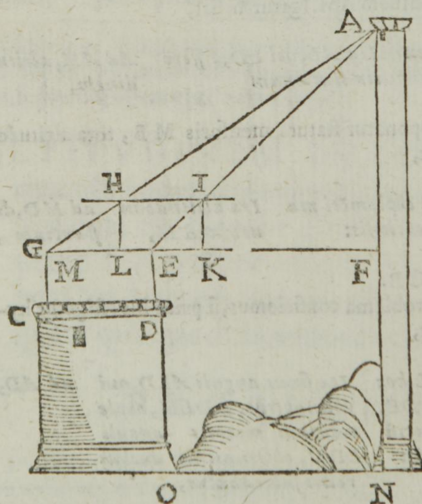
Vt sinus totus anguli recti M,	*ad hypotenusā AD, proxime inuentam,*	*Ita sinus anguli DAM, complementi maioris anguli obseruationis,* *ad DM,*

efficietur distantia DM, cognita.

3 SI sine numeris problema soluendum est, recurrendum erit ad superiora, præsertim ad Num. 6. 8. & 7. problematis 1.

ALTITVDINEM MAIOREM EX minori cognita, per duas stationes in summitate, vel in duabus fenestris factas, etiamsi solum maioris altitudinis vertex cernatur, per Quadrantem adinuenire. Atque hinc distantiam quoque inter altitudines colligere.

PROBLEMA XVI.



1 MAIOR altitudo sit AN minor turris CO, cognita, ex qua solum cacumen A, non autem basis N, appareat. Fiant in summitate duæ stationes in C, D, mensorisque statura sit CG, vel DE, & ad AN, intelligatur ducta perpendicularis GEF. Atque inspecto cacumine A, obseruentur anguli AEF, AGF. Reliqua fiant, vt in 2. problemate. Si ergo fiat, sicut in eo problemate demonstrauimus,

Vt

Vt GM, differentia Tangentium GL, EK, angulorum H, I, qui complemẽta sunt angulorum obseruationum, positis sinubus totis HL, IK,	*ad GE, differentiam stationum:*	*Ita LH, si nus totus*	*ad FA,*

Inuenietur altitudo AF, cui si adijciatur FN, conflata ex altitudine turris CO, & statura mensoris, tota maior altitudo AN, nota euadet. Item si fiat,

Vt GM, differentia Tangentium earũdem.	*ad GE, differentiam stationum:*	*Ita GL, Tangens complementi minoris anguli obseruationis*	*ad GF,*

procreabitur distantia GF, à qua si dematur latitudo turris CO, reliqua erit distantia inter duas turres.

HAEC omnia in 2. problemate demonstrauimus: & ob hanc causam eisdem prorsus literis hic vsi sumus, quas ibi vsurpauimus, vt demonstratio ex illo loco in hunc transferri possit.

2 QVANDO in summitate turris minoris fieri duæ stationes nequeunt, eligantur duæ fenestræ, in quibus duę stationes fiant. Vt in figura præcedentis problematis 15. in minori turri CE, deligantur duæ fenestræ D, E, & reliqua fiant, vt in hasta CE. Solum pro statura mensoris ad altitudinem inuentam AM, adijcienda est portio turris inter inferiorem fenestram D, & basem C, vt tota maior altitudo AB, nota efficiatur.

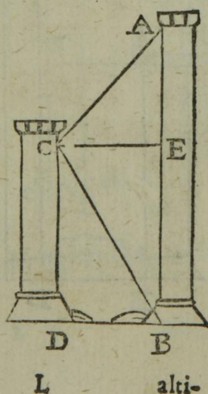
3 SINE numeris nihil noui præcipimus, sed ad superiora lectorem amandamus.

4 QVO etiam pacto problema hoc per solos sinus possit effici, docuimus probl. 2. & 15.

ALTITVDINEM MAIOREM EX MINORI incognita, dummodo basis maioris cerni possit, per Quadrantem perscrutari.

PROBLEMA XVII.

1 SIT maior altitudo AB, & minor CD, incognita, possitque basis maioris B, videri ex minori altitudine. Primum per duas stationes in summitate turris minoris, vel in duabus fenestris, inquiratur tam altitudo turris minoris CD, quam distantia DB, vt problemate 11. vel etiam 3. & 4. traditum est. Nam tunc ex minori altitudine nota CD, maior AB, explorabitur per ea, quæ in antecedente problemate 16. scripsimus.



2 AT ex altitudine CD, & distantia DB, cognitis discemus altitudinem maiorem AB, per solos sinus, hoc modo. Ex aliqua fenestra C, minoris altitudinis inspiciatur extrema A, B, maioris altitudinis per angulos ACE, BCD, (ducta prius CE, ipsi DB, parallela, vel ad vtramque

a 10. Trian. rectil.

altitudinem perpendiculari.) a Deinde fiat,

Vt ſinus anguli CBD, omplementi illius, quo baſis inſpicitur	*ad inuentam altitudinem C D:*	*Ita ſinus totus anguli recti D,*	*ad BC,*

Vel

Vt ſinus anguli BCD, quo baſis inſpicitur,	*ad inuentam diſtantiam BD:*	*Ita ſinus totus anguli recti D,*	*ad BC,*

b 10. Trian. rectil.

Vtroque enim modo cognita erit hypotenuſa BC. b Si ergo rurſus fiat,

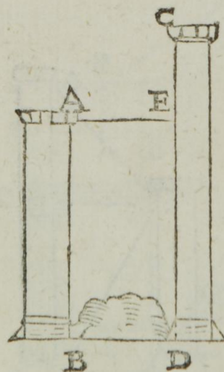
Vt ſinus anguli A, complementi illius quo cacumen inſpicitur,	*ad inuentam hypotenuſam BC:*	*Ita ſinus anguli ACB, conflati ex complemento anguli, quo baſem intuemur, & ex angulo, quo faſtigiū cernitur,*	*ad AB,*

manifeſtabitur altitudo maior AB.

3 DE ſolutione problematis ſine numeris nihil noui hic præcipimus, ſed ea ex ſuperioribus petenda eſt.

ALTITVDINEM MINOREM EX MAIORI cognita, licet baſis minoris non cerni poſſit, ope Quadrãtis perueſtigare. Atque hinc diſtantiam quoque inter altitudines duas eruere.

PROBLEMA XVIII.



1 MINOR altitudo A B, ex maiore C D, cognita proponatur addiſcenda, etiãſi baſis B, nõ cernatur. Concipiatur ducta recta A E, ipſi B D, parallela, vt E D, minori altitudini A B, ſit æqualis. Si igitur ex duabus ſtationibus in ſummitate maioris altitudinis C D, factis, per problema 3. vel ex duabus feneſtris, per problema 4. inueſtigetur tã altitudo CE, quã diſtantia A E, inſpecto cacumine A, ac ſi eſſet ſignum aliquod in Horizonte AE, viſum, & CE, ex tota altitudine CD, auferatur, reliqua E D, hoc eſt, minor altitudo fiet nota. Diſtantia autem AE, inuenta quæſitæ BD, eſt æqualis: ac proinde DB, cognita erit.

ALTI-

ALTITVDINEM MINOREM EX MAIORI incognita, dummodo basis minoris videri possit, per Quadrantem explorare. Atque hinc distantiam quoque inter duas altitudines conijcere.

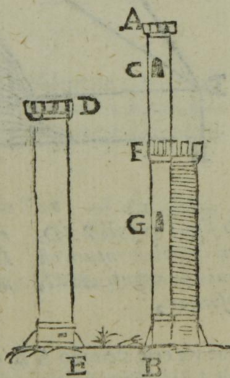
PROBLEMA XIX.

1 REPETATVR figura præcedentis problematis. Et quia basis B, minoris altitudinis ex maiore apparet; si punctum B, ex duabus stationibus in summitate maioris altitudinis CD, factis inspiciatur, reperietur per problema 3 tam altitudo maior CD, quam distantia BD. Quod etiam efficies per problema 4. si punctum B, ex duabus fenestris maioris altitudinis CD, inspiciatur. Cognita ergo altitudine maiori CD, inuenietur minor altitudo AB, vt in præcedenti problemate traditum est. Cum igitur & distantia BD, sit explorata, patet solutio problematis propositi.

PORTIONEM ALTITVDINIS MAIORIS ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiori cognoscere per Quadrantem.

PROBLEMA XX.

1 SIT portio AC, maioris altitudinis AB, exquirenda ex minore altitudine DE: Item portio FG, minoris altitudinis FB, ex altitudine maiore DE. Si DE, altitudo minor est portione CB, inuestigetur tã altitudo maior AB, quam CB, ex minore altitudine DE, per problema 16. vel 17. prout videlicet DE, cognita fuerit, aut incognita. Nam CB, ablata ex AB, notam relinquet portionem AC, quæsitam.



2 SI vero DE, maior est portione FB, explorandaque sit portio AF; inquirenda quidem erit maior altitudo AB, ex minore DE, per problema 16. vel 17. At vero altitudo minor FB, ex maiore DE, per problema 18. vel 19. exploranda erit. Nam rursus FB, detracta ex AB, notam relinquet portionem AF.

3 NON secus per problema 18. vel 19. indaganda erit vtraque altitudo minor FB, GB, ex maiore DE, vt illarum differentia FG, quæ quæritur, colligatur nota.

ALTITVDINEM, cuius basis imposita sit alteri altitudini, & vtraque illius extremitas cerni possit, etiãsi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiusdem puncti infimi distantia à loco mensoris cognita non sit, per Quadrantem ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.

PROBLEMA XXI.

1 HVIVSCEMODI altitudo est turris supra montem posita, & portio alicuius ædificij inter duas fenestras, vel duo signa, quorum alterũ altero superius est. Sit igitur supra montẽ altitudo turris AB, proposita. Ex aliquo loco E, in planitie, aut valle, vnde vtrumque extremum A, B, videatur, obseruentur per Quadrantem anguli ADC, BDC, quos radij DA, DB, cum recta DC, quæ ex D, ad AB, productam intra montem est perpendicularis: ita vt statura mensoris sit DE. Deinde per problema 6. inuestigetur longitudo vtriusque radij DA, DB. a Nam si fiat in triangulo ABD,

a 10. triang. rectil.

Vt sinus anguli BAD, qui complementum est maioris anguli ADC, obseruati,	*ad radium DB, proxime inuẽtũ:*	*Ita sinus anguli ADB, qui differentia est angulorum obseruationum ADC, BDC,*	*ad AB, altitudinem,*

inuenta erit altitudo AB, quæsita, in partibus, in quibus cognitus est radius DB. b Sic etiam, si fiat,

b 10. triang. rectil.

Vt sinus anguli ABD, vel (quod idẽ est) anguli DBC, qui complementũ est minoris anguli obseruati BDC,	*ad radium DA, proxime inuentum*	*Ita sinus anguli ADB, differentiæ angulorum obseruatorum ADC, BDC,*	*ad AB, altitudinem*

pro-

prodibit rursus altitudo quæsita AB, in partibus radij inuenti DA.

ALITER.

2 PER problema 2. vel 15. inuestigetur tam altitudo inaccessibilis AC, quam BC, seclusa mensoris statura CF. Altitudo namque BC, ex altitudine AC, detracta notam relinquet altitudinem AB, quæ quæritur.

ALITER

3 INVENTA distantia DC, per ea, quæ in problemate 1. & 2. tradidimus, *a* si fiat, *a* 4. triang. rectil.

Vt sinus totus DC,	*ad distantiam cognitam DC,*	*Ita AC, Tangens maioris anguli obseruati ADC,*	*ad AC,*

reperietur altitudo maior AC, in partibus distantiæ inuentæ DC. *b* Et si rursus fiat, *b* 4. triang. rectil.

Vt sinus totus DC,	*ad distantiam inuentam DC:*	*Ita BC, Tangens minoris anguli obseruati BDC,*	*ad BC,*

cognita fiet altitudo minor BC, in partibus eiusdem distantiæ inuentæ DC, quæ dempta ex maiore altitudine AC, notam relinquet altitudinem turris BA, quæsitam.

ATQVE hæc ratio commodissima est, quando in turri aliqua, vel ædificio, cuius distantia à mensore cognita sit, metiendum est interuallum perpendiculare inter duas fenestras.

ALITER

4 INVENTA rursum distantia DC, per ea, quæ in problemate 1. & 2. scripsimus; detrahatur Tangens BC, (posito sinu toto DC,) minoris anguli obseruati ADC, vt nota remaneat AB, differentia dictarum Tangentium. Nam si fiat,

Vt sinus totus DC,	*ad distantiam inuentam DC,*	*ita AB, differentia Tangentium AC, BC,*	*ad AB, altitudinem,*

procreabitur altitudo quæsita AB, in partibus distantiæ inuentæ DC.

ALITER

5 INVENTA per problema 2. vel 15. altitudine montis BC, obseruentur anguli BDC, ADC, per radios DB, DA. Posito namque sinu toto DC, si fiat,

Vt BC, Tangens minoris anguli obseruati BDC,	*ad BC, altitudinem inuentam:*	*Ita AB, differentia Tangētium AC, CB, angulorum obseruatorum ADC, BDC.*	*ad AB*

prodi-

prodibit rursus altitudo nota AB, quam quærimus.

S C H O L I V M.

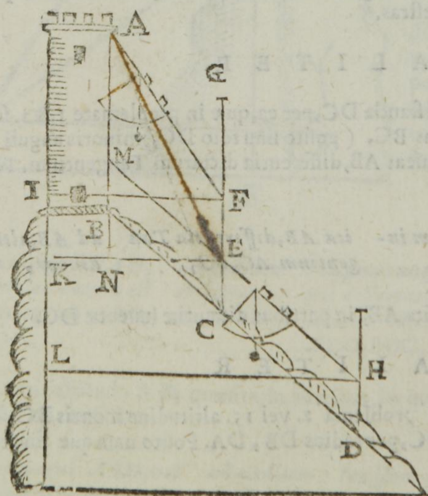
ITAQVE si AB, portio superior totius alicuius altitudinis AC, desideretur, inuestiganda erit per Problema 2. vel 15. tam tota altitudo AC, quã eius inferior portio BC. Earum enim differentia notam dabit superiorem portionem AB.

SI autem media aliqua portio IB, cognoscenda est, conijcienda rursus erit vtraque altitudo IC, BC, vt earum differentia IB, nota reddatur.

SI denique inferior pars BC, proponitur inquirenda, fiet id per Problema 2. vel 15.

DISTANTIAM accliuem montis à loco mensoris vsque ad basem altitudinis monti impositæ, etiam non visam, vna cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit, prope verum efficere cognitam, beneficio Quadrantis.

PROBLEMA XXII.



1 SIT turris AB, monti imposita, in cuius ascensu seu latere mensor cõsistat in C, ex quo loco basem turris videre non possit. Erigatur hasta aliqua CG, ad Horizontem, non autem ad latus montis, perpendicularis, sitque mensoris statura CE. Cogitetur ducta EK, ad altitudinem perpendicularis: Et inspecto cacumine A, per angulum AEK, fiat alia statio superior in F, ductaq. FI, ad altitudinem perpendicularis, inspiciatur idem cacumen A, per angulum AFI. *a* Et quia angulus AFG, duobus an-gulis

a 32. primi.

guli EEA, FAE, est æqualis: si dematur AEF, complementum maioris anguli AEK, in prima statione obseruati, reliquus fiet angulus EAF, *a* Igitur si fiat, *a 10. triãg. rectil.*

Vt sinus anguli EAF, differentia complementorum angulorũ obseruationũ	*ad EF, differentiam stationum:*	*Ita sinus anguli AFE, constati ex recto EFI, & minore angulo AFI, in secũda statione obseruati,*	*ad AE hypotenusam.*

efficietur nota hypotenusa AE. Post hæc erigatur alius baculus DH, ad Horizontem rectus, sumptaq. mensoris statura DH, ipsi CE, æquali, & ducta recta HL, ad altitudinem perpendiculari, inspiciatur punctum E, per angulum EHL, & per radium HEM, *b* qui ipsi BCD, lateri montis parallelus erit. Concipienda (enim sunt tria puncta B, C, D, in vna recta iacere, ac si DC, producta ad basem turris perueniret. *c* Quia vero angulus EHL, angulo MEK, æqualis est: si hic ex maiori angulo obseruato AEN, in prima statione dematur, reliquus fiet angulus AEM. Est autem & angulus EAN, cognitus, quippe cum sit complementum maioris anguli obseruati AEN. Igitur & AME, re- reliquus duorum rectorum cognitus erit: qui quidem etiam relinquitur, si complementum anguli MHL, in statione D, obseruati ex duobus rectis detrahatur. *d* Igitur si fiat, *b 33. primi.* *c 29. primi.* *d 10. triang. rectil.*

Vt sinus anguli AME, qui relinquitur, si cõplementũ postremi anguli obseruati MHL, ex duobus rectis dematur	*ad hypotenusam AE, nuper inuẽtam:*	*Ita sinus anguli EAN, cõplementi maioris anguli obseruati AEN*	*ad ME,*

inuenta erit recta EM, hoc est, distantia quæsita CB. *e* Et si rursum fiat, *e 10. Trian. rectil.*

Vt sinus eiusdem anguli AME,	*ad eandem hypotenusã AE, nuper inuentam:*	*Ita sinus anguli AEM, qui relinquitur, si angulus postremo loco obseruatus MHL, vel MEK, ex angulo maiori obseruato AEK, detrahatur,*	*ad AM*

producetur AM, cui si addatur mensoris statura MB, tota altitudo AB, cognita erit.

DANDA autem erit opera diligenter, vt tria puncta B, C, D, in vna recta iaceant, hoc est, vt recta ab vltima statione D, per primam C, ducta per basem B, transeat. quod plus minus iudicio sensuum assequemur. Nam per ea, quæ dicta sunt hoc loco, solum reperitur distantia à loco C, vsque ad punctum altitudinis, in quod recta D C, protracta incidit, & altitudo ab A, vsque ad idem punctum, quod non multum à puncto B, distabit, si diligentia adhibeatur in stationibus C, D, capiendis. Propter hanc causam in propositione diximus (prope verum efficere cognitam) quia neque distantia C B, neque altitudo AB, præcisè cognoscitur, nisi quando tria puncta B, C, D, in recta linea iacent.

2 VT sine numerorum auxilio problema efficias, recurrendum erit ad superiora.

PROFVNDITATEM putei, vel ædificii cuiuscunque ad perpendiculum erecti, si modo angulus fundi, vel signum aliquod in fundo positum conspiciatur, per Quadrantem reperire.

PROBLEMA XXIII.

1 HOC nihil est aliud, nisi turrim ex eius vertice, quando in Horizonte signum aliquod apparet, per duas stationes in hasta aliqua factas metiri, vt problemate 4. factum est. Operationem ergo eius problematis hic repetemus. Sit puteus, seu ædificium erectum ABCM, cuius angulus C, in fundo, vel signum C, in fundo positum conspici possit. Erecta hasta A E, in orificio putei, vel summitate ædificij, fiant duæ stationes oculi mensoris in D, E, inspiciaturque punctum C, per radios DC, EC, facientes angulos BDC, BEC: Sumptis deinde DF, EG, æqualibus pro sinubus totis, ducantur ad E B, perpendiculares F H, G I, pro Tangentibus angulorum B D C, B E C, obsernatorum. Ducta quoque D L, ipsi EC, parallela secante FH, in K, vt KH, differentia sit Tangentium, quemadmodum problemate 4. demonstrauimus. Si igitur, vt ibi, fiat hic,

Vt KH, differentia inter Tangentes angulorum obseruatorum	*ad FK, vel ad GI, Tangentẽ minorem:*	*ita DE, differentia stationum, hoc est, spatiũ inter oculos, vel angulos obseruationum,*	*ad DB,*

prodibit recta DB, nota, vt problemate 4. ostendimus: ex qua si subtrahatur segmentum hastæ AD. inter orificium, & oculum in prima statione, reliqua fiet profunditas, siue altitudo putei, vel ædificij AB.

ALITER.

2 POSITO sinu toto B C, fiat.

Vt DE, differentia Tangentium BD, BE, quæ complementis angulorum obseruationũ debẽtur,	*ad DB, Tangentem minorem*	*ita DE, differentia stationũ oculorum*	*ad DB,*

Nam numerus procreatus notam exhibebit eandem rectam DB, &c.

A L I T E R

3 Si per solos sinus operari lubeat, ita agendum erit. *a* Quoniam angulus maior obseruatus BDC, duobus angulis E, DCE, æqualis est; si angulus E, minor obseruatus tollatur ex maiore BDC, notus remanebit angulus DCE, differentia angulorum obseruatorum. *a 32. primi.*

b Igitur si fiat, *b 10 triang. rectil.*

Vt sinus anguli DCE, differẽtiæ angulorum obseruatorum.	*ad DE, differentiam stationum oculorũ:*	*ita sinus anguli E, minoris obseruati*	*ad DC,*

prosiliet nota hypotenusa DC. *c* Quapropter si rursum fiat, *c 10. triang. rectil.*

Vt sinus totus anguli recti B,	*ad hypotenusam DC, proxime inuentam:*	*ita sinus anguli BCD, complementi maioris anguli obseruati*	*ad DB,*

euadet iterum cognita recta DB, &c.

4 IAM vero si latitudo orificij AM, vel fundi BC, cognita fuerit, (Non erit autem difficile eam aliqua mensura nota metiri) facilius in cognitionem altitudinis, profunditatisve AB, veniemus, per vnicam videlicet stationem in D, factam, hoc modo. Fiat,

Vt sinus totus CB,	*ad BD, Tangentem anguli BCD, complementi anguli obseruationis:*	*ita latitudo cognita CB,*	*ad DB.*

Numerus enim procreatus offeret DB, notam, vt supra, &c.

VEL per solos sinus, *d* si fiat, *d 10. triang. rectil.*

Vt sinus anguli BDC, obseruationis	*ad latitudinem cognitam BC:*	*ita sinus anguli BCD, complementi anguli obseruationis.*	*ad DB,*

inuenietur rursus DB, &c.

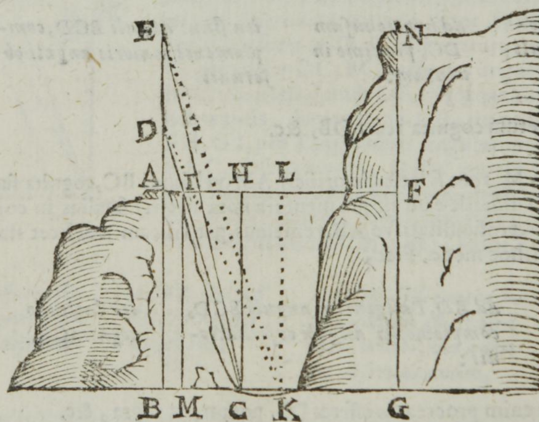
5 VT idem assequaris sine auxilio numerorum, consule ea, quæ problemate 4. num. 4. scripsimus.

PROFVNDITATEM vallis, eiusdemque descensum obliquum, si non sit valde inæqualis, eiusque terminus, vel aliquod in ea signum conspici possit, per Quadrantem scrutari.

PROBLEMA XXIIII.

1 HOC etiam nihil aliud est, nisi altitudinem quampiam ex eius summo fastigio per duas stationes dimetiri, vt problemate 4. ostensum est. Sit enim vallis inter duos montes AB, FG, posita, & terminus ipsius C, ex monte AB, possit conspici. Erecta hasta aliqua AE, fiant in D, & E, duæ stationes, obseruenturque anguli D, & E, inspecto termino C, per radios DC, EC. Intelligatur autem recta EA, vsque ad basem montis extensa in B: & recta excurrens AF, ipsi BG, parallela, vel ad EB, perpendicularis: & denique CH, ipsi AB, parallela, *a* quæ altitudini *AB*, æqualis erit, ita vt AB, vel HC, sit profunditas vallis ab A, vsque ad basem montis, & IC, eius descensus obliquus. Liquido autem constat, profunditatem AB, vel CH, exqui-

a 34. *primi.*



ri posse, vt problemate 4. altitudo turris AB, ex duabus stationibus in hasta AE, factis, vel in duabus fenestris, vel certe, vt in præcedenti problemate profunditas putei AB, inuenta fuit.

DESCENSVS autem obliquus IC, ita notus euadet. Quoniam, vt in antecedente problemate monstratum est, angulus DCE, differentia est angulorum BDC, BEC, obseruatorum: *b* si fiat,

b 10. trang. rectil.

Vt sinus anguli DCE, differentiæ inter angulos obseruatos	*ad DE, differentiam stationum oculorum:*	*ita sinus anguli E, minoris obseruati*	*ad DC,*

co-

cognita fiet recta DC, ex qua si detrahatur DI, (quam facile ab oculo vsque ad rectam AI, mensurare poteris, cum sit exigua) notus remanebit descensus obliquus IC.

2 QVOD si terminus C, in fundo cerni nequeat, inspiciendū erit ex D, & E, aliquod aliud signum K, in valle, & obseruandi anguli BDK, BEK, per radios DK, EK. Ex his enim rursus profunditas AB, vel KL, deprehendetur, vt in problemate 4. docuimus.

QVIN etiam, si in plano vallis commode duæ stationes fieri possint: cognosci ex illis poterit altitudo montis AB, vel IM, per ea, quæ in problem. 2. scripsimus: descensus vero obliquus IC, hoc est, interuallum inter I, & C, ex ijs, quæ in problemate 7. tradita sunt.

3 EANDEM denique profunditatem CH, perscrutari licebit ex altiore monte NG, dummodo infimus terminus C, minoris montis ex cacumine N, appareat, vel aliquod aliud signum in valle, non aliter, quam in problemate 18. vel 19. altitudinem minorem ex maiori incognita indagare docuimus. Nam hic maior altitudo est NG, & minor CH, cuius terminum C, ex N, cerni posse statuimus.

4 ABSQVE numerorum multiplicatione, ac diuisione res peragetur, vt in antecedentibus dictum est.

FINIS LIBRI SECVNDI.





GEOMETRIAE PRACTICAE

LIBER TERTIVS.

Earundem linearum rectarum dimensionem per Quadratum Geometricum exequens.





VONIAM dimensio rectarum linearum per Quadrantem Astronomicum superiori lib. exposita requirit tabulas Sinuum, Tangentium, & secantium, non semper autem eiusmodi tabulas ad manum habere possumus, immo neque omnes in illis uersati sunt, atque exercitati: propositum nobis tertio hoc libro est, lineas rectas, longitudines uidelicet, latitudines, altitudines, & profunditates dimetiri per Quadratum Geometricum, vbi prædictis tabulis non indigemus, sed omnia per umbram rectam, & uersam; ut uocant, expediuntur. Qua tamen in re non nihil ab alijs scriptoribus dissidebimus, quippe cum aliter tam umbram rectam, quam uersam in partes diuisuri simus, quam ab illis fieri solet: ut nimirum per nostram partitionem expeditius dimensiones perficiantur. quod prudens Lector facile

su-

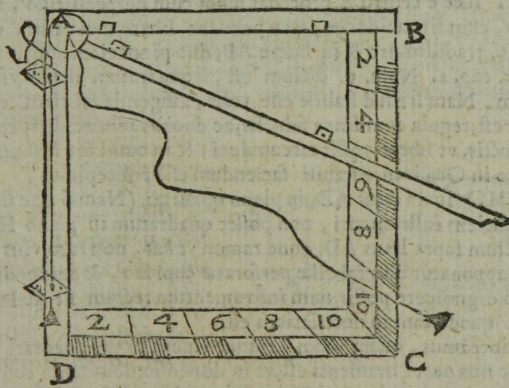
iudicabit, si nostram hanc diuisionis rationem cum aliorum partitione contulerit. Sed principio Quadratum Geometricũ construendum est, explicandumq. quo pacto tam in Quadrato stabili, quam in pendulo utraque umbra, recta uidelicet, ac versa considerari debeat. Neque enim semper eundem situm prædictæ umbræ in instrumento seruant, sed pro uarietate usuum non raro eum permutare solent, ut ex ijs, quæ sequuntur, liquido constabit.

QVADRATI Geometrici constructio.

1 EX quauis materia solida & dura conficiatur quadratum A B C D, siue solidum totum, siue excauatum: vel potius ex quatuor regulis æqualibus AB, BC, CD, DA, ita compactum, vt omnes in vno eodemque plano existant. Deinde in duabus regulis B C, CD, ducantur tres parallelæ extremitatibus quadrati, pro partibus & numeris vtriusque vmbræ designandis, vt in figura apparet. Latus BC, vmbræ rectæ, & CD, vmbræ versæ desti-

Compositio Quadrati Geometrici.

Vmbra recta, & versa in quadrato quæ, & in quot partes à Geometris vtraque secetur.



natur à Geometris: Vtrumque autem in 12. partes æquales partiri solent omnes, qui de vsu Quadrati Geometrici scripserunt: Et si capacitas instrumenti permittit, singulas partes in 60. subdiuidunt, vt tota vmbra partes 720. complectatur, vel in 100. vt partes 1200 in vtraque vmbra existant. Ego vtramq. vmbram in 10. partes duntaxat æquales diuido, nisi instrumentum sit tantæ magnitudinis, vt commode vtraque recta B C, C D, in 100. aut 1000. partes secari possit, subdiuisis videlicet singulis decimis partibus in 10. vel 100. particulas. Figura porro ex vtraque vmbra constans dici solet à Geo-

In quot partes vtraque vmbra in nostro quadrato diuidatur.

Scala altimetra quid

Quare nostra diuisio vmbræ præferatur aliorum diuisioni.

à Geometris Scala altimetra.

2 ANTEPONO autem diuisioni consuetæ in 12. vel 720. vel 1200. partes diuisionem nostram in partes 10. vel 100. vel 1000. æquales, propterea quòd, si instrumentum propter paruitatem sectum sit tantummodo in 10. partes, facili admodum negotio cognoscere possumus, quot centesimæ, vel etiam millesimę partes in qualibet particula cuiuscunque partis decimæ rectarum B C, C D, assignata comprehendantur: non secus ac si vtraque recta in 100. vel 1000. partes secta foret, vt Num. 14. cap. 2. lib. 1. copiose exposuimus. Huc accedit, quod in dimetiendis lineis per Quadratum Geometricum fieri semper debeat multiplicatio, aut diuisio per omnes partes lateris BC, vel CD: Manifestum autem est, faciliorem esse multiplicationem, diuisionemue per 10. aut 100. vel 1000. quàm per 12. aut 720. vel 1200. cum illa fiat per solam appositionem, vel detractionem 0. vel 00. vel 000. vt in nostra Arithmetica practica declarauimus.

INVENIO quidē latus quadrati à doctissimo Io. Antonio Magino diuisum quoq. esse, & quidē optimo consilio, in 100. partes æquales; quamuis ab eo regula non tradatur, qua cognoscendum sit, quot partes millesimæ in quauis particula vnius centesimæ comprehendantur, quod tamen omnino necessarium est, vt dimensiones, ac stellarum altitudines exquisitè obseruentur: præsertim si propter instrumenti paruitatem latus in 10. partes duntaxat commode possit diuidi. Id quod per nostram doctrinam, vt diximus, sine magno labore effici potest.

Quadratū pendulum, ac stabile.

3 POST hæc è centro A, procedat filum cum perpendiculo, aut certe regula tenuis, cum linea fiduciæ, quæ pendens libere moueatur, vt lib. 1. cap. 2. Num. 6, tradidimus: & in latere AB, duo pinnacidia affigantur, de quibus lib. 1. cap. 2. Num. 5. dictum est, si quadratum in suo vsu debeat esse pendulum. Nam si illud stabile esse velis, affigenda est circa centrū A, dioptra, hoc est, regula cum linea fiduciæ, ac duobus pinnacidijs, eodem artificio constructis, vt libere possit circumduci, & in omni situ firmari, vt loco supra citato in Quadrante stabili faciendum esse præcepimus.

POSTREMO iuxta latus AD, in plano quadrati (Nam si hoc fieret extra, prope crassitiem instrumenti, non posset quadratum in plano Horizontis locari erectum supra latus AD. quod tamen vt fiat, non raro vsus quadrati postulat:) apponatur duæ tabellæ perforatæ cum filo, & perpendiculo, vt eius beneficio dignoscere possis, num instrumentum rectum sit ad Horizontem, nec ne. quod omnino necessarium est.

Vmbra recta, & versa, quo pacto in vtroque quadrato cognoscenda sit.

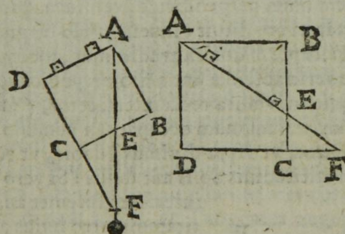
4 SED doceamus, quem situm vtraque vmbra in vsu quadrati habeat. Res enim hæc non parui momenti est, vt in dimensionibus nulla confusio inter vmbras oriatur. In quadrato ergo pendulo vmbra versa opponitur semper lateri pinnacidiorum: recta autem cum eodem latere concurrit in puncto à centro A, remotiori, vt in figura latus vmbræ rectæ est B C, versæ autem CD. At in quadrato stabili, si metienda sit altitudo, & centrum A, inferiorē obtineat locum, in eoque oculus ponatur, latus vmbræ rectæ supremam occupabit sedem; latus vero vmbræ versæ vergere debebit versus ipsam altitudinem: ita vt tunc basis instrumenti sit A D. quo pacto iterum vmbra recta est BC, & versa CD. Si autem centrum A, superiorem locum possideat, & oculus in extremitate dioptræ existat, (quod etiam fieri potest) latus vmbræ rectæ erit basis C D, & latus vmbræ versæ B C, prope oculum, & ab

alti-

altitudine metienda remotius. Si autem longitudo metienda proponatur, centrumque A, in superiori loco situm sit, & in eo oculus collocetur, erit quoq. basis CD, latus vmbræ rectæ: latus autẽ BC, vmbræ versæ deputabitur, quod quidẽ versus longitudinem metiendã vergere debebit, & longius ab oculo abesse. At vero si centrum A, ponatur in loco inferiori, ita vt basis sit AD, oculus autem in extremitate dioptræ consistat, (quod etiam fieri potest, præsertim si quadratum in sublimi fuerit positum, vt in monte, vel turri aliqua) latus vmbræ rectæ erit B C, basi A D, oppositum, vmbræ vero versæ latus erit CD, quod scilicet longius à longitudine metienda recedit. In vtroque porro quadrato centrum A, per diametrum opponitur puncto, in quo vmbra recta cum versa concurrit: & in stabili vmbra recta perpetuo vel supremum locum occupat, quando videlicet centrum A, infimam sedem tenet; vel infimum locum, quando scilicet centrum A, in superiori loco existit, vt ex dictis liquet. Hæc non negligenter consideranda sunt, ne in vario instrumenti vsu vmbrã rectam pro versa accipias, aut contra; quandoquidem pro diuerso situ quadrati stabilis tam latus B C, quam CD, modo vmbræ rectæ, modo versæ munus obire potest, vt diximus.

5 QVAMVIS autem vel sola vmbra recta, vel versa satis sit ad altitudines, longitudines, profunditatesque peruestigandas, vt ex sequentibus fiet manifestum: vtraque tamen assumitur à Geometris, eo quod interdum vmbra recta excedit latus B C, nimirum quando filum perpendiculi, aut linea fiduciæ secat latus CD: Tunc enim necessario latus BC, produci debet, vt secari possit. Item sæpe numero vmbra versa superat latus C D, quando videlicet filum perpendiculi, aut linea fiduciæ intersecat latus B C: Tunc enim necessario latus DC, productum versus C, secabitur, vt perspicuum est. Ne ergo cogamur vel latus BC, vel CD, producere, assumenda est vmbra quidem versa, quando recta latus BC, excedit: recta autem, quando versa suo latere CD, maior est.

6 EST autẽ perpetuo latus quadrati, quod Gnomonem appellant, medio loco proportionale inter vmbram rectam ac versam. Secet namque in quadrato pendulo filum perpendicu diculi, vel in stabili linea fiduciæ, latus vmbræ BC, in E, & latus vmbræ DC, productum in F. Erunt igitur triangula A B E, A D F, æquiangula, cum anguli B, D recti sint, *a* & tam alterni BAE, DFA, quam B E A, D A F, æquales. *b* Quamobrẽ erit vt BE, vmbra abscissa ad gnomonem BA, ita gnomon A D, ad vmbram abscissam DF: hoc est, gnomon BA, vel AD, medio loco est proportionalis inter duas vmbras BE, DF, quarum vna recta est, & altera versa.



Gnomon medio loco proportionalis est inter vmbrã rectam, & versam

a 29. *primi.*
b 4. *sexti.*

7 HINC facilis est reductio vnius vmbræ ad aliam, quod non raro vsu venit. Nam si gnomon complectens partes 1000. (in tot namque partes latus quadrati diuisum concipere lubet) in se multiplicetur, & productus numerus quadratus 1000000. lateris AB, per alterutram vmbram diuidatur, indicabit Quotiens partes alterius vmbræ: hoc est, si fiat,

Reductio vmbræ rectæ ad uersam, & contra.

Vt alterutra vmbra ad gnomonem ita gnomon ad alteram vmbram:

hoc eſt, ſi quadratus numerus lateris quadrati, vel gnomonis, videlicet 1000000. per alterutram vmbrã diuidatur. Verbi gratia ſi ponatur BE, vmbra recta partium 700. diuidaturq. numerus quadratus 1000000. lateris AB, per 700. producetur vmbra verſa D F, partium $1428\frac{2}{7}$. Sic etiam, ſi B E, ſtatuatur vmbra verſa partium 700. reperietur vmbra recta DF, partium $1428\frac{2}{7}$. Quod ſi vna vmbra ſit 400. erit altera 2500. & ſic de cæteris. Sed iam ad vſum vtriuſque quadrati accedamus.

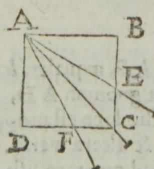
ALTITVDINEM Solis, vel ſtellæ cuiuſuis per quadratum Geometricum obſeruare.

PROBLEMA I.

Altitudo ſolis, vel ſtellæ, quo pacto per quadratum cognoſcatur.

1 PRAEPARETVR baſis plana Horizonti æquidiſtans, vt ſupra illam Quadratum ſtabile erectum, ſit ad Horizontem perpendiculare. Eleuetur deinde pendulum quadratum, centro A ad Solem, vel ſtellam verſo, ita vt eius planum per centrum Solis, aut ſtellæ tranſeat, donec radius Solis per duo foramina pinnacidiorum tranſire deprehendatur: vel radius viſualis per eadem foramina pinnacidiorum ſtellam videat. Idemque fiat cum quadrato ſtabili, collocando nimirum eius latus AD, vel CD, ſupra baſem præparatam, ipſumque circumducendo, ita vt eius planum per centrum Solis aut ſtellæ incedat; ac denique eleuando dioptram, donec radius Solis per foramina pinnacidiorum tranſeat, vel radius viſualis per eadem foramina ſtellam conſpiciat. Quo peracto, conſideretur ſumma diligentia angulus, quem filum perpendiculi, vel linea fiduciæ in dioptra cum proximo latere quadrati conſtituit, inueſtigando magna cum cura, & diligentia per ea, quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. tradidimus, quot partes milleſimæ ex vmbra ſiue recta, ſiue verſa abſciſſæ ſint à filo perpẽdiculi, vel linea fiduciæ. Ille enim angulus, ſi quidem vmbra recta interſecetur, (quæ in quadrato ſtabili vel ſupremum locum, vel infimum occupat: In pendulo vero cum latere pinnacidiorum coniungitur, vt ſupra diximus) dabit, vt Num. 2. demonſtrabimus, complementum altitudinis Solis aut ſtellæ: Si vero vmbram verſam filum, aut dioptra interſecet, ipſemet angulus altitudinem exhibebit.

Quando angulus, quem filum cum proximo quadrati latere facit, offerat altitudinem ſolis; & quando complementum altitudinis.



Quantitatem porro huius anguli ita cognoſcemus. Sit quadratum ſiue pendulum ſiue ſtabile (eadem enim eſt in vtroq. ratio) ABCD, abſciſſaque ſit vmbra recta B E, quæ in partibus milleſimis lateris BC, reperietur, vt cap. 2. Num. 14. lib. 1. docuimus, etiamſi latus ipſum ſit ſolũ in 10. vel 100. partes diuiſum: quæ quidem vmbra B E, ſtatuatur verbi gratia, eſſe partium 850. Quia ergo duo latera A B, BE, trianguli rectanguli ABE, nota ſunt, cum AB, ſit 1000, & BE, 850. a ſi fiat,

a 8. triang. rectil.

Vt

Vt latus quadrati AB, 1000.	*ad sinum totum 100000.*	*Ita latus, vel umbra BE, 850.*	*ad Tangentem anguli B A E,*

(quod quidem factum erit, si ad latus BE, hoc est, ad 850. duæ cifræ apponantur) reperietur Tangens anguli BAE, 85000. quæ in tabula Tangentium non reperitur; sed proxime minor est 84956. cui respondent grad us 40. min. 21. Et quia differentia inter Tangentem inuentam 85000. & 84956. in tabula sumptam, est 44. Differentia autem inter duas Tangentes proximas 84956. & 85006. est 50. cui debetur 1. minutum, siue Sec. 60. propterea quòd posteriori Tangenti 85006, respondet vnum minutum amplius, quàm Tangenti priori 84956. reperiemus per regulam trium, quot secunda differentiæ 44. congruant; si dicamus. Si differentia 50. poscit, sec. 60. quot secunda poscit differentia 44? inueniemusque sec. $52\frac{4}{5}$. hoc est, sec. 53. fere. Angulus ergo B A E, continent grad. 40. Min. 21. sec. 53. paulo minus. Complementum igitur, nimirum grad. 49. Min. 38. sec. 7. fere, ostendet altitudinem Solis, vel stellæ. Et si vmbra DF, est versa partium quoque 850. erit ipsemet angulus DAF, inuentus grad. 40. Min. 21. sec. 53. altitudo Solis, vel stellæ. Atque hoc modo si diligenter partes vmbræ explorabimus respectu lateris BC, vel CD, 1000. quemadmodum lib. 1. cap. 2. Num. 14. traditum est, inuenietur semper altitudo Solis, aut stellæ in grad. Min. & sec. Sed quia molestum est, ac laboriosum, per differentias Tangentium Secunda inquirere, satis erit Tangentem anguli inuẽtam in tabula quærere, & si quidem reperta fuerit, accipere gradus, & minuta respondentia; si vero non fuerit inuenta, sumereTangentẽ, vel minorẽ, vel maiorẽ quæ nimirũ minus ab inuenta, differat, &c. Hac ratione sumenda erit in nostro exemplo Tangens 86006. cui respondent grad. 40. Min. 22. complementum autem erit grad. 49. Min. 38. veluti prius, solum desunt sec. 7. quę nullius sunt momenti. Vt autem studiosos molestia hac supputandi liberem, construxi sequentem tabulam pro singulis partibus millesimis vtriusque vmbræ: In qua si centenæ in vertice, & reliquæ vnitates in latere sumantur, illico in angulo communi reperientur gradus, ac Min. pro angulo quæsito; qui videlicet altitudinem Solis aut stellæ indicabit, si partes millesimæ ad vmbram versam spectent: si autem partes ad vmbram rectam pertinent Complementum eius anguli altitudinem Solis stellęue ostendet, vt paulo infra demonstrabimus. Componetur autem tabula hæc, si singulis partibus millesimis vmbræ apponantur ad dextram quinque cifræ, & ex toto illo numero abijciantur tres cifræ; quod idem est, ac si apponantur tantum duæ cifræ, vt Tangentes angulorum habeantur, Ita factum esse vides supra: Nam ad partes vmbræ 850. adiectæ sunt duæ cifræ, vt Tangens fieret 85000. Hac enim ratione fit multiplicatio vmbræ abscissæ per sinum totum 100000. & diuisio per 1000. vt in Arithmetica nostra practica scripsimus. Quod si quatuor cifræ partibus millesimis apponantur, habentur eadem ratione Tangentes, posito sinu toto 10000000.

Vsus tabulæ gnomonicæ sequentis.

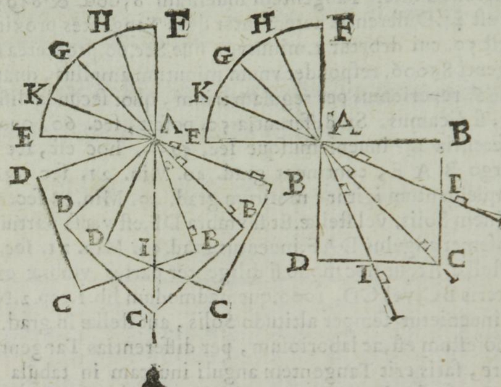
Compositio tabulæ gnomonicæ facillima.

2 VERVM demonstremus prius, angulum, quem filum perpendiculi, vel linea fiduciæ secans vmbram rectam cum proximo latere facit, in vtroque Quadrato esse complementum altitudinis Solis, seu stellæ; illum vero, quem filum aut fiduciæ linea vmbram versam secans efficit, exhibere ipsam

altitudinem. Sit ergo primum quadratum pendulum ABCD, & Quadrans circuli Verticalis per stellā ducti AEF, ita vt AE, Horizonti æquidistet: sintq. tres altitudines stellæ, EG, gr. 45. EH, maior, & EK, minor. Quando ergo latus pinnacidiorum AB, cum radio GA, coincidit, erit angulus altitudinis semirectus GAE, *a* qui æqualis est suo complemento FAG, propter æqua-

a 27. tertij.

Filum perpendiculi secans vmbram rectā facit angulum cōplementi altitudinis; secans vero vmbrē versam angulum constituit ipsius altitudinis.



b 15. primi. les arcus EG, FG, *b* hoc est, angulo quem filum cum latere AB, facit. Cum ergo diameter quadrati *c* secet angulos eius rectos bifariam, in semirectos nimirum, transibit filum per angulum C: Ac proinde tam CAB, quam CAD, æqualis tunc erit angulo altitudinis EAG. Quando autem pinnacidiorum latus cum radio HA, coincidit, erit angulus altitudinis EAH, semirecto maior, & angulus complementi FAH, semirecto minor, *d* cui æqualis est angulus IAB: ac propterea filum vmbram rectam intersecabit, facietque angulum complementi altitudinis IAB, semirecto minorem. Quando denique latus AB, idem efficitur cū radio KA, erit angulus altitudinis EAK, semirecto maior, & angulus cōplemēti FAK, semirecto maior, *e* cui æqualis est angulus IAB: ac proinde filum vmbram versam abrumpet, constituetque angulum altitudinis IAD, semirecto minorem. Idem prorsus cernitur in quadrato stabili ABCD, in quo vmbræ rectæ latus est infimum CD, cum centrum A, supremum occupet locum, vt supra in constructione Quadrati Num. 4. dictum est. Vbi rursus perspicitur, quando altitudo EG, est grad. 45. radium GA, cadere in angulum oppositum C, ac proinde tam angulum CAB, quam CAD, æqualem esse angulo altitudinis, nimirum semirectum. Quando autem altitudo EH, maior est, quam grad. 45. angulum IAD, quem linea fiduciæ AI, vmbram rectam auferens DI, cum latere AD, facit, *f* æqualem esse angulo FAH, qui complementum est anguli altitudinis EAH. Quando denique altitudo EK, minor est, quam grad. 45. angulum IAB, quem linea fidu-

c schol. 34. primi.
d 15. primi.
e 15. primi.
f 15. primi.

fiduciæ A I, vmbram versam B I, ascindens cum latere A B, constituit, *a* æqualem esse angulo ipsi altitudinis E A K; quæ omnia demonstrāda erant. *a 15. primi.* Sed ecce tibi tabulam, de qua dixi, continentem gradus, ac minuta angulorum, quos filum perpendiculi, vel linea fiduciæ in omnibus partibus millesimis vtriusque vmbræ cum proximo latere quadrati efficit. In qua vides, angulum sub parte 800. in vertice sumpta, & è regione partis 50. continere gradus 40. Min. 2 :. fere, vt supra diximus: ac tantus erit angulus altitudinis, si partes 850. spectent ad vmbram versam: eius vero complementum grad. 49. Min. 38. fere altitudinem exhibebit, si dictæ partes ex vmbra recta abscissæ fuerint. Tabula porro hæc dici potest Gnomonica, quod in quadrato stabili dicti anguli in tabula comprehensi efficiantur à gnomone AD, vel A B, cum linea fiduciæ, vt patet.

Tabula gnomonica cur sic dicatur.

SEQVITVR TABVLA Gnomonica.

Tabula Gnomonica.

	0		100.		200		300		400		500		600		700	
	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M
0	0	0	5	43	11	19	16	42	21	48	26	34	30	58	35	0
1	0	3	5	46	11	22	16	45	21	51	26	37	31	0	35	2
2	0	7	5	49	11	25	16	48	21	54	26	39	31	3	35	4
3	0	10	5	53	11	29	16	51	21	57	26	42	31	5	35	6
4	0	14	5	56	11	32	16	55	22	0	26	45	31	8	35	9
5	0	17	6	0	11	35	16	58	22	3	26	48	31	10	35	11
6	0	21	6	3	11	38	17	1	22	6	26	50	31	13	35	13
7	0	24	6	6	11	42	17	4	22	9	26	53	31	15	35	16
8	0	28	6	10	11	45	17	7	22	12	26	56	31	18	35	18
9	0	31	6	13	11	48	17	10	22	15	26	59	31	20	35	20
10	0	34	6	17	11	52	17	13	22	18	27	1	31	23	35	22
11	0	38	6	20	11	55	17	17	22	21	27	4	31	26	35	25
12	0	41	6	23	11	58	17	20	22	24	27	7	31	29	35	27
13	0	45	6	27	12	1	17	23	22	26	27	9	31	31	35	29
14	0	48	6	30	12	5	17	26	22	29	27	12	31	34	35	32
15	0	52	6	34	12	8	17	29	22	32	27	15	31	36	35	34
16	0	55	6	37	12	11	17	32	22	35	27	18	31	38	35	36
17	0	58	6	40	12	15	17	35	22	38	27	20	31	40	35	38
18	1	2	6	44	12	18	17	38	22	41	27	23	31	43	35	41
19	1	5	6	47	12	21	17	42	22	44	27	26	31	45	35	43
20	1	9	6	51	12	24	17	45	22	47	27	28	31	48	35	45
21	1	12	6	54	12	28	17	48	22	50	27	31	31	50	35	48
22	1	16	6	57	12	31	17	51	22	53	27	34	31	53	35	50
23	1	19	7	1	12	34	17	54	22	56	27	37	31	55	35	52
24	1	22	7	4	12	38	17	57	22	59	27	39	31	58	35	54
25	1	26	7	8	12	41	18	0	23	2	27	42	32	0	35	57
26	1	29	7	11	12	44	18	3	23	4	27	45	32	3	35	59
27	1	33	7	14	12	47	18	6	23	7	27	47	32	5	36	1
28	1	36	7	18	12	51	18	10	23	10	27	50	32	8	36	3
29	1	40	7	21	12	54	18	13	23	13	27	53	32	10	36	6
30	1	43	7	24	12	57	18	16	23	16	27	55	32	13	36	8
31	1	47	7	28	13	0	18	19	23	19	27	58	32	15	36	10
32	1	50	7	31	13	4	18	22	23	22	28	1	32	18	36	12
33	1	53	7	35	13	7	18	25	23	25	28	3	32	20	36	14

Tabula Gnomonica.

	0		100		200		300		400		500		600		700	
	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M
34	1	57	7	38	13	10	18	28	23	28	28	6	32	22	36	17
35	2	0	7	41	13	13	18	31	23	31	28	9	32	25	36	19
36	2	4	7	45	13	17	18	34	23	33	28	11	32	27	36	21
37	2	7	7	48	13	20	18	37	23	36	28	14	32	30	36	23
38	2	11	7	51	13	23	18	41	23	39	28	17	32	32	36	26
39	2	14	7	55	13	27	18	44	23	42	28	19	32	35	36	28
40	2	17	7	58	13	30	18	47	23	45	28	22	32	37	36	30
41	2	21	8	2	13	33	18	50	23	48	28	25	32	40	36	32
42	2	24	8	5	13	36	18	53	23	51	28	27	32	42	36	35
43	2	28	8	8	13	40	18	56	23	54	28	30	32	44	36	37
44	2	31	8	12	13	43	18	59	23	56	28	33	32	47	36	39
45	2	35	8	15	13	46	19	2	23	59	28	35	32	49	36	41
46	2	38	8	18	13	49	19	5	24	2	28	38	32	52	36	43
47	2	41	8	22	13	52	19	8	24	5	28	41	32	54	36	46
48	2	45	8	25	13	56	19	11	24	8	28	43	32	57	36	48
49	2	48	8	28	13	59	19	14	24	11	28	46	32	59	36	50
50	2	52	8	32	14	2	19	17	24	14	28	49	33	1	36	52
51	2	55	8	35	14	5	19	20	24	17	28	51	33	4	36	54
52	2	59	8	39	14	9	19	24	24	19	28	54	33	6	36	57
53	3	2	8	42	14	12	19	27	24	22	28	57	33	9	36	59
54	3	5	8	45	14	15	19	30	24	25	28	59	33	11	37	1
55	3	9	8	49	14	18	19	33	24	28	29	2	33	13	37	3
56	3	12	8	52	14	22	19	36	24	31	29	4	33	16	37	5
57	3	16	8	55	14	25	19	39	24	34	29	7	33	18	37	8
58	3	19	8	59	14	28	19	42	24	36	29	10	33	21	37	10
59	3	23	9	2	14	31	19	45	24	39	29	12	33	23	37	12
60	3	26	9	5	14	34	19	48	24	42	29	15	33	25	37	14
61	3	29	9	9	14	38	19	51	24	45	29	18	33	28	37	16
62	3	33	9	12	14	41	19	54	24	48	29	20	33	30	37	18
63	3	36	9	15	14	44	19	57	24	51	29	23	33	33	37	21
64	3	40	9	19	14	47	20	0	24	53	29	25	33	35	37	23
65	3	43	9	22	14	51	20	3	24	56	29	28	33	37	37	25
66	3	47	9	26	14	54	20	6	24	59	29	31	33	40	37	27
67	3	50	9	29	14	57	20	9	25	2	29	33	33	42	37	29

Tabula Gnomonica.

	0		100		200		300		400		500		600		700	
	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M
68	3	53	9	32	15	0	20	12	25	5	29	36	33	45	37	31
69	3	57	9	36	[illegible]	3	20	15	25	8	29	38	33	47	37	34
70	4	0	9	39	15	7	20	18	25	10	29	41	33	49	37	36
71	4	4	9	42	15	10	20	21	25	13	29	44	33	52	37	38
72	4	7	9	46	15	13	20	24	25	16	29	46	33	54	37	40
73	4	11	9	49	15	16	20	27	25	19	29	49	33	56	37	42
74	4	14	9	52	15	19	20	30	25	22	29	51	33	59	37	44
75	4	17	9	56	15	23	20	33	25	24	29	54	34	1	37	47
76	4	21	9	59	15	26	20	36	25	27	29	57	34	4	37	49
77	4	24	10	2	15	29	20	39	25	30	29	59	34	6	37	51
78	4	28	10	6	15	32	20	42	25	33	30	2	34	8	37	53
79	4	31	10	9	15	35	20	45	25	36	30	4	34	11	37	55
80	4	34	10	12	15	39	20	48	25	38	30	7	34	13	37	57
81	4	38	10	16	15	42	20	51	25	41	30	9	34	15	37	59
82	4	41	10	19	15	45	20	54	25	44	30	12	34	18	38	2
83	4	45	10	22	15	48	20	57	25	47	30	15	34	20	38	4
84	4	48	10	26	15	51	21	0	25	50	30	17	34	22	38	6
85	4	52	10	29	15	54	21	3	25	52	30	20	34	25	38	8
86	4	55	10	32	15	58	21	6	25	55	30	22	34	27	38	10
87	4	58	10	36	16	1	21	9	25	58	30	25	34	29	38	12
88	5	2	10	39	16	4	21	12	26	1	30	27	34	32	38	14
89	5	5	10	42	16	7	21	15	26	4	30	30	34	34	38	16
90	5	9	10	45	16	10	21	18	26	6	30	32	34	36	38	19
91	5	12	10	49	16	14	21	21	26	9	30	35	34	39	38	21
92	5	15	10	52	16	17	21	24	26	12	30	38	34	41	38	23
93	5	19	10	55	16	20	21	27	26	15	30	40	34	43	38	25
94	5	22	10	59	16	23	21	30	26	17	30	43	34	46	38	27
95	5	26	11	2	16	26	21	33	26	20	30	45	34	48	38	29
96	5	29	11	5	16	29	21	36	26	23	30	48	34	50	38	31
97	5	32	11	9	16	32	21	39	26	26	30	50	34	53	38	33
98	5	36	11	12	16	36	21	42	26	28	30	53	34	55	38	35
99	5	39	11	15	16	39	21	45	26	31	30	55	34	57	38	37
100	5	43	11	19	16	42	21	48	26	34	30	58	34	0	38	40

Tabula Gnomonica.

	800		900			800		900			800		900	
	G	M	G	M		G	M	G	M		G	M	G	M
0	38	40	41	59	34	39	50	43	3	68	40	57	44	4
1	38	42	42	1	35	39	52	43	5	69	40	59	44	6
2	38	44	42	3	36	39	54	43	6	70	41	1	44	8
3	38	46	42	5	37	39	56	43	8	71	41	3	44	9
4	38	48	42	7	38	39	58	43	10	72	41	5	44	11
5	38	50	42	9	39	40	0	43	12	73	41	7	44	13
6	38	52	42	11	40	40	2	43	14	74	41	9	44	15
7	38	54	42	12	41	40	4	43	16	75	41	11	44	16
8	38	56	42	14	42	40	6	43	17	76	41	13	44	18
9	38	58	42	16	43	40	8	43	19	77	41	15	44	20
10	39	0	42	18	44	40	10	43	21	78	41	17	44	22
11	39	3	42	20	45	40	12	43	23	79	41	19	44	24
12	39	5	42	22	46	40	14	43	25	80	41	21	44	25
13	39	7	42	24	47	40	16	43	26	81	41	23	44	27
14	39	9	42	26	48	40	18	43	28	82	41	25	44	29
15	39	11	42	28	49	40	20	43	30	83	41	27	44	31
16	39	13	42	29	50	40	22	43	32	84	41	29	44	32
17	39	15	42	31	51	40	24	43	34	85	41	31	44	34
18	39	17	42	43	52	40	26	43	35	86	41	32	44	36
19	39	19	42	35	53	40	28	43	37	87	41	34	44	37
20	39	21	42	37	54	40	30	43	39	88	41	36	44	39
21	39	23	42	39	55	40	32	43	41	89	41	38	44	41
22	39	25	42	41	56	40	34	43	43	90	41	40	44	43
23	39	27	42	42	57	40	36	43	44	91	41	42	44	44
24	39	29	42	44	58	40	38	43	46	92	41	44	44	46
25	39	31	42	46	59	40	40	43	48	93	41	46	44	48
26	39	33	42	48	60	40	42	43	50	94	41	48	44	50
27	39	35	42	50	61	40	44	43	52	95	41	50	44	51
28	39	37	42	52	62	40	46	43	53	96	41	52	44	53
29	39	40	42	54	63	40	48	43	55	97	41	54	44	55
30	39	42	42	55	64	40	50	43	57	98	41	55	44	57
31	39	44	42	57	65	40	52	43	59	99	41	57	44	58
32	39	46	42	59	66	40	54	44	1	100	41	59	45	0
33	39	48	43	1	67	40	56	44	2					

3 SIMILEM tabulam gnomonicam composuit quoque Georgius Purbacchius in suo quadrato Geometrico, posito latere partium 1200. eamque ad secunda extendit: quod etiam fecit Io. Antonius Maginus, constituto quadrati latere partium 1000. quod quidē serius animaduerti. Incidi.n. casu quodam in eam, cum hanc meam pene absolueram. alioquin hoc supputandi labore supersedissem, tabulamque Magini huc transtulissem. Itaque si quis in altitudinibus astrorum desideret etiam secunda, petere ea debebit ex Magini tabula: quæ sane fideliter, & accurate ab eo supputata est, vel certe per calculum eadem elicere, vt supra Num 1. docuimus in hoc probl. Sed meo iudicio contenti esse possumus hac nostra, quæ ad Minuta solum vltra gradus progreditur. In qua, si eam cum illa Magini conferre quis volet, deprehendet, in nostra Minutis graduum additum esse semper vnum minutum, quando in ea reperiuntur plura secunda, quam 30. Sed vt verum fatear, neque nostra, neque illa Magini omnino necessaria est, cum ipsæmet partes millesimæ lateris quadrati, si apponantur duæ cifræ, sint tangentes altitudinum respectu sinus totius 100000. & eædem, si addantur quatuor cifræ, Tangentes easdem, posito sinu toto 10000000. exhibeant: ac proinde ex tabula Tangentium altitudines excerpi possint cuicunq. parti millesimæ congruentes, si ei prius adiungantur duæ, aut quatuor cifræ, vt supra ad finem Num. 1. ostendimus. Quia tamen molestia non caret, per Tangentes hac ratione formatas ex tabula Tangentium angulos altitudinum eruere, quod raro admodum Tangentes illæ in tabula præcise reperiantur, ac propterea pro illis accipiendæ sint vel proxime minores, vel maiores, illæ videlicet, quæ paucioribus vnitatibus ab inuentis differunt: non abs re fuerit, vel tabulam hanc nostram Gnomonicam, vel illam Magini, si secunda etiam desiderentur, adsciscere.

Tabulam gnomonicam non esse absolute necessariam. Quo pacto partes millesimæ lateris Quadrati offerant tangentes, posito sinu toto 10000. vel 10000000.

4 QVAMVIS autem tabula Gnomonica per solas partes millesimas integras progrediatur; tamen si quando ex doctrina cap. 2. Num. 14. lib. 1. tradita vltra millesimas integras supersit adhuc aliqua particula, nōn magnus error in altitudinibus astrorum obseruandis committi potest. Cum enim anguli in tabula crescant ordine per tria duntaxat minuta, vel duo, vel vnum, non fiet error nisi vnius aut alterius minuti, etiamsi fractio illa millesimæ partis negligatur. Quod si errorem hunc, licet minimū, vitare cupis, considera fractionem millesimæ, an sit tertia pars, an semissis, an vero duæ tertiæ partes. quod iudicio sensus facile cognosces ex particula illa, quæ vltra partes decimas circino percursas superest. Nam vbi anguli in tabula per tria Minuta augentur, addendum erit vnum minutum, vel duo, prout particula illa reliqua fuerit $\frac{1}{3}$. vel $\frac{2}{3}$. Idem faciendum erit si dicta particula fuerit maior, quam $\frac{1}{3}$, minor tamen, quam semissis. Tunc enim addendum erit etiam vnum Minutum. Item quando particula illa maior fuerit, quam semissis, addi possunt duo minuta. At quando anguli tabulæ augentur per duo Minuta, addendum erit vnum minutum pro semisse vnius partis millesimæ, &c.

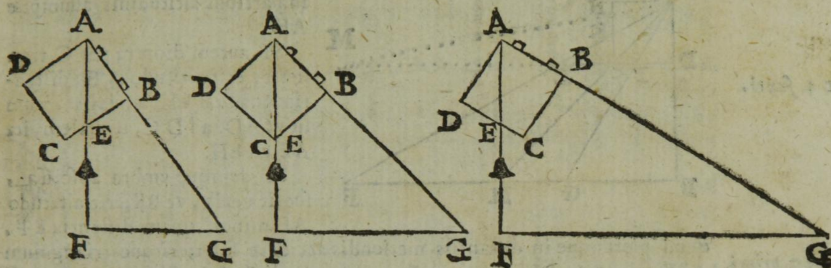
Non magnus error in altitudinibus committitur, etiamsi per integras millesimas tabula progrediatur, & quo pacto error hic corrigēdus sit.

DISTANTIAM inter te, & signum quodcunque in plano Horizontis positum, per Quadratum Geome-

metricum peruestigare.

PROBLEMA II.

1 SIT distantia metienda FG. Hoc per quadratum pendulum sic fiet. Erigatur ex F, altitudo quæpiam nota FA, Horizonti ad angulos rectos, siue ea sit statura mensoris ab oculo ad planum, siue maior quædam altitudo. Inspiciatur extremum G, per radium AG, ab oculo A, per foramina pinnacidiorum in cedentem, filo perpendiculi libere pendente, & instrumentum radente,



te, punctumque E, notetur, vbi filum latus quadrati interfecat, quod fiet vel in latere BC, vmbræ rectæ, vel in angulo C, vel in latere DC, vmbræ versæ. Cadente namque filo in vmbram rectam, vel in punctum C, vt in 1. & 2. figura, fiet triangulum ABE, triangulo AFG, æquiangulum, cum anguli B, F, sint recti, & angulus A, communis. *a* Si igitur fiat, a 4. *sexti.*

Vt latus AB. partium 1000.	*ad vmbram rectam abscissam BE,*	*Ita altitudo nota AF,*	*ad FG, distantiam,*

euadet nota distantia quæsita FG, in partibus altitudinis AF. Cadēte autē puncto E, in vmbram versam, vt in 3. figura, abscindetur rursus triangulum ADE, triangulo AFG, æquiangulum, cum anguli D, F, recti sint, *b* & alterni AED, FAG, æquales. *c* Ergo si fiat, b 29. *primi.* c 4. *sexti.*

Vt vmbra versa abscissa DE,	*ad latus DA, partiū* 1000,	*Ita altitudo nota AF,*	*ad FG, distantiam,*

nota quoque efficietur distantia quæsita FG, in partibus altitudinis AF. Ex quo illud intelligere poteris, quando punctum E, intersectionis fili cum latere quadrati cadit in vmbram rectam, altitudinem AF, maiorem esse distantia FG: quando in punctum C, æqualem; quando denique in vmbram versam, minorem.

Quando altitudo maior est, quā distantia, & quando æqualis, & quando minor.

2 QVADRATO ſtabili ita eandem diſtantiã explorabimus. Erigatur in extremo diſtantiæ E, altitudo quædam perpendicularis notarum partium, & quadratũ ita accõmodetur, vt centrum A, ſuperiorem locum occupet, & vmbra recta DC, Horizonti æquidiſtet. Directa igitur dioptra ad ſignum propoſitum, notetur diligenter vmbra abſciſſa: quæ ſi recta fuerit, nimirum DI, erit altitudo AE, maior, quam diſtantia EG, *a* triangulumque ADI, triangulo AEG, ſimile erit. *b* Si igitur fiat,

a coroll. 4. ſexti.
b 4. ſexti.

Vt latus quadrati AD, 1000.	*ad partes vmbræ rectæ DI:*	*Ita altitudo AE, cognita*	*ad EG, diſtantiam,*

reperietur diſtantia quæſita EG, in partibus altitudinis aſſumptæ AE.

SI autem dioptra per C, tranſierit, erit altitudo AE, diſtantiæ quæſitæ EH, æqualis: *c* cum ſit vt AD, ad DC, æqualem, ita AE, ad EH.

c 4. ſexti.

SI denique vmbra abſciſſa fuerit verſa, vt BK, erit altitudo AE, minor, quam diſtantia EF. quod plerunque in diſtantijs metiendis accidere ſolet; eritque triangulum ABK, triangulo AEF, æquiangulum, cum anguli B, E, recti ſint, *d* & alterni BAK, AFE, æquales. *e* Quare ſi fiat,

d 29. primi.
e 4. ſexti.

Vt partes vmbræ verſæ BK,	*ad latus quadrati AB, 1000.*	*Ita altitudo nota AE,*	*ad EF, diſtantiam,*

producetur quæſita diſtantia EF, in partibus altitudinis erectæ AE.

3 QVANDO diſtantia non valde magna eſt, vel extremum eius punctum facile videri poteſt ſatis erit, ſi quadratum ſupra planum Horizontis conſtituatur, ita vt vmbræ verſæ latus EC, ad punctum illud recta vergat. Vt ſi diſtantia horizontalis DM, metienda ſit, eique imponatur Quadratum erectum, mouenda eſt dioptra, donec linea fiduciæ in extremum M, dirigatur. Qua ratione ſemper vmbra verſa BC, abſcindetur. Nam ſi linea fiduciæ per C, tranſiret, aut vmbram rectam CD, interſecaret, eſſet diſtantia vel æqualis lateri CD, vel minor: ac proinde dimenſione non indigeret. Quoniam igitur rurſus triangulum NBA, triangulo ADM, æquiangulum eſt, propter rectos angulos B, D, *f* & alternos æquales BAN, AMD; *g* Si fiat,

f 29. primi.
g 4. ſexti.

Vt partes vmbræ verſæ BN,	*ad latus quadrati AB, 1000.*	*Ita latus quadrati AD, 1000.*	*ad DM, diſtantiam,*

cognita erit diſtantia DM, in partibus milleſimis lateris quadrati AD.

4 SOLENT nonnulli ſcriptores non inquirere diſtantiam propoſitam in partibus altitudinis aſſumptæ AE, vel in partibus milleſimis lateris quadrati AD; ſed ſolum inueſtigant, quoties altitudo electa AE, vel latus quadrati

drati AD, in distantia proposita contineatur: quod idem est, ac si altitudo, aut latus vmbræ statuatur 1. Atq. ita diuidunt vel partes vmbræ rectæ abscissas per totum latus partium 1000. vel totum latus vmbræ versæ per partes vmbræ versæ abscissas. Nam Quotiens numerus indicat, quoties altitudo AC, vel latus Quadrati in proposita distantia comprehendatur: cum sit,

Vt totum latus AD, partiũ 1000.	*ad partes vmbræ rectæ DI,*	*ita altitudo AE, vel latus AD, vt 1.*	*ad distantiam EG, vel DI,*

Item.

Vt partes vmbræ versæ BN,	*ad totum latus AB, 1000.*	*Ita altitudo AE, vel latus AD, vt 1.*	*ad distantiam EF, vel DM,*

Hinc enim fit, vt cum secundum præceptum regulæ trium tertius numerus in secundum sit ducendus, productusque numerus per primum diuidendus, satis fit, si secundus per primum diuidatur: quandoquidem vnitas in tertio loco posita, si multiplicet secundum numerum, eundem secundum numerum procreat, &c.

HAC ratione, si duæ partes millesimæ abscindãtur ex vmbra versa, continebitur altitudo AE, vel latus AD, in distantia secundum hunc numerũ 500. quòd 1000. diuisa per 2. dent Quotientem 500. At vmbra versa trium millesimarum dabunt Quotientem $333\frac{1}{3}$. qui à priori differt hoc numero, $166\frac{2}{3}$. Ex quo intelligi licet, quando vmbra versa abscissa valde parua est, magnum posse errorem committi in distantia inuestiganda. Cum enim partes millesimæ sint perexiguæ, facile decipi possumus, vt nimirum putemus, abscissas esse tres millesimas, cum fortassis solum duæ abscissæ sint: ac proinde error committi poterit $166\frac{2}{3}$. altitudinum A E, vel laterum A D, qui error contemnendus non est. At quando partes vmbræ versæ plures millesimas continent, non tantus error committitur, etiamsi vnam millesimam pro altera accipiamus. Nam si verbi gratia putemus, abscissas esse partes $\frac{30}{1000}$. ex vmbra versa, cum vere abscissæ sint $\frac{31}{1000}$. error fieri poterit solum in 1. altitudine A E, vel latere A D, & $\frac{7}{93}$. cum $\frac{30}{1000}$. dent Quotientem $33\frac{1}{3}$. at $\frac{31}{1000}$. Quotientem offerant $32\frac{8}{31}$. Itaque magis probo, vt Quadratum in altiori loco statuatur, quam in plano Horizontis, quia ibi plures partes vmbræ versæ abscinduntur, quam hic, vt constat in distantijs æqualibus EF, DM. Vides ergo magnam esse adhibendam diligentiam, vt accurate partes millesimæ reperiantur per ea, quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. scripsimus.

IAM vero, si quadratum constructum sit ad certam aliquam mensuram, hoc est, vt latus contineat vel 1. passũ, vel 1. cubitũ, vel 2. pedes, aut palmos, aut 3. aut 4. &c, res erit expeditissima, si semel tantũ latus particularũ 1000. ducatur in mensuras, quibus latus æquiualet. Ita enim in longitudinibus exquirendis, si quadratum supra planum, in quo est longitudo, statuatur, (vt fit in omnibus hypotenusis, siue distantijs à loco mensoris vsque ad aliquod punctum mensore sublimius, depressiusue, quemadmodum patuit in proxima figura, quando longitudo DM, inquisita est, patebitque in scholio problematis 7. & in scholio problem. 9. Item in problem. 15. Num. 5. & in problem. 26. Num. 3. & in problem. 27. Num. 3. nec non in problem. 37. & 38.

Num. 3.& denique in probl.43.& 44. & in alijs locis)diuidendus ſolum eſt numerus productus per partes vmbræ verſæ (quæ ſemper abſcinditur)notatas. Quotiens enim dabit longitudinem quæſitam in data menſura. Verbi gratia, ſi in vno latere comprehendantur 3. pedes, multiplicabimus latus 1000. per 3. efficiemuſq. 3000. Itaq. ſi in inueſtiganda longitudine quapiam abſciſſæ ſint partes 200. ex vmbra verſa, partiemur 3000. per 200. Nam Quotiens 15. dabit 15. pedes pro quæſita longitudine. a Nam cum in proxima figura ſit, vt vmbra verſa NB, 200. ad latus BA, 1000. Ita latus A D, 3. pedum ad D M, multiplicandum eſt latus 1000. per 3. pedes, & productus numerus 3000. per 200. diuidendus. Eademque de cæteris ratio eſt. Sic ſi latus contineret $\frac{1}{2}$. cubiti, diuidendus eſſet numerus 500. ex $\frac{1}{2}$. in 1000. procreatus per vmbram verſam. Pari ratione ſi latus complecteretur 10. palmos, diuidendus eſſet numerus 10000. genitus ex 10. in 1000. per vmbram verſam: vt in Quotiente prodeant palmi in longitudine contenti, &c. quod non indiligenter notandum eſt.

a 4. ſexti.

ALITER

5 QVANDO diſtantia metienda magna eſt, & adeſt bona planities campi, vti poterimus Quadrato ſtabili commodiſſime hoc modo. Sit diſtantia oblata AE. Erigatur quadratum ad Horizontem ad rectos angulos, circumducaturque, donec per eius planum oculus in A, conſtitutus ſignum E, perſpiciat, atque linea noterur AG. Demiſſo dein de Quadrato vſque ad Horizontis planum, ita vt latus AB, recta tendat ad ſignum E, hoc eſt, à recta notata A G, non recedat, protendatur linea recta per latus AD, in qua accipiantur quotcunque partes lateri A D, æquales: vel quotcunque aliæ menſuræ æquales, vt paſſus, vel cubiti, vſque ad punctum a, in quo rurſus erigatur quadratum, (In hoc ſecundo quadrato aſcripſimus literas minuſculas, ne literæ vnius quadrati cum literis alterius confundantur, quod in ſequentibus etiam obſeruabimus.) vertaturque, donec per eius planum idem ſignum E, appareat per rectam aH. Poſt hæc quadratum Horizonti incumbat, latuſque a d, rectæ A a, congruat, & dioptra circũducatur, donec eius linea fiduciæ rectæ aH, præciſe ſit ſuppoſita, notenturque partes milleſimæ in portione vmbræ verſæ b F, quã diligentiſſime. Abſcindetur autem ſemper vmbra verſa, propterea quod diſtantia AE, proponitur magna, ſaltem maior, quam Aa: alioquin menſurari poſſet ſine quadrato, quemadmodum & Aa. Quibus peractis, erunt triangula a b F, a AE, æquiangula, cum angulos habeant rectos b b, A, & alternos æquales baF, A E a. c Si ergo fiat,

b 29. primi.
c 4. ſexti.

Vt umbra bF, ad latus ba, 1000. Ita aA, nota ad AE, distantiam,

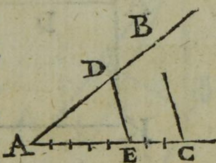
inuenietur distãtia AE, in partibus rectæ Aa. Vel si diuidatur latus b a, 1000. per partes millesimas vmbræ B F, procreabitur numerus, secundum quem recta Aa, in distantia eadem AE, continetur: posita nimirum recta Aa, vt 1. vt Num. 4 ostendimus.

6 QVOD si ad manum non habeamus Quadratum, obtinebimus eandem distantiam beneficio baculi, vel arundinis hoc artificio. Figatur baculus, vel arundo in G, ad rectos angulos plano Horizontis. quod per filum aliquod cum perpendiculo facile fiet. Deinde recede per quotlibet passus vsque ad A, ita vt visus per baculum incedens feratur in signum E. Post hæc ducatur linea Aa, ad AE, perpendicularis, in qua numera quotlibet etiam passus vsque ad a. Ducta tandem G I, ad AE, quoque perpendiculari, & ipsi A a, æquali, figatur rursum baculus ad angulos rectos in tali puncto rectæ G I, nimirum in H, vt oculus iterum ex a, per baculum incedens feratur in signum E: inquiranturque exquisitissime passus vna cum fragmentis vnius passus in H I, contenti. His enim peractis, quoniam rursus triangula H I a, a AE, æquiangula sunt, ob angulos rectos I, A, & alternos æquales IaH, AEa, *a* si fiat, a 4. *sexti.*

Vt H I, nota ad I a, notam Ita a A, nota ad AE, distantiam,

efficietur nota distantia AE, in partibus rectarum GA, Aa, a I. Vel si diuidatur a I, nota per IH notam, reperiemus, quoties Aa, in distantia AE, contineatur, si nimirum recta A a, ponatur vt 1.

7 IAM vero absque numerorum auxilio problema absoluemus, si attente ea considerentur, quæ lib. 2. problem. 1. Num. 7. scripsimus. Nam si fiat angulus quicunque B A C, & pro primo exemplo Num. 1. huius problem. sumatur A D, æqualis lateri quadrati A B, vel si esset nimis magnum, æqualis semissi, vel tertiæ parti, aut quartæ, &c. eiusdem lateris. Deinde DB, æqualis vmbræ abscissæ BE, (quæ summa cura per circinum in quadrato accipienda est) vel eius semissi, vel tertiæ parti, aut quartæ &c. vt nimirum AD, DB, sint æque submultiplices lateris AB, & vmbræ BE, si eis æquales non sunt. Post hæc ex instrumento partium sumatur A E, tot particularum, quot palmi, aut pedes in altitudine AF, continentur. Si enim iunctæ rectæ D E, parallela agatur B C, continebit distantia FG, tot palmos, aut pedes, quot particulæ instrumenti partium in interuallo EC, comprehenduntur. Vt si altitudo AF, sit pedum. 5. erit distantia FG, pedum. 3. & sic de cæteris. Atque hoc modo procedendum erit in alijs exemplis omnibus, considerando videlicet attente primas tres magnitudines Regulæ trium, &c. quod semel monuisse satis est.



DISTANTIAM in plano per duas stationes in eodem plano factas per quadratum Geometricum metiri

tiri

tiri, quando in eius extremo erecta est altitudo aliqua perpendicularis, etiamsi infimum eius extremum non cernatur.

PROBLEMA III.

1 DISTANTIA inuestiganda sit AF. Intelligatur planum Horizontis K L; erecta altitudo G L: statura mensoris A K, vel alia quædam mensura cognita. Supra aliquã basem Horizonti æquidistantem collocetur quadratum stabile, ita vt eius latus AD, cogitatione productum occurrat altitudini erectæ in F, ad angulos rectos. Inspiciatur summitas G, per dioptram, secetque eius linea fiduciæ vmbram versam C D, in E. quod semper contingit, quando distantia A.F, maior est altitudine FG. *a* quod tunc angulus A, minor fiat angulo G, ac proinde semirecto minor, quem cum AD, in A, faceret radius per C, emissus. Deinde accede magis, vel recede per longitudinem

a 18. primi.

notam Aa, & collocato quadrato supra eandem basem, secet iterum dioptra ad punctũ G, directa vmbram versam c d, in H: eritque vmbra versa d H, in propinquiore statione maior, quam vmbra versa DE, in statione remotiore, *b* quod angulus a, maior sit angulo. A. Auferatur d I, ipsi D E, æqualis, vt HI, differentia sit vmbrarum versarũ. *c* Et quia est, vt AD, ad DE, ita A F, ad FG: *d* erit rectangulo sub A D, F G, æquale rectangulum sub D E, A F. Eadem ratione erit rectangulo sub a d, FG. rectangulũ sub dH, aF, æquale: propterea quod etiam est *e* vt a d, ad dH, ita aF, ad F G. Cum ergo rectangulum sub AD, FG, æquale sit rectangulo sub a d, FG, quod rectæ AD, a d, æquales sint: erit quoque rectangulum sub dH, aF, rectangulo sub DE, AF, hoc est, sub dI, AF, æquale; *f* ideoque erit, vt dH, prima ad dI, secundam, ita AF, tertia ad aF, quartam: Et permutando, vt tota dH, ad totam AF, ita ablata d I,

b 16. sexti.
c 4. sexti.
d 16. sexti.
e 4. sexti.
f 16. sexti.

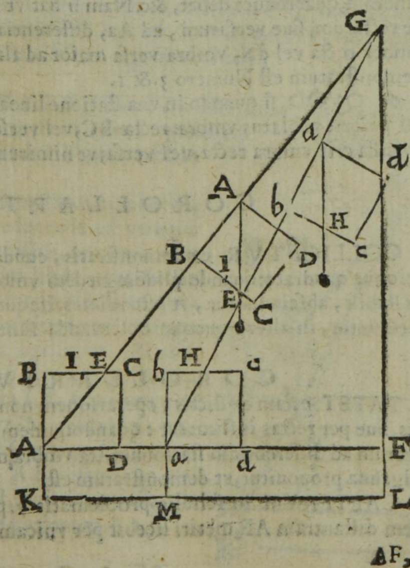
ad ablatam aF. *a* Igitur erit quoque reliqua HI, ad reliquam Aa, vt tota d H, ad totam AF. Quocirca si fiat, a 19. *quinti*

Vt HI, differentia vmbrarum versarum	*ad Aa, differentiam stationum:*	*Ita dH, vmbra versa propinquioris stationis, siue maior,*	*ad AF, distātiā*

producetur AF, distantia nota in partibus differentiæ stationum Aa, notæ.

2 EADEM prorsus ratio est in quadrato pendulo. Nam filum perpendiculi abscindit quoque triangula ADE, adH, triangulis AFG, aFG, æquiāgula: propterea, quod tam anguli D, F, recti sunt, *b* & angulus F, hoc est, alternus BAE, angulo AGF, externus interno æqualis; quam anguli d, F, recti, & angulus H, id est, alternus baH, angulo a G F, externus interno æqualis. Reliqua demonstrabuntur, vt prius. sunt enim vmbræ versæ in pendulo quadrato vmbris in stabili æquales. Nam cū duo anguli D, E, in triangulo ADE, quadrati penduli æquales sint duobus angulis D, E, in triangulo A D E, quadrati stabilis, quod ea triangula sint, vt ostendimus, æquiangula: sint autem & latera AD, AD, æqualia; *c* erūt & rectæ DE, DE, hoc est, vmbræ versę, æquales. Eademque ratione versæ vmbræ d H, d H, æquales erunt, &c. b 29. *primi.* c 26. *primi.*

3 SI in vtraque statione vmbra recta abscindatur à linea fiduciæ, vel à filo perpendiculi, vt in E, & H. quod quidem semper continget, quando distantia AF, minor est altitudine F G, *d* quod tunc angulus A, maior fiat angulo G, ac proinde semirecto maior, quem cum AD, constitueret radius per C, emissus. Eritque vmbra recta BE, in remotiore statione maior, quam vmbra recta bH, in statione propinquiore, *e* quòd angulus FaG, maior sit angulo F A G; ac proinde baH, minor angulo BAE. Auferatur BI, ipsi b H, æqualis, vt IE, differentia sit vmbrarum rectarum. Et quia triāgula ABE, AFG, æquiangula sunt, propter angulos rectos B, F, *f* & alternos æquales *B* A E, A G F: *g* erit vt AB, ad BE, ita F G, ad A F, & permutando, vt A B, ad FG, ita BE, ad AF. Eadem ratione, quia triāgula abH aFG, æquiangula sunt, propter rectos angulos b, F, *h* & alternos ęquales baH, aGF, *i* erit vt a b, ad bH, ita FG, ad a F: Et permutando vt a b, ad FG, ita bH, ad AF. Cum ergo sit, vt A B, ad FG, ita a b, ad FG, propter rectas æquales AB, a b. *k* erit quoque vt B E, tota ad d 18. *primi.* e 16. *primi* f 29. *primi.* g 4. *sexti.* h 29. *primi.* i 4. *sexti.* k 11. *quinti*



AF,

a 19. quinti — AF, totam, ita BI, ablata ipsi bH, æqualis, ad ablatam a F. *a* Igitur erit & reliqua IE, ad reliquam Aa, vt tota BE, ad totam AF. Quapropter si fiat,

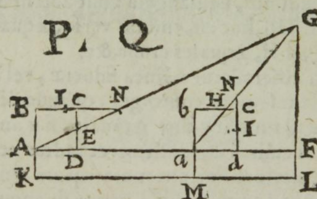
Vt IE, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiã stationum:*	*Ita BE, vmbra recta remotioris stationis, siue maior*	*ad AF, distantiam,*

procreabitur AF, distantiam nota in partibus differentiæ stationum Aa, notæ.

4 EADEM omnino in quadrato pendulo est ratio. Nam filum perpendiculi abscindit quoque triangula ABE, abH, triangulis AFG, aFG, æquiangula; quod tam anguli B, F, recti sint, *b* & angulus BAE, angulo A G F, externus interno æqualis, quam anguli b, F, recti, & angulus baH, angulo aGF, æqualis, externus interno. Reliqua demonstrabuntur, vt in stabili quadrato. Sunt enim vmbræ rectæ in quadrato pendulo vmbris rectis in stabili æquales. Nam cum duo anguli B, E, in triangulo ABE, quadrati penduli, æquales sint duobus angulis B, E, in triangulo A B E, quadrati stabilis; quod hæc triangula sint, vt ostensũ est, æquiangula, vt pote æquiãgula triangulo AG F; *c* erunt & rectæ BE, BE, hoc est, vmbræ rectæ æquales. Eademque ratione vmbræ rectæ bH, bH, æquales erunt &c.

b 29. primi.

c 26 primi.



5 SI deniq. in remotiore statione secetur vmbra versa CD, in E, & recta b c, in H, in statione propinquiore, reducenda erit alterutra earum ad alteram, vt habeantur similes vmbræ, per ea, quæ in quadrati constructione Num. 7. ad initium huius lib. tradidimus, diuidendo nimirum quadratum lateris A B, per vmbram, quæ reduci debet, &c. Nam si fiat vt IN, differentia vmbrarum siue rectarum, siue versarum, ad Aa, differentiam stationum: Ita B N, maior vmbra recta vel dN, vmbra versa maior ad aliud, gignetur distantia A F, vt demonstratum est Numero 3. & 1.

6 QVOD si quando in vna statione linea fiduciæ transierit per C, assumi poterit vel latus vmbræ rectæ BC, vel versæ CD, prout in altera statione abscissa erit vmbra recta, vel versa; vt nimirum vmbræ sint similes.

COROLLARIVM I.

Eundem esse modum operandi in vtroque quadrato.

COLLIGITVR ex demonstratis, eundem esse operandi modum in vtroque quadrato: quandoquidem eædem vmbræ in quadrato pendulo, quæ in stabili, abscinduntur, vt ostendimus: Itaque præcepta, quæ in vno præscribuntur, in altero quoque obseruanda sunt.

COROLLARIVM II.

Eundem esse operandi modum per vmbras versas, & per rectas.

PATET etiam ex dictis, operationem non variari, siue per vmbras versas, siue per rectas instituatur: quandoquidem semper est, vt differentia vmbrarum ad differentiam stationum, ita vmbra maior, ad distantiam, quæ inuestiganda proponitur, vt demonstratum est.

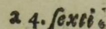
CAETERVM in scholio problematis 7. præscribemus rationem, qua eãdem distantiam AF, metiri licebit per vnicam stationem.

DISTAN-

DISTANTIAM eandem per duas ſtationes in aliqua altitudine erecta factas, ope quadrati perſcrutari.

PROBLEMA IIII.

1 QVANDO in plano commode fieri nequeunt duæ ſtationes, erigatur haſta aliqua Kb, in qua fiant duæ ſtationes oculi menſoris in A, a: Vel in duabus feneſtris alicuius turris, quarum vna ſuperſtet alteri ad perpendiculum: abſcindaturque primum latus vmbræ verſæ in vtraque ſtatione in E, H, Eritque inferioris ſtationis vmbra verſa DE, maior, quam vmbra verſa d H, ſtationis ſuperioris, quod angulus A, maior ſit angulo a; quippe cum A G F, minor ſit, quam aGM; & anguli F, M, recti. Sumatur DI, ipſi dH, æqualis; a Et quoniam eſt, vt AD, ad DE, ita A F, ad F G: erit permutando, vt AD, ad AF, ita DE, ad FG. Eademque ratione erit, vt a d, ad a M, ita d H, ad MG. Cum ergo eadem ſit proportio A D, ad AF, quæ a d, ad a M, propter æqualitatem linearum AD, a d, & AF, a M; b Erit vt D E, tota ad totã FG, ita d H, hoc eſt, DI, ablata ad ablatam MG. c Igitur erit quoque reliqua IE, ad reliquam FM, hoc eſt, ad reliquam A a, vt tota DE, ad totam FG, hoc eſt, vt A D, ad A F; cum oſtenſum ſit eſſe A D, ad A F, vt D E, ad F G. Quocirca ſi fiat,

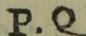


b 11.quinti
c 19.quinti

Vt IE, differentia vmbrarum verſarum	*ad A a, differentiam ſtationum,*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AF, diſtantiam,*

manifeſta colligetur diſtantia A F, in partibus differentiæ ſtationum A a.

2 SI in vtraque ſtatione latus vmbræ rectæ interſecetur in E, H, reducenda eſt vtraque vmbra recta BE, bH, ad uerſam, per ea, quæ tradita ſunt ad initium huius lib. in conſtructione quadrati Num. 7. diuidendo videlicet quadratum numerum lateris quadrati per utramq. vmbram rectam abſciſſam ſigillatim. Nam ſi producantur latera DC, d c, vmbræ verſæ vſq. ad radios AG, aG, ad pũcta I, K, erit iterum, vt demonſtrauimus Num 1. vt IN, differentia vmbrarum verſarum ad Aa, differẽtiam ſtationum, ita AD, latus quadrati ad A F, diſtantiam. Ergo vt Num. 1. oſtenſum eſt, inuenietur diſtantia A F, in partibus differentiæ ſtationum A a.



ALITER

SINE reductione vmbrarum rectarum ad versas hoc alio modo eandem distantiam AF, eliciemus. Ex OH, differentia vmbrarum rectarum in latus a b, fiat P: & ex bH, vmbra recta maiore in minorem BE, fiat Q. *a* Et quia est, vt ID, ad DA, ita AB, ad BE; *b* erit rectangulum sub ID, BE, æquale quadrato ex AD, vel AB. Eodemque modo rectangulum sub K d, b H, quadrato ex a d, vel a b, hoc est, eidem quadrato ex A D, vel A B, æquale erit: ac proinde rectangula sub ID, BE, & sub Kd, bH, æqualia inter se erunt. *c* Igitur erit, vt ID, ad K d, ita b H, ad BE: & permutando vt I D, ad b H, ita K d, ad B E, hoc est, vt I D, tota ad totam b H, ita K d, hoc est, ita D N, ablata ad B E, hoc est, ad b O, ablatam: *d* Ideoque erit & reliqua IN, ad reliquam OH, vt tota ID, ad totam bH; & permutando IN, ad I D, vt O H, ad bH. Quia vero proportio IN, ad D A, (posita media ID,) componitur ex proportionibus IN, ad ID, & ID, ad DA: Est autem, vt proxime monstratum est, vt I N, ad ID, ita OH, ad b H; *e* & vt ID, ad DA, ita AB, ad BE: componetur quoque proportio IN, ad DA, ex proportionibus OH, ad bH, & AB, ad BE. *f* Sed proportio etiam producti P, ad productum Q, componitur ex eisdem proportionibus, nimirum ex lateribus. Igitur eadem est proportio P, ad Q, quæ IN, ad DA. Cum ergo, vt in 1. modo huius Num. 2. ostendimus, sit IN, ad Aa, vt AD, ad A F, hoc est, permutando vt IN, ad DA, ita Aa, ad AF: Erit quoque P, ad Q, vt Aa, ad A F. Quapropter si fiat,

a 4. sexti.
b 17. sexti
c 16. sexti.
d 19. quinti
e 4. sexti.
f 23. sexti.

Vt P, numerus, qui fit ex OH, differentia vmbrarum rectarum in a b, latus quadrati,	*ad Q, numerum, qui fit ex vmbra recta b H, maiore in minorem BE,*	*Ita Aa, differentia stationum*	*ad AF, distantiam,*

producetur eadem distantia quæsita AF, in partibus differentiæ stationũ Aa.

ALITER

g QVONIAM est, vt bH, ad a b, ita aM, ad MG: si fiat,

g 4. sexti.

Vt bH, vmbra recta,	*ad db, latus quadrati 1000.*	*Ita aM, quatenus 1.*	*ad M G,*

hoc est, (quia 1. multiplicans latus quadrati 1000. producit idem latus 1000.) si quadrati latus 1000. a b, diuidatur per vmbram rectam b H, exibit Quotiens MG, indicans, quoties aM, quatenus 1. in M G, comprehendatur. Eodem pacto, si fiat,

Vt BE, vmbra recta	*ad AB, latus quadrati 1000.*	*Ita AF, quatenus 1.*	*ad F G,*

hoc est, si quadrati latus 1000. A B, diuidatur per vmbram rectam B E, fiet Quotiens FG, significans, quoties AF, quatenus 1. contineatur in FG. Si igitur

cur ex posteriore hoc Quotiente FG, prior ille Quotiens MG, detrahatur, reliqua fiet FM, vel Aa, differentia stationum cognita in partibus, quarum AF, est 1. Quocirca si fiat,

Vt Aa, differentia Quotientũ, qui fiunt, si latus quadrati per vtramque vmbram rectã diuidatur,	*ad Aa, differentiam stationum notam in mensura aliqua:*	*Ita AF, vt 1.*	*ad AF, distantiam,*

O. P

hoc est, si differentia stationum diuidatur per differentiam Quotientum, efficietur nota distantia AF, in partibus differentiæ stationum Aa, &c.

3 SI denique in statione inferiori latus vmbræ rectæ secetur in E, & in superiori statione latus vmbræ versæ in H, reducenda quoque erit vmbra recta ad versam, vt diximus, & producendum latus DC, vmbræ versæ vsque ad punctum N, sumendaque DI, ipsi dH, æqualis. Nam vt Num. 1. ostendimus, si fiat,

Vt NI, differentia vmbrarum versarum	*ad Aa, differentiam stationum:*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AF, distantiam,*

cognita rursus erit distantia AF, in partibus differentiæ stationum Aa,

ALITER.

SINE reductione vmbræ rectæ ad versam ita quoque agemus. Numerus qui fit ex recta vmbra BE, in vmbram versam dH, auferatur ex 1000000. quadrato lateris 1000. residuumque sit, O. Item ex vmbra recta BE, in latus quadrati 1000. fiat P. Et quoniam, vt initio huius lib. in constructione quadrati Nu. 6. ostendimus, latus quadrati medio loco proportionale est inter vmbras BE, DN: *a* Erit rectangulum sub BE, DN, quadrato lateris æquale. *b* Cum ergo rectangulum sub BE, DN, æquale sit rectangulis sub DE, DI, & sub BE, NI: si rectangulum sub BE, DI, auferatur ex rectangulo sub BE, DN, id est, ex 1000000. quadrato lateris AD, reliquum fiet rectangulum sub BE, NI; ac proinde cum DI, ipsi dH, sit æqualis, fiet rectangulum sub BE, DI, ex vmbra BE, in vmbram dH; atque idcirco reliquum rectangulum sub BE, NI, (quod videlicet relinquitur, si rectangulum sub BE, DI, ex quadrato lateris detrahatur, vt dictum est,) numero O, æquale erit. Est autem ex constructione rectangulum quoque sub BE, vmbra recta, & latere AD, numero P, æquale. Igitur cum numerus BE, multiplicans NI, AD, producat O, P, *c* erit O, ad P, vt NI, ad AD. Sed vt Num. 1. huius problematis demonstrauimus, vt NI, differentia vmbrarum versarum ad Aa, diffe-

a 16. sexti.
b 1. secundũ
c 17. sept.

rentiam stationum, ita est AD, latus quadrati ad AF, & permutando vt NI, ad AD, ita Aa, ad AF. Igitur erit quoque O, ad P, vt Aa, ad AF. Quamobrem si fiat,

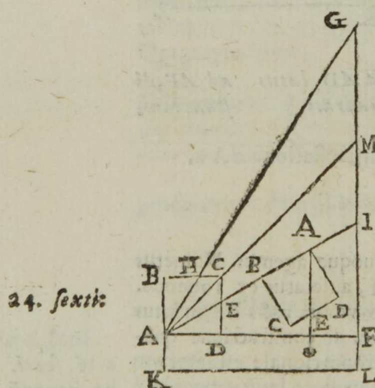
Vt O, numerus, qui relinquitur si numerus genitus ex vmbra recta in versam ex quadrato lateris detrahatur,	*ad numerum P, qui ex vmbra recta BE, in latus AD, producitur:*	*Ita Aa, differentia stationum*	*Ad AF, distantiã*

procreabitur distantia quæsita AF, in partibus differentiæ stationum A a,

4 HIC etiam si forte in vna statione linea fiduciæ, aut filum perpendiculi, transierit per punctum, C, assumendum erit vel latus vmbræ rectæ, vel versæ, vt Num. 6. præcedentis problematis dictum est.

ALTITVDINEM cuiuslibet rei erectæ per eius distantiam ab oculo mensoris, beneficio quadrati conijcere.

PROBLEMA V.



1 SIT altitudo cõijcienda GL, vel ML, vel IL, ad Horizontẽ perpẽdicularis. Statura mensoris, vel aliqua alia mẽsura nota sit FL, vel AK, pareturq; planũ Horizõti parallelũ AF, in quo quadratũ erigatur, cuius latus AD, intelligatur productũ occurrens altitudini in F. Inspecto cacumine I, secet primum dioptra vel filum perpendiculi latus CD, vmbræ versæ in E. quod accidet, quando distantia AF, maior est, altitudine FI, vt problemate 1. Num. 1. ostendimus. Quoniam igitur triangulum ADE, triangulo AFI, æquiangulum est, vt ibidem monstratum est; *a* erit vt AD, ad DE, ita AF, ad FI. Quamobrem si fiat, *a 4. sexti.*

Vt latus quadrati 1000.	*Ad vmbram versam DE:*	*Ita distantia AF, vel data, vel inuenta per probl. 3. aut 4.*	*Ad FI*

patefacta erit altitudo FI, in partibus distantiæ AF, quæ si data non est, exquirenda erit vel per problema 3. vel 4. Et si ad FI, adijcietur mensura, vel statura mensoris FL, tota altitudo proposita IL, nota fiet,

b schol. 34. primi. 2 DEINDE linea fiduciæ transeat per punctum C. quod fiet, quando distantia AF, altitudini FM, æqualis est; *b* quod tunc angulus C A D, semirectus sit, ac proinde & reliquus M, in triangulo F A M. *c* Ideoque latera AF, *c 6. primi.*

FM,

FM,æqualia ſint. Quanta ergo eſt diſtantia AF, quæ vel data eſt, vel inuenienda per problema 3. vel 4. tanta erit altitudo FM, cui addita F L, nota patefaciet totam altitudinem M L.

3 POSTREMO interſecetur vmbræ rectæ latus in H. quod eueniet, quando diſtantia A F, minor eſt altitudine F G: eritque triangulum A B H, triangulo AFG, æquiangulum, vt problemate 3. Num. 3. demonſtrauimus. Igitur erit, vt BH, ad AB, ita AF, ad FG: ac proinde, ſi fiat,

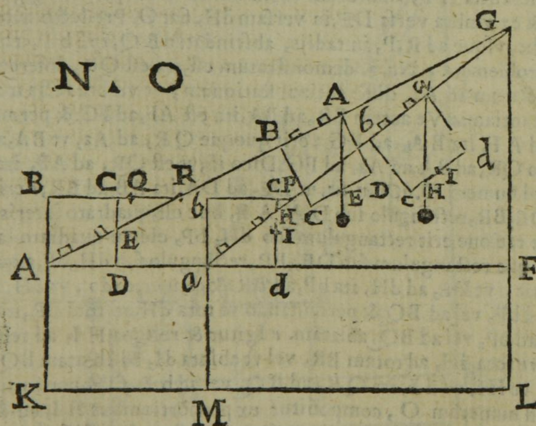
Vt vmbra recta BH, ad AB, latus quadrati 1000. Ita diſtantia AF, vel data, vel inuenta per probl. 3. aut 4. ad F G,

nota euadet FG, cui ſi addetur menſura vel ſtatura menſoris FL, efficietur nota tota altitudo GL, propoſita.

ALTITVDINEM eandem, etiamſi eius diſtantia ab oculo menſoris neque data ſit, neque inuenta, per duas ſtationes in plano factas patefacere auxilio quadrati.

PROBLEMA VI.

1 PROPOSITA ſit altitudo metienda FG, ſecluſa menſoris ſtatura



FL. Fiant duæ ſtationes, vt in problemate 3. cuius figura 1. hic repetatur, ſeceturque primum vmbra verſa in vtraque ſtatione in punctis E, H. Et quia propter ſimilitudinem triangulorum ADE, AFG, a eſt vt DE, ad A D, ita FG,

FG, ad AF: si fiat,

Vt DE, vmbra versa abscissa	*ad AD, latus quadrati* 1000.	*Ita FG, quatenus* 1.	*ad AF,*

hoc est, (cum 1. multiplicans latus quadrati 1000. producat idem latus 1000.) si quadrati latus 1000. diuidatur per vmbram versam DE, prodibit Quotiens AF, indicans, quoties FG, in AF, contineatur. Eodem pacto si fiat,

Vt vmbra versa dH,	*ad a d, latus quadrati* 1000.	*Ita FG, quatenus* 1.	*ad aF,*

hoc est, si quadrati latus 1000. diuidatur per vmbram versam d H, gignetur Quotiens aF, monstrans, quoties FG, in aF, contineatur. Si igitur posterior hic Quotiens a F, ex priori Quotiente aF, detrahatur, relinquetur differentia Aa, cognita in partibus, quarum FG, est 1. Si ergo fiat,

Vt Aa, differentia Quotientum, diuiso latere Quadrati per vtramque vmbram versam,	*ad Aa, differentiam stationum.*	*Ita FG, vt* 1.	*ad FG,*

producetur altitudo FG, in partibus differentiæ stationum Aa, nota, & adiecta mensoris statura FL, tota altitudo GL, nota fiet.

ALITER

EX differentia H I, vmbrarum versarum in latus quadrati gignatur numerus N: & ex vmbra versa DE, in versam dH, fiat O. Productis autem lateribus BC, bc, vsque ad R, P, in radijs, abscindatur B Q, ipsi b P, æqualis. Et quia, vt problemate 3. Nu. 3. demonstratum est, ita est QR, differentia vmbrarum rectarum ad Aa, differentiam stationum, vt vmbra recta maior BR,
a 4. sexti. ad AF, distantiam: *a* Vt autem BR, ad BA, ita est AF, ad FG: & permutando, vt B R, ad A F, ita B A, ad F G; erit quoque Q R, ad Aa, vt B A, ad FG, & permutãdo QR, ad BA, ad Aa, ad FG. Dico iã, vt est QR, ad AB, ita esse nu
b 4. sexti. merũ N, ad numerũ O. *b* Cũ. n. sit, ut DE, ad DA, ita AB, ad BR; *c* erit rectan
c 16. sexti. gulũ sub DE, BR, rectangulo sub D A, A B, hoc est, quadrato lateris æquale. Eademque ratione erit rectangulum sub dH, bP, eidem quadrato lateris æquale; ideoque rectangulum sub DE, BR, rectangulo sub dH, bP, æquale erit.
d 16. sexti. *d* Igitur erit, vt DE, ad dH, ita bP, ad BR: & conuertendo, vt dH, ad D E,
e 19. Quinti ita B R, ad bP, vel ad BQ: & permutando vt tota dH, ad totã BR, ita DE, vel dI, ablata ad bP, vel ad BQ, ablatam. *e* Igitur & reliqua H I, ad reliquam QR, erit, vt tota dH, ad totam BR, vel vt ablata dI, ad ablatam BQ; & permutando, vt HI, ad d I, ita Q R, ad B Q, vel ad b P. *f* Proportio autem nu-
f 23. sexti. meri N, ad numerum O, componitur ex proportionibus H I, ad d I, vel ad DE, & lateris a d, ad dH: propterea quod N, factus est ex HI, differẽtia vmbrarũ versarũ in latus quadrati a d; At vero O, ex vmbra versa DE, in uersam dH, ex constructione. Cum ergo sit, vt paulo ante ostendimus, quemadmodum HI,
g 4. sexti. ad dI, ita QR. ad bP, *g* Item vt latus a d, ad d H, ita bP, ad b a, componetur quoq. proportio N, ad O, ex proportionibus QR, ad b P, & bP, ad b a. Sed ex his eisdem componitur proportio QR, ad b a. Igitur eadẽ est proportio N, ad O, quæ

O, quæ QR, ad b a, vel BA. quod ostendere volebamus. Est autem vt Q R, ad BA, ita Aa, differentia stationum ad altitudinem F G, vt supra ostendimus prope initium huius demonstrationis. Igitur si fiat,

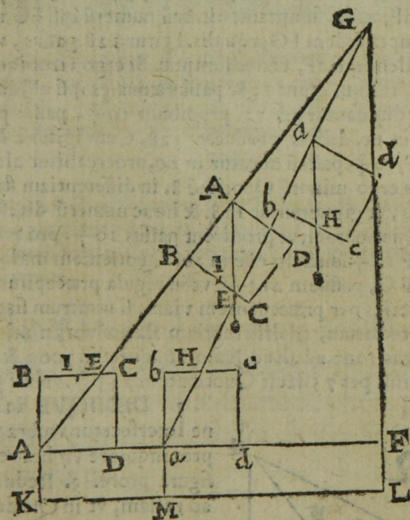
Vt N, numerus, qui fit ex HI, differentia vmbrarum versarum in latus quadrati 1000.	*ad numerum O, factũ ex vmbra versa DE, in versãdH.*	*Ita Aa, differentia stationum*	*ad FG, altitudinem,*

deprehensa erit altitudo FG, in partibus differentiæ stationum Aa. &c.

ALITER.

REDVCATVR vtraque vmbra versa ad rectam, vt ad initium huius lib. in quadrati constructione Num. 7. docuimus. Nam per has vmbras rectas altitudinem FG, nanciscemur, vti Num. 2. insequenti tradetur.

2 SECETVR deinde vtraq. vmbra recta in E, H, vt in 2. figura problematis 3. quæ hic repetatur. Etquoniam ob similem triangulorum A B E, A F G, *a* est, vt B E, ad A B, ita A F, ad F G; erit permutando, vt B E, ad AF, ita AB, ad F G. Eademque ratione erit vt bH, ad aF, ita a b, ad FG; ac proinde erit, vt tota BE, ad totam AF, ita ablata b H, vel B I, ad ablatam aF, cum vtraque proportio sit, quæ AB, vel a b, ad F G. a 4. *sexti.*



Igitur erit quoque reliqua IE, ad reliquam Aa, vt tota BE, ad, totam A F, hoc est, vt AB, ad FG, cum duæ hæ proportiones eædem inter se sint, vt paulo ante demonstrauimus. Quocirca si fiat,

Vt IE, differentia vmbrarũ rectarũ | *Ad Aa, differentiam stationum:* | *Ita AB, quadrati latus 1000.* | *ad FG,*

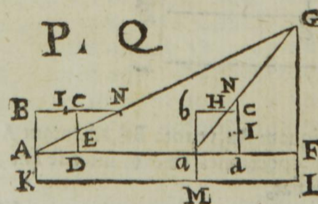
prosiliet nota altitudo F G, & adiuncta mensoris statura F L, tota altitudo GL, quæsita nota efficietur.

ALITER

DIVIDE quadrati latus 1000. per vtramque vmbram rectam, & minorem Quotientem duc in differentiam stationum, numerumque productum partire per differentiam Quotientum. Si namque hic vltimus Quotiens ducatur in Quotientem maiorem ex prioribus duobus Quotientibus, producetur altitudo quæsita in partibus differentiæ stationum. Quod ita perspicuum fiet.

a 4. sexti. SIT vmbra recta minor bH. 50. verbi gratia, & maior B E, 125. at differentia stationum Aa, sit 16. passuum. *a* Et quia est, vt bH, ad a b, ita aF, quatenus 1. ad F G; si a b, 1000. diuidatur per b H, 50. indicabit Quotiens 20. rectam aF, in FG, contineri vicies.

b 4. sexti. SIC etiam, *b* quia est, vt BE, ad AB, ita A F, quatenus 1, ad F G; si A B, 1000. diuidatur per B E, 125. monstrabit Quotiens 8. rectam AF, in FG, contineri octies. Quia itaque Aa, 16. passuum vna cũ aF, continetur in FG, octies, fit vt Aa, 16 passuũ octies sumpta, vna cum aF, octies quoque sumpta, faciat 128. passus, & aF, octies sumptam; nimirũ numerũ ipsi FG, æqualem. Est autẽ AF, vicies sumpta eidem FG, æqualis. Igitur 128. passus, vna cum aF, octies sumpta æquiualent ipsi aF, vicies sumptæ. Si ergo vtrobique auferatur a F, octies sumpta, reliqui erunt 128. passus æquales ipsi aF, duodecies sumptæ. Quare si 128. diuidantur per 12, prodibunt $10\frac{2}{3}$. passus pro recta, aF, cum hic Quotiens in 12. ductus producat 128. Cum igitur a F, contineatur vicies in FG: si aF, $10\frac{2}{3}$. passuũ ducatur in 20, procreabitur altitudo FG, $213\frac{1}{3}$ passuum. Vides ergo minorẽ Quotiẽtẽ 8. in differentiam stationum passuum 16. ductam esse, vt gignerentur 128. & hunc numerũ diuisum esse per 12, differentiam Quotientum, vt prodirent passus $10\frac{2}{3}$. pro recta aF: ac tandem hunc Quotiẽtẽ $10\frac{2}{3}$. ductum esse in 20. Quotientem maiorem, vt produceretur altitudo F G, passuum $213\frac{1}{3}$. vt in regula præcepimus. Quã altitudinem etiam reperies per præcedentem viam, si nimirum fiat, vt 75. differentia vmbrarum rectarum, ad differentiam stationum, nimirum ad 16. passus, ita quadrati latus 1000. ad aliud. Nam 16. ducta in 1000, & productus numerus 16000. diuisus per 75. facit Quotientem $213\frac{1}{3}$. veluti prius.



3 DENIQVE in remotiore statione intersecetur vmbra versa in E, & in propinquiore vmbra recta in H, vt in 3. figura probl. 3. Reducta vmbra versa ad rectam, vt in Quadrati constructione Num. 7. principio huius lib. scripsimus: si fiat, vt I N, differentia vmbrarum rectarum ad Aa, differentiam stationum, ita A B, latus Quadrati 1000. ad aliud, procreabitur altitudo FG, quemadmo-

admodum Num. 2. ostendimus.

4 SI forte in vna statione transiret linea fiduciæ, aut filum perpendiculi per punctum C, assumendum esset in primo casu latus C D, vmbræ versæ: In duobus autem alijs casibus latus BC, vmbræ rectæ.

ALITER

Sine reductione vmbræ versæ ad rectam ita agendum erit. Numerus, qui fit ex vmbra versa DE, in vmbram rectam bH, auferatur ex 1000000. quadrato lateris 1000. residuũque sit P. Item ex vmbra versa D E, in latus 1000. fiat Q. *a* Et quoniam ob triangulorũ similitudinem est, vt BN, ad BA, ita AF, ad FG: Et permutando, vt BN, ad AF, ita BA, ad FG. Sed vt B N, vmbra recta maior ad AF, distantiam, ita est IN, differentia vmbrarum rectarum ad Aa, differentiam stationum, vt Num. 5. in probl. 3. dictum est. Igitur erit quoque IN, ad Aa, sicuti AB, ad FG: Et permutando I N, ad A B, vt Aa, ad F G. Dico iam ita esse P, ad Q, vt IN, ad AB. *b* Quoniam enim est, vt DE, ad AD, ita AB, vel AD, ad BN: *c* erit rectangulum sub DE, BN, æquale quadrato numero 1000000. lateris AB, 1000. *d* Est autem rectangulum sub DE, BN, æquale rectangulis sub D E, BI, & sub D E, IN. Igitur si productum ex vmbra versa DE, in BI, hoc est, in vmbram rectam bH, dematur ex rectangulo sub D E, B N, hoc est, ex quadrato 1000000. remanebit rectangulum sub DE, IN. Ac propterea P, fiet ex DE, in I N. Fit autem Q, ex eadem vmbra versa DE, in latus AB, 1000. Igitur cum DE, multiplicans I N, & A B; producat P, Q, *e* erit P, ad Q, sicut IN, ad AB; hoc est, sicut Aa, ad FG. Quocirca si fiat.

a 4. *sexti.*
b 4. *sexti.*
c 17. *sexti.*
d 1. *secundi*
e 17. *septimi*

Vt P, numerus, qui relinquitur, si productus ex vmbra versa DE, in vmbram rectam bH, ex quadrato 1000000. detrahatur,	*ad Q, numerũ, qui fit ex vmbra versa DE, in latus A B, 1000.*	*Ita Aa, differentia stationum*	*ad F G, altitudinem,*

producetur altitudo F G, nota in partibus differentiæ stationum A a: cui si adijcietur statura mensoris FL, tota altitudo GL, nota efficietur.

IN scholio porro sequentis problematis idem hoc problema per vnicam stationem absoluemus.

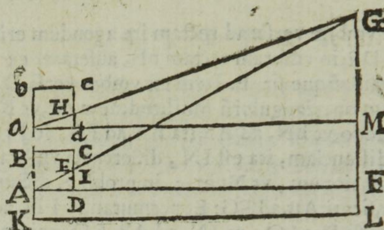
ALTITVDINEM eandem, quando distantia ab oculo mensoris neque data est, neque inuenta, neque è directo altitudinis duæ stationes fieri possunt, per duas stationes in aliqua hasta erecta factas, indagare per Quadratum.

PROBLEMA VII.

1 CVM in plano duæ stationes fieri commode nequeunt, erigatur hasta

Q aliqua

aliqua Kb, ad Horizontem recta, nisi forte adsit aliquod ędificium erectum; ibique fiant duę stationes in A, & a, vt in problemate 4. Cadat autẽ primum dioptra, vel filum perpendiculi in vtraque statione in vmbram versam, vt in



a 4. sexti — 1. figura problematis 4. quæ hic repetita est. *a* Et quoniã propter triangulorum similitudinẽ est, vt AD, ad DE, ita AF, ad FG; erit permutando vt AD, ad AF, ita DE, ad F G. Eademque ratione erit vt, a d, ad a M, ita d H, ad MG. Cum ergo eadem sit proportio AD, ad A F, quæ a d, ad aM, propter
b 11. quinti — æqualitatẽ rectarũ AD, a d, & AF, aM; *b* erit vt tota DE, ad totam F G, ita
c 19. quinti — dH, hoc est, ita D I, ablata ad ablatam M G. *c* Igitur erit quoque reliqua IE, ad reliquam F M, hoc est, ad D d, vt tota D E, ad totam F G. Quocirca si fiat,

Vt IE, differentia vmbrarum versarum	*ad Dd, differentiam stationum:*	*Ita D E, maior vmbra versa*	*ad FG, altitudinem*

euadet cognita altitudo FG, in partibus differentiæ stationum D d. Apposita autem statura mensoris FL, tota altitudo GL, quæsita cognita erit.

2 ABSCINDAT deinde dioptra in vtraque statione vmbram re-
d 4. sexti. — ctam, vt in 2. figura problematis 4. quæ posita est in pagina 113. *d* Et quia
e 16. sexti. — propter triangulorum similitudinem est vt b H, ad a b, ita a M, ad M G: *e* erit rectangulum sub b H, MG, æquale rectangulo sub a b, a M. Eadem ra-
f 4. sexti. — tione erit rectangulum sub B E, F G, æquale rectangulo sub A B, AF, *f* quod eadem quoque sit proportio BE, ad AB, quæ AF, ad FG. Cum ergo rectangulum sub a b, a M, rectangulo sub A B, A F, æquale sit, ob æqualitatem rectarum a b, AB, & a M, AF, erit etiam rectangulum sub bH, MG; rectangulo
g 17. sexti. — sub BE, FG, æquale. *g* Quare erit vt tota BH, ad totam F G, ita BE, vel bO,
h 19. sexti. — ablata ad ablatã M G; *h* Ac propterea erit quoq. reliqua O H, ad reliquam FM, siue ad Aa, vt tota bH, ad totam FG. Quamobrem si fiat,

Vt OH, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiam stationum:*	*Ita bH, maior vmbra recta*	*ad FG, altitudinem,*

altitudo FG, prodibit cognita, quæ cum statura mensoris F L, totam altitudinem L G, efficiet notam. Vbi vides eundem prorsus esse operandi modum

dum in vmbris rectis, & in versis.

3 POSTREMO in statione inferiori resecetur vmbra recta BE, & versa d H, in superiori statione, vt in 3. figura problematis 4. quæ posita est in pagina 115. Reducta ergo vmbra recta ad uersam, vt ad initium huius libri in constructione Quadrati Num. 7. declarauimus: si fiat, vt I N, differentia vmbrarum versarum ad A a, differentiam stationum, ita D N, vmbra versa maior ad aliud, procreabitur F G, altitudo in partibus differentiæ stationum Aa, quemadmodum Num. 1. demonstrauimus. Quod si malueris reducere vmbram versam ad rectam, eandem altitudinem reperies per duas vmbras rectas, ceu Num. 2. monstrauimus.

4 QVANDO fortasse in altera stationum linea fiduciæ transiret per punctum C, in arbitrio tuo erit, vel totum latus vmbræ versæ, vel rectæ assumere.

SCHOLIVM

1 EANDEM altitudinem, eiusque distantiam ab oculo mensoris, vna cum hypotenusa ab oculo ad fastigium altitudinis extensa, venari licebit ope quadrati stabilis per vnicam stationem, etiamsi solum fastigium rei erectæ cernatur: adeo vt scholium hoc omnia præstet, quæ in problemate 3. 4. 5. 6. & 7. per plures stationes inuestigauimus, ac proinde diligenter perdiscendum.

SIT enim altitudo metienda IF; statura mensoris IG, vel HA. Paretur planũ Horizonti æquidistans per A, transiens, in quo Quadratum firmari possit, aut collocari. Primum ergo inuestiganda est hypotenusa A F, hoc modo. Inclinetur quadratũ, ita vt centrum dioptræ occupet superiorem locum lateris a A, cuius inferius punctum statuatur in A, oculo mensoris. Et totũ quadratum tamdiu eleuetur, aut deprimatur, donec latus Ae, recta in cacumen F, vergat. Manente sic Quadrato, mensor oculum transferat ad a, & per dioptram inspiciat cacumen F, notenturque partes vmbræ versæ abscissæ b c. a Deinde fiat, Quo pacto præcedentia 5. problemata, ope quadrati stabilis per vnicam stationem absoluantur.

Vt cb, vmbra versa	*ad latus ab,* 1000.	*Ita latus aA, notum in data mensura, quod nũc ponamus contine-re 3. pedes,*	*ad AF,*

Nam inuentus numerus dabit hypotenusam AF, cognitã in partibus lateris aA. Verbi gratia. si c b, contineat 50. partes vmbræ versæ, & a A, tribus pe-

dibus sit æqualis: si fiat vt 50. ad 1000. ita 3. ad aliud, reperietur A F, complecti 60. pedes. Si vero a A, ponatur 1000. comperietur eadem AF, particularum 200000. qualium 1000. in a A, comprehenduntur.

2 POST hæc deprimatur Quadratum, ita vt latus A D, Horizonti æquidistet, centrumque dioptræ sit in A. quo posito, videbitur cacumen F, per inuentam hypotenusam AF, quæ primum secet vmbram versam C D, in E, vt in primo quadrato, inquiraturque portio dioptræ AE, in partibus laterum AD, DE, *a* quod fiet vel ex vtroque latere AD, DE, cognito: *b* Vel ex cognito per problema 1. ex vmbra DE, angulo DAE, ex latere DE, noto: *c* Vel deni que si ex summa quadratorum ex A D, D E, descriptorum radix quadrata extrahatur. Inuenta portione AE, in partibus millesimis lateris AD, ductaque EM, ipsi AG, parallela, *d* si fiat,

a 6. triang. rectil.
b 5. triang. rectil.
c 47. *primi.*
d 2. *sexti. & componẽdo.*

Vt AE, inuẽta in partibus millesimis lateris AD,	*ad AF, in iisdem partibus inuentã*	*Ita GM, in iisdẽ partibus cognita, cũ æqualis sit ipsi DE,*	*ad GF,*

nota efficietur GF, in partibus millesimis lateris AD. Quod si rursus fiat,

Vt latus AD, 1000.	*ad 3. pedes, quos ponimus in AD, cõtineri:*	*Ita GF, in millesimis partibus lateris AD, inuenta,*	*ad GF,*

reperietur eadem G F, in mensura pedum. Et si adijciatur, statura mensoris GI, nota in eadem mensura, cognita fiet tota altitudo IF, in mensura pedũ.

Vbi vides, nos eadem opera inuenisse quoque distantiam AF, ab oculo A, ad cacumen vsque F.

3 SECET deinde hypotenusa aF, inuenta (inuenietur autem vt Num. 7. dictum est) vtrumque latus vmbræ in C, vt in 2. quadrato. *e* Si igitur fiat,

e 2. *sexti. & componẽdo.*

Vt portio dioptræ ac, inuenta in partibus a d, lateris, 1000. vt Num. 2. diximus.	*ad aF, hypotenusam in iisdẽ partibus inuentam:*	*Ita GK, 1000.*	*ad GF,*

prodibit GF, nota in partibus millesimis lateris dc: Et si rursus fiat,

Vt latus dc, 1000.	*ad 3. pedes, quibus æquale ponimus latus d c,*	*Ita GK, 1000. cũ æquale sit ipsi d c,*	*ad GF,*

inuenta erit eadem GF, in mensura pedum. Et si addatur statura mensoris GI, nota in eadem mensura, cognoscetur tota altitudo IF, in mensura pedum.

4 TERTIO secet hypotenusa inuenta AF, (quæ inuenietur vt Num. 7. docuimus) vmbram rectam in E, vt in tertio quadrato. *f* Si ergo fiat,

f 2. *sexti. & componẽdo.*

Vt portio dioptræ AE, inuenta, vt Num. 2. docuimus.	*ad AF, hypotenusam inuentam*	*Ita GK, 1000.*	*ad G F,*

exibit GF, nota in partibus millesimis lateris DC. Et si iterum fiat,

Vt latus DC, 1000.	*ad 3.pedes in DC, contentos*	*Ita GK,1000.cum sit æqualis ipsi DC,*	*ad GF,*

cognita erit eadem GF,in menſura pedum.&c.

ATQVE hac eadem ratione omnes aliæ lineæ inuentæ in partibus milleſimis lateris Quadrati reuocabuntur ad quamcunque aliam menſuram, vt ad pedes, vel cubitos,&c.

5 DISTANTIA autem A G,vel HI, cognita euadet,*a* ſi fiat, *a 2.ſexti.& componēdo.*

Vt portio dioptræ AE,in primo Quadrato, vel a c, in 2.Quadrato,	*ad hypotenusā AF,vel aF,*	*Ita latus AD, in 1.Quadrato vel a d, in 2, Quadrato*	*ad A G, in 1.quadrato vel ad aG, in ſecundo.*

VEL

Ducta EL,lateri AB, parallela in tertio quadrato,

Vt AE,portio dioptræ,	*ad hypotenuſam AF,*	*Ita vmbra recta BE,ipſi AL, æqualis,*	*ad A G.*

VIDES igitur, in hac ratione dimetiendæ altitudinis, ac diſtantiæ, etiam inacceſſibilis, opus non eſſe duabus ſtationibus ſiue in plano, ſiue in haſta aliqua erecta faciendis; Quod non parum moleſtiæ plerunque afferre ſolet: ſed ſolum inueſtigandam eſſe prius hypotenuſam per Quadratum ſtabile inclinatum: Deinde portionem dioptræ inter eius centrum,&latus Quadrati, quod interſecat: quæ inuentio difficilis non eſt, vt patuit, cum menſor nunquam locum mutare cogatur.

ALTITVDINEM turris aut montis,ex eius ſummitate per Quadratum dimetiri, quando in plano ſummitatis Horizonti æquidiſtante duæ ſtationes fieri poſſunt, & ſignum aliquod in Horizonte cernitur.

PROBLEMA VIII.

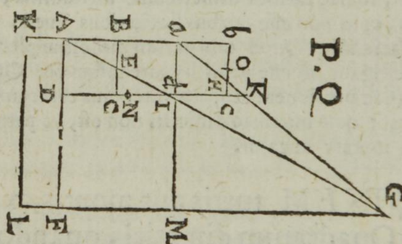
1 SIT altitudo DF Md,in cuius ſummitate,nimirum in plano Dd,duæ ſtationes fieri poſſint, ex quibus ſignū aliquod in Horizonte,videlicet G, videri poſſit. (Nos ne nouam cogerermi deſcribere figurā,repetiuimus primam problematis 4. inuerſo tamen ordine poſitam, ita vt

vt literæ rectum situm non habeant, Et quamuis signum G, non cernatur ex A, propter planum Dd, eadem tamen erit ratio, si aliud signum longius distans eligatur, quod ex A, inspici possit.) Collocetur instrumentum in vtraque statione, vt latus vmbræ rectæ DC, vergat deorsum. Et primum vtraque vmbra recta secetur in E, H, (In hac enim inuersione latus DC, vmbræ rectæ, & BC, versæ deputatur, vt in constructione Quadrati Num. 4. initio huius libri declaratum est.) atque vmbræ dH, in propinquiore statione, quæ semper minor est, æqualis abscindatur DI. Itaque si fiat,

Vt IE, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiam stationum.*	*Ita AD, latus quadrati* 1000.	*ad AF,*

cognita erit recta AF, ex qua si dematur latus quadrati AD, notum in partibus differentiæ stationum, nota relinquetur altitudo DF, vel dM, quæsita. Inueniri autem hac ratione rectam AF, demonstratum est in problemate 4. Num. 1.

2 QVOD si in vtraque statione latus vmbræ versæ secetur in F, H, vt in 2, figura problematis 4. hic repetita, inuersa tamen, habebimus tres vias inuestigandi altitudinem AF, ex qua si tollatur latus Quadrati AD, manifesta relinquetur quæsita altitudo DF, vel dM. Nam reducta vtraque vmbra versa ad rectam, si fiat,



Vt IN, differentia vmbrarum rectarum,	*ad Aa, differentiam stationum:*	*Ita AD, latus quadrati* 1000.	*ad AF,*

Vel sine reductione.

Vt P, numerus, qui fit ex OH, differentia vmbrarũ versarum in ab, latus quadrati,	*ad numerum, qui fit ex vmbra versa bH, maiore in minorem BE,*	*Ita Aa, differentia stationum*	*ad AF,*

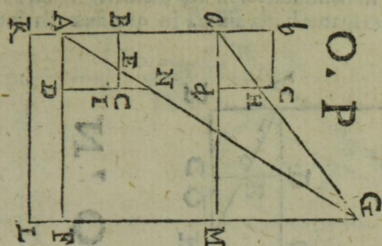
Vel

Vt Aa, differentia Quotientum, qui fiunt, si latus quadrati per vtrãq; vmbrã versã diuidatur,	*ad Aa, differentiã stationũ notam in mensura aliqua*	*Ita AF, vt 1.*	*ad AF,*

pro-

procreabitur ſemper altitudo AF, ab oculo inſpectoris A, numerata: quemadmodum in problemate 4. Num. 2. demonſtratum eſt.

3 SI denique in vna ſtatione ſeceturlatus vmbræ verſæ in E, & in altera latus vmbræ rectæ in H, vt in 3. figura problematis 4. hic inuerſo ordine repetita: ſi vt in eodem problemate 4. Num. 3. demonſtrauimus, reducatur vmbra verſa ad rectam, & fiat,



Vt NI, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiã ſtationum:*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AF,*

Vel ſine reductione.

Vt O, numerus, qui relinquitur, ſi numerus genitus ex vmbra verſa in rectam ex quadrato lateris dematur,	*ad numerũ P, qui ex vmbra verſa BE, in latus AD, producitur:*	*Ita Aa, differentia ſtationum*	*ad AF,*

producetur AF, altitudo in partibus differentiæ ſtationum Aa, &c.

4 IAM vero ſi diſtantia FG, à turri ad ſignum G, in Horizonte viſum nota fuerit, facilius per vnicam ſtationem in A, factam altitudinem conijciemus. Nam ſi vmbra recta DC, ſecetur in E, vt in 1. figura: *a* Fiat autem.

Vt vmbra recta DE, ad latus AD: Ita diſtantia cognita FG, ad AF, a 4. *ſexti.*

Vel quando vmbra verſa BC, ſecetur in E, vt in 2. figura; *b* ſi fiat.

Vt latus AB,	*ad vmbram verſam BE,*	*Ita diſtantia cognita FG,*	*ad AF.* b 4. *ſexti.*

efficietur nota recta AF, in partibus diſtantiæ FG, à qua ſi dematur latus quadrati AD, notum in eiſdem partibus diſtantiæ FG, nota relinquetur altitudo DF.

QVOD ſi dioptra per C, tranſeat, *c* erit diſtantia FG, altitudini AF, æqualis. Dempto ergo latere quadrati AD, altitudo turris DF, cognita fiet. c 6. *primi.*

HOC idem problema in ſcholio ſequentis problematis abſoluemus per vnicam ſtationem.

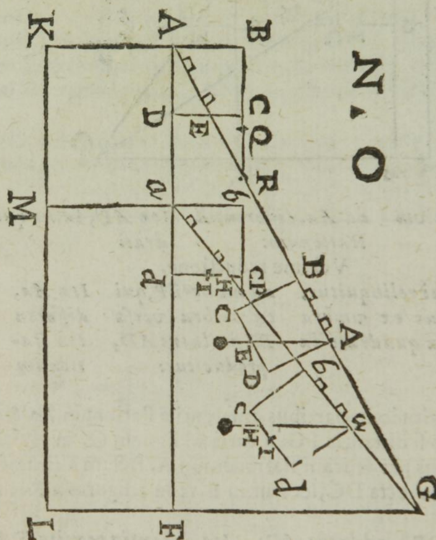
ALTITVDINEM turris vel montis ex eius ſummitate per duas ſtationes in haſta aliqua erecta fa-

ctas

ctas, inuestigare per quadratum, quando signum aliquod in Horizonte videri potest.

PROBLEMA IX.

1 QVANDO in summitate non est planities tanta, vt in ea duæ stationes possint fieri, erigatur hasta aliqua in qua duæ stationes fiant. Vt si

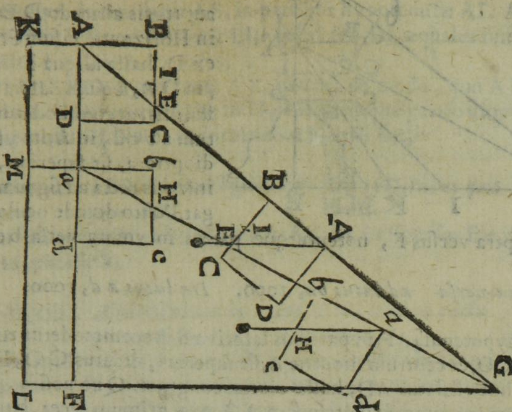


altitudo inuestiganda sit d F, erigatur hasta d A, & centro dioptræ applicato ad hastam primum in a, deinde in A, inspiciatur signũ aliquod G, in Horizonte per radios a G, AG, seceturq. primum vtraque vmbra recta in H, E, vt in prima figura problemaris 3. quam hic inuerso ordine repetiuimus. Nã vt in præcedenti problemate diximus, in hac inuersione DC, fit latus vmbræ rectæ, & B C, versæ. Si ergo, vt in problemate 1. demonstrauimus Num. 1. fiat,

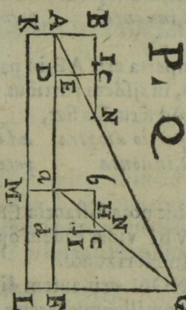
Vt HI, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiã stationum;*	*Ita d H, vmbra recta maior ad AF,*

nota fiet tota recta AF, ex qua si dematur portio hastæ A d, quod duo quadrata occupant, cognita fiet reliqua altitudo dF.

2 SI vero in vtraque statione vmbra versa à radijs intersecetur, vt in 2. figura problematis 3. hic repetita ordine inuerso, & fiat,



vt IE, differentia vmbrarum versarum,	*ad Aa, differentiã stationum:*	*Ita BE, vmbra versa maior*	*ad AF,*



prodibit recta A F, ex qua si detrahatur portio hastæ A d, à principio primi quadrati ad finem secundi, reliqua d F, altitudo fiet quoque nota: veluti in problemate 3. Num. 3. ostendimus.

3 AT si in vna statione secetur latus vmbræ rectæ, & in altera latus vmbræ versæ, vt in 3. figura problematis 3. quæ inuersa huc translata est, reducenda erit vel recta vmbra ad versam, vel versa ad rectam. Nam vt in problemate 3. Num. 5. ostẽdimus, si fiat,

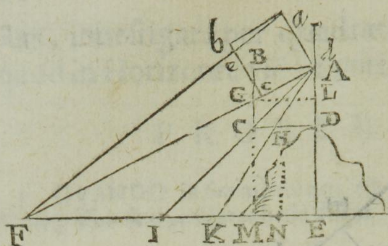
Vt IN, differentia vmbrarum siue versarũ, siue rectarum,	*ad Aa, differentiam stationũ:*	*Ita BN, maior vmbra versa, vel d N, maior vmbra recta,*	*ad AF,*

efficietur nota recta AF, ex qua si dematur portio hastæ A d, nota relinquetur altitudo d F.

4 QVOD si turris esset AF, & ex duabus fenestris d, D, obseruatio fieret, deprehenderetur eodem modo altitudo turris AF, vt patet.

SCHOLIVM.

1 QVOD præcedentia duo problemata per duas stationes siue in plano summitatis turris, vel montis, siue in hasta aliqua erecta factas docuerunt, possumus per vnicam stationem quoq. efficere, & simul distantiam à perpendiculo montis, vel à turre vsque ad signum in Horizonte propositum, inuenire.



Altitudinẽ montis, vel turris ex euisvertice per vnicam stationem, vna cum distantiaà turre, vel perpendiculo montis ad signum in Horizonte propositum metiri.

SIT enim montis alicuius, aut turris altitudo DE, & signũ in Horizonte visum F. Erigatur ex D, hasta aliqua DA, & sumpta DA, æquali lateri quadrati stabilis, accommodetur quadratum a b c d, in A, ita vt centrum dioptræ a, sit superius, & latus inferius recta ad signum F, vergat. Posito deinde oculo in a, dirigatur dioptra versus F, notenturque partes in vmbra versa b e. Nam si fiat,

Vt be, vmbra versa	*ad latus ba,* 1000.	*Ita latus a d,* 1000.	*ad A F,*

reperietur hypotenusa AF, in partibus lateris a d. Accommodetur rursus quadratum ABCD, vt centrum dioptræ A, sit superius, & latus C D, Horizonti æquidistet, hoc est, latus AD, hastæ erectæ congruat. Quo posito, videbitur signum F, per inuentam hypotenusam A F, quæ primum secet latus vmbræ versæ BC, in G; inquiraturque portio dioptræ AG, vt in schol. problem. 7. Num. 2. docuimus. *a* Nam si fiat,

a 4. sexti. & componẽdo.

Vt portio dioptræ AG, inuenta	*ad inuentam hypotenusam A F,*	*Ita AL, vmbra versæ BG, æqualis (ducta GL, parallela ipsi EF,)*	*ad AE,*

comperta erit AE, in partibus hypotenusæ AF. Et si dematur latus quadrati AD, in ijsdem partibus notum, reliqua fiet DE, altitudo montis, aut turris. Quòd si rursus fiat,

Vt portio dioptræ AG, inuenta	*ad inuentam hypotenusam A F,*	*Ita EM, (producta BC, vsque ad M,) lateri CD, æqualis,*	*ad EF,*

exibit nota distantia EF, in ijsdem partibus hypotenusæ AF.

VBI vides eadem opera inueniri distantiam ab oculo A, vsque ad signum F, in Horizonte.

NON erit autem difficile ipsam D E, vel E F, si inuenta fuerit in partibus millesimis lateris AD, vel C D, in alia mensura, vt in pedibus, efficere potam; si fiat,

Vt AD, latus 1000.	*ad AD, notam in pedibus, verbi gratia in* 3. *vel in semisse vnius cubiti:*	*Ita DE, vel EF, inuẽta in millesimis partibus,*	*ad aliud*

Atque hac eadem ratione omnes aliæ lineæ inuentæ in millesimis partibus lateris quadrati, reducentur ad aliam mensuram uel pedum, vel cubitorum &c. Quod etiam in scholio problem. 7. monuimus.

2 SECET deinde hypotenusa AI, (quæ reperietur vt AF, inuenta est) quadratum in C: inuestigeturque portio dioptræ A C, vt in schol. problem. 7. Num. 2. tradidimus. *a* Deinde fiat,

a 2. sexti. & componẽdo.

Vt portio dioptræ AC, inuenta	*ad inuentam hypotenusam AI,*	*Ita A D, latus* 1000.	*ad AE,*

Nam

Nam numerus productus dabit AE, in partibus hypotenusæ AI. Atque totidem partes complectetur distantia EI; *b* quod AE, EI, æquales sint, ob angulos semirectos EAI, EIA, æquales. *b 6. primi.*

3 POSTREMO hypotenusa AK, inuenta eo modo, quo AF, cognita est, secet latus CD, vmbræ rectæ in H, reperiaturque portio dioptræ AH, vt in schol. problem. 7. Num. 2. docuimus. *c* Nam si fiat, *c 2. sexti. & componẽdo.*

Vt portio dioptræ AH, inuenta ad inuentam hypotenusam AK: Ita AD, latus quadrati ad AE,

cognoscetur AE, in partibus hypotenusæ AK, &c. Et si rursus fiat, ducta prius HN, ipsi AE, parallela,

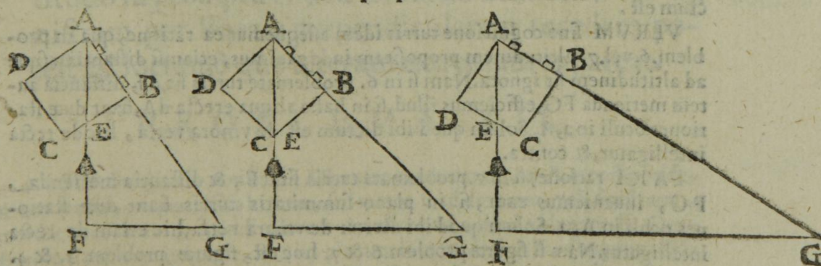
Vt portio dioptræ AH, inuenta Ad inuentam hypotenusam AK, Ita EN, vmbræ rectæ DH, æqualis ad EK,

nota quoque reddetur distantia EK, in ijsdem partibus hypotenusæ AK, &c. Quod si ex vertice D, appareret radix montis, inueniretur eodem modo distantia a radice vsque ad E, quæ ablata ex distantia FE, inuenta notam quoque relinquet distantiam ab F, vsque ad radicem montis, quæ nonnumquam posset desiderari.

EX summitate turris, vel aliqua eius fenestra, distantiam à base turris ad signum propositum in Horizonte per quadratum cognoscere.

PROBLEMA X.

1 SIT turris aliqua AF, & distantia metienda FG. Si igitur altitudo turris cognita est, aut eius portio inter fenestram A, & basem F; inspiciatur signum G, per pinnacidia quadrati penduli. Et si quidem filum perpendiculi intersecet latus vmbræ rectæ in E, vel per punctum C. transeat, Fiat autem,



Vt latus AB, partium 1000. ad vmbram rectam BE, Ita AF, altitudo turris nota ad FG,

cognita erit distantia FG, quæsita in partibus turris notæ.

SI autem vmbra versa secetur in E, & fiat,

Vt vmbra versa DE,	*ad latus DA, partium 1000.*	*Ita AF, altitudo turris cognita*	*ad FG,*

efficietur quoque nota eadem distantia FG, in partibus turris cognitæ.

2 PER quadratum stabile eandem quoque distantiam adipisceris. Sit enim rursus turris quæpiam DE, & distantia metienda EG, vel EH, vel EF. Si igitur dioptra secet latus vmbræ rectæ in I. Et fiat,

Vt latus quadrati AD, 1000.	*ad vmbram rectam DI:*	*Ita altitudo AE, ex turre & latere quadrati AD, conflata.*	*ad EG,*

prodibit distantia quæsita EG.

SI autem dioptra per C. transeat, erit distantia EH, altitudini AE, notæ æqualis.

SI denique vmbra versa intersecetur in K; fiat autem,

Vt vmbra versa BK,	*ad latus quadrati 1000.*	*Ita altitudo nota AE,*	*ad EF,*

inuenietur distantia EF, in partibus altitudinis AE.

HAEC enim omnia in 2. problem. Num. 1. & 2. demonstrata sunt.

3 QVOD si altitudo turris cognita non sit, inuestiganda ea primum erit per problema 8. vel 9. vel potius per scholium problem. 9. aut certe, si commode fieri possit, per chordam aliquam cum appenso perpendiculo demissam exploranda. Deinde procedendum erit, vt Num. 1. & 2. dictum est.

VERVM sine cognitione turris idem assequemur ea ratione, qua in problem. 6. vel. 7. altitudinem propositam indagauimus, etiamsi distantia vsque ad altitudinem sit ignota. Nam si in 6. problemate turris sit d f, distantia autem metienda FG, efficiemus illud, si in hasta aliqua erecta d A, fiant duæ stationes oculi in a, A. Solum quod ibi dictum est de vmbra versa, hic de recta intelligatur, & contra.

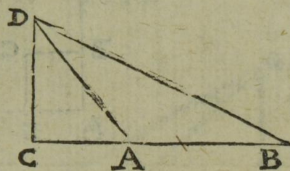
PARI ratione, si in 7. problemate turris sit d F, & distantia metienda FG, inueniemus eam, si in plano summitatis turris fiant duæ stationes oculi in A, a. Solum quod ibi dicitur de vmbra versa, hic etiam de recta intelligatur. Nam si figuræ problem. 6. & 7. hoc est, figuræ problem. 3. & 4. inuertantur, vt altitudines fiant AF, AF, latus quadrati D C, ad vmbram rectam, & BC, aduersam pertinebit, vt initio huius libri in constructione quadrati Num. 4. explicauimus.

SED hanc distantiam longe facilius in scholio præcedentis problematis inuenimus per vnicam stationem, vt patuit in distantia EF, &c.

EX

EX altitudinis alicuius faſtigio, etiamſi altitudo ſit menſoris ſtatura, diſtantiam inter duo ſigna in plano, cui altitudo inſiſtit, ſi ea diſtantia è directo menſoris iaceat, & vtrumque eius extremum cerni poſſit, per quadratum comprehendere.

PROBLEMA XI.



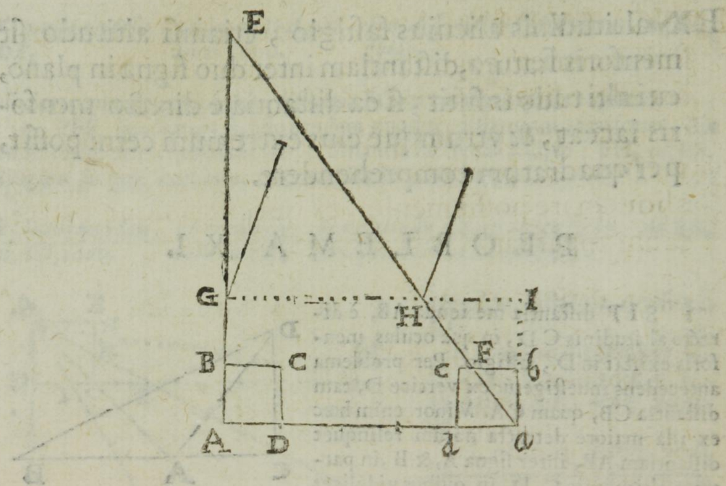
1 SIT diſtantia metienda AB, è directo altitudinis C D, in qua oculus menſoris exiſtat in D, faſtigio. Per problema antecedens inueſtigetur ex vertice D, tam diſtantia CB, quam CA. Minor enim hæc ex illa maiore detracta notam relinquet diſtantiam AB, inter ſigna A, & B, in partibus altitudinis C D, in quibus videlicet diſtantiæ etiam CB, CA, inuentæ ſunt.

2 SI altitudo CD, ſit ſtatura menſoris, reperietur eodem modo diſtantia AB, ſi oculus menſoris in D, vtrumque extremum A, B, cernere poſſit, vt liquet.

LONGITVDINEM in Horizonte extenſam metiri per Quadratum, quando menſor in vno eius extremo exiſtens alterum extremum videre non poteſt, propter tumorem aliquem interiectum, neque altitudo in promptu eſt, ſed ſolum ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularem recedere poteſt ad locum, è quo alterum extremum appareat.

PROBLEMA XII.

1 SIT longitudo metienda AE, cuius extremum E, ex A, menſor videre non poſſit, neque adſit altitudo, ſed tamen ſi ad dextram, vel ſiniſtram recedat per lineam perpendicularem Aa, vſque ad a, illud videre poſſit. Quadratum ſtabile ita erigatur, vt eius planum longitudini A E, congruat. Debet namque conſtare, quænam recta ad extrema A, E, pertineat, hoc eſt, rectam conſtituat, cum data longitudine. Deinde collocato quadrato in Horizontis plano, ita vt latus AB, a longitudine non recedat, extendatur recta per latus AD, vſque ad a, vnde extremum, E, appareat, ſitque ſpatium Aa, per aliquam menſuram notum. Erectũ autem in a, quadratum circumducatur, donec per eius planum extremum E, cernatur. Poſt hæc idem qua-



quadratum in Horizonte collocetur, latusque a d, perpendiculari Aa, congruat: Et dioptra circumuoluatur, donec eius linea fiduciæ rectæ a H, per quam extremum E, inspectum fuit, respondeat, notetur que vmbra versa b F, abscissa. Eruntque triangula a b F, a A E, æquiangula, propter rectos angulos b, A, & alternos b a F, A E a, æquales. *a* Quamobrem si fiat,

a 4. *sexti.*

Vt vmbra versa bF,	*ad quadrati latus a b,* 1000.	*Ita spatium Aa,* *notum*	*ad AE,*

cognita erit longitudo AE, in partibus spatij Aa.

SI forte dioptra latus d c, vmbræ rectæ intersecet, (quod raro continget, cum plerunque AE, maior, sit, quam Aa,) *b* erit tunc.

b 4. *sexti.*

Vt latus a d, 1000.	*ad vmbram rectam abscissam:*	*Ita spatium Aa,*	*ad longitudinem,*

vt perspicuum est, si ducatur ex a, recta secans latus d c, &c.

c 6. *primi.*

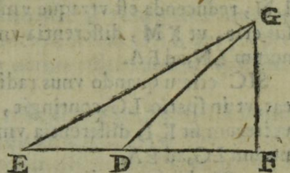
SI denique dioptra fortassis per c, transiret, *c* esset spatium Aa, longitudini quæsitæ æquale; propterea quod tunc fieret angulus semirectus d a c, ideoque & recta a c, si duceretur, faceret cum AE, angulum semirectum, atque adeo angulo d a c, equalem.

2 EADEM distantia longitudoue A E, cognoscetur, si tam in G, quam in H, baculus, seu arundo ad angulos rectos figatur, ita vt ex A, a, radij per arundinem incedentes ad E, ferantur, spatiumque Aa, cognitum sit: vt in 2. probl. Num. 6. traditum est.

LON-

LONGITVDINEM in Horizonte è directo mensoris iacentem cognoscere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neque è loco mensoris eam dimetiri, neque vlla adsit altitudo, dummodo ad dextrã vel sinistram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire possit mensor, ex quo vtrumque extremum appareat.

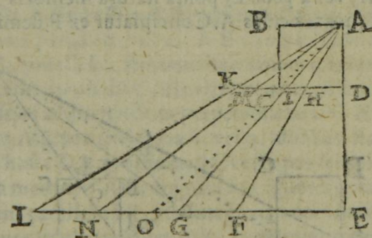
PROBLEMA XIII.



1 LONGITVDO metienda sit E D, è directo mensoris in F, existentis, ita vt neque ad eam accedere liceat, neque eam è loco F, metiri, neque vlla adsit altitudo: Sed solum per lineam perpendicularem FG, ad locum G, vnde vtrumque extremum D, E, videatur, possit accedere. Per problema præcedens inquiratur ex G, tam longitudo FE, quam FD. Hæc enim ex illa detracta notam relinquet propositam longitudinem DE,

ALTITVDINEM montis, vel turris ex eius fastigio, quando è directo mensoris interuallum aliquod inter duo signa, vel etiam inter signum quodpiam ac turrim cognitum est, per quadratum conijcere.

PROBLEMA XIIII.



1 SIT mons, aut turris DE, sitque primum è directo mẽsoris in fastigio D, existentis interuallum FG, notum. Accommodetur quadratum stabile in summitate D, ita vt latus A D, perpendiculare sit ad Horizontem, & C D, Horizonti parallelum. Inspecto igitur per dioptrã vtroque termino F, G, secetur vmbra recta in H, I. a Quoniam igitur est, vt IH, ad HD, ita G F, ad F E: b Item ob triangulorum similitudinem, vt HD, ad DA, ita F E, ad E A; erit ex æquo, vt IH, ad DA, ita GF, ad EA. Igitur si fiat,

a schol. 4. sexti
b 4: sexti.

Vt IH, differentia vm brarum rectarum	*ad DA, latus qua drati*	*Ita interuallum GF, ad EA cognitum*

exibit nota recta EA. Et si dematur latus quadrati DA, (quod fieri debet notum in partibus interualli G F,) reliqua fiet nota altitudo D E, in partibus interualli G F.

2 SIT tota deinde distantia EG, nota. Inspiciendum ergo solum est extremum G. *a* Nam si fiat,

a 4. *sexti.*

Vt ID, vmbra recta	*ad DA, latus quadrati*	*Ita distantia nota GE,*	*ad EA,*

efficietur rursus nota recta EA, &c.

3 QVANDO vmbra versa BC, intersecatur, vt si spatium notum sit LN, reducenda est vtraque vmbra versa ad rectas D K, D M. Nam rursus erit, vt K M, differentia vmbrarum rectarum ad latus D A, ita spatium notum LN, ad EA.

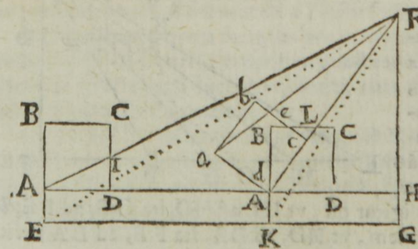
SIC etiam quando vnus radius vmbram rectam, & alter versam intersecat, vt in spatio LG, contingit, reuocanda erit vmbra versa ad rectam D K, vt iterum sit K I, differentia vmbrarum rectarum ad D A, latus, vt spatium notum LG, ad EA.

4 SI denique radius per C, transiret, sumendum esset totum latus C D, pro vmbra recta, at vmbra versa, si qua esset, ad rectam reducenda.

DISTANTIAM ab oculo, vel pede mensoris (vbicunque existat) ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum per quadratum exquirere.

PROBLEMA XV.

1 EXPLORANDA sit distantia puncti F, in muro aliquo siue perpendiculari ad Horizontem, siue inclinato, vel etiam in tecto quopiam ab oculo A, vel à pede E, posita statura mensoris AE. Et sit primum altius punctum F, quam oculus A. Concipiatur ex F, demissa perpendicularis FG, & ad hanc ducta ab oculo A, alia perpendicularis AH. Collocato ergo ita quadrato, vt latus AD, Horizonti æquidistet, inspiciatur punctum F, radiusque AF, vel dioptra auferat vmbram versam D I. Per problema 3. vel 4. vel potius per scholium problem. 7. inuestigetur distantia AH, etiamsi punctum H, non appareat: diligenterque inqui-



inquiratur, quot partes millesimæ lateris A D, in segmento dioptræ A I, comprehendantur. quod multis modis, vt in schol. probl. 7. Num 2. docuimus, exequemur hoc modo. Primum quoniam duo latera A D, D I, in rectangulo triangulo ADI, data sunt, *a* ignorari non poterit basis in partibus laterum. Deinde quia per probl. 1. ex vmbra DI, notus fit angulus DAI, *b* cognoscetur rursus basis AI. Tertio *c* quia quadrata AD, DI, quadrato AI, æqualia sunt; si ex aggregato eorum radix quadrata eruatur, exhibebit ea radix basem AI, notam. His peractis, *d* si fiat, *a 6. triang. rectil.* *b 5. triang. rectil.* *c 47. primi.* *d 4. sexti.*

Vt latus AD, 1000	*ad portionem dioptræ AI, nuper inuentam:*	*ita distantia A H, nuper etiam inuẽta*	*ad A F,*

cognita erit distantia AF, quæsita in partibus inuentæ distantiæ AH.

DISTANTIA autem E F, à pede ad datum punctum F, ita reperiemus. Quoniam in triangulo AEF, duo latera AF, AE, cognita sunt, cum illud proxime sit inuentum, & hoc staturæ mensoris æquale sit; comprehenduntque angulum notum EAF, vtpote conflatum ex recto EAH, & DAI, qui per problema 1. inuentus est ex vmbra versa D I: *e* notum efficietur latus quoque EF, quod quæritur. *e 12. trian. rectil.*

2 QVOD si vmbra recta secetur in L, vt in altero quadrato, vbi iterum mensoris statura est AK: Inuenta portione dioptræ AL, in partibus millesimis lateris quadrati ex angulo BAL, &c. necnon distantia AH, ex problem. 3. vel 4. vel ex scholio probl. 7. *f* Si fiat, *f 4. sexti.*

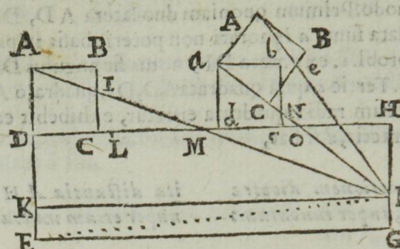
Vt BL, vmbra recta	*ad LA, portionem dioptræ inuentam:*	*Ita distantia AH, inuenta*	*ad AF,*

prodibit rursus nota distantia AF, in partibus distantiæ inuentæ AH.

NON aliter procedes, si dioptra per C, transeat: *g* Cum tunc etiam sit, vt AD, latus ad partem dioptræ AC, inuentam, vt prius, ita distantia inuenta AH, ad distantiam quæsitam AF. *g 4. sexti.*

DISTANTIA autem KF, à pede K, vsque ad F, *h* inuenietur, vt prius, ex duobus lateribus notis AF, AK, & angulo ab ipsis cõprehenso FAK; qui nimirum conflatur ex recto A, & DAL, complemento anguli BAL, quem per problema 1. cognitum efficit vmbra recta BL. *h 12. trian. rectil.*

3 SED sit iam punctum F, oculo A, depressius, & statura mensoris sit AE. Concipiatur ex F, duci FK, Horizonti parallela, vel ad A E, perpendicularis. Item per F, recta GH, ipsi AE, parallela. Accomodato autem quadrato, vt latus AD, rectum sit ad Horizontem, & D C, Horizonti æquidistans, cogitetur DC, latus productum vsque ad H punctum perpendicularis G H. Primum itaque reperiatur altitudo AK, per problema 8. vel 9. duabus stationibus factis in recta DH, vel in hasta DA, protracta, vel certe per scholiũ problem. 9. Quamuis enim statura mensoris AE, cognita sit, ignoratur tamen, quanta sit eius pars AK, quam parallela FK, per imaginationem ducta abscindit: ita vt omnino necessarium sit altitudinem A K, inquirere. quod per 8. problema facile exequemur, si in vtraque statione vmbra versa secetur in I, N, (quod plerunque hic continget) & vtraque abscissa BI, bN, ad rectas DM, d O, reuocetur: Nam si fiat,



Vt LM, differentia vmbrarũ rectarũ	*ad Dd, differentiam stationum:*	*ita AD, latus*	*ad AK,*

inuenta erit altitudo AK, oculo posito in eius summitate A; vt in dicto problem. 8. Num. 2. diximus, &c. Quæ tamen altitudo AK, facilius per scholium problem. 9. reperiri potest.

ITAQVE quia vmbra BI, per 1. problema patefacit angulum BAI, hoc est, alternum AFK, sibi æqualem, necnon & eius complementum FAK; erunt in triangulo rectangulo AKF, duo anguli acuti cogniti, vna cum latere AK, proxime inuento; *a* Itaque si fiat,

a 5. triang. rectil.

Vt sinus totus	*ad latus AK, inuentum:*	*ita AF, secans anguli FAK,*	*ad AF,*

cognita fiet AF, in partibus lateris inuenti AK. Vel inuenta parte dioptræ AI, in partibus millesimis lateris quadrati, vt supra dictum est prope initiũ huius problematis, *b* si fiat,

b 4. *sexti.*

Vt BI, vmbra versa	*ad IA, partem dioptra inuenta:*	*ita KA, altitudo inuenta*	*ad AF,*

nota rursus efficietur distantia AF, in partibus rectę AK, inuentæ.

PORRO distantiam EF, à pede mensoris ad punctum F, *c* inueniemus, vt supra: propterea quod in triangulo AEF, duo latera AE, AF, nota sunt, cum illud sit statura mensoris, hoc autem sit proxime inuentum, angulumq. continent notum FAK, vt paulò ante diximus.

c 12. triang. rectil.

4 NON aliter vtraque distantia cognoscetur, si punctum F, in Horizonte sit positum, qui Horizon per FK, intelligatur transire, ita vt statura mensoris, vel aliqua alia altitudo nota, sit AK. Nam cognita portione dioptræ AI, vt supra traditum est; *c* si fiat,

c 4. *sexti.*

Vt BI, vmbra abscissa	*ad IA, portionem dioptrę inuentã:*	*ita AK, altitudo, vel statura mẽsoris*	*ad AF,*

nota

nota euadet distantia A F, in partibus staturæ mensoris, vel altitudinis notæ AK.

a Rursus si fiat. a 4. sexti.

Vt BI, vmbra abscissa	*ad AB, latus quadrati* 1000.	*ita AK, altitudo, vel statura mensoris*	*ad KF,*

cognita etiam fiet distantia KF, à pede mensoris vsque ad punctum F, in partibus eiusdem staturæ mensoris, vel altitudinis notæ AK. Vbi vides, vtramq. distantiam cognosci per vnicam stationem, quando punctum datum est in Horizonte.

5 SED vbicunque punctum F, existat siue in Horizonte, siue in sublimi, vel infra oculum, inueniemus nihilominus vtramq. distantiam per vnicam stationem, hoc modo. Quando punctum F, est in sublimi, vt in prima figura, accommodetur quadratum ita, vt dioptræ centrum a, sit superius, & latus d c, versus punctum F, dirigatur. Inspecto enim per dioptram puncto F, notetur vmbra versa e b, b Et fiat, b 4. sexti.

Vt vmbra versa e b,	*ad latus b a;*	*ita latus a d,*	*ad AF,*

Nam numerus productus notam faciet distantiam A F, in partibus lateris quadrati. Non aliter distantiam KF, à pede mensoris elicies, si eodem pacto quadratum ad punctum K, applicabis, vt constat.

QVANDO autem punctum F, depressius est oculo, vt in 2. figura, erigendus est baculus a d, minor, quam statura mensoris, & in a, applicandum quadratum, vt rursus centrum dioptræ A, sit superius, & latus a c, ad punctum F, vergat. Nam viso puncto F, ex A, per dioptram, notataque vmbra versa e B, si fiat,

Vt vmbra versa e B,	*ad latus B A:*	*Ita latus A a,*	*ad a F,*

exibit distantia a F, nota in partibus lateris A a. Distantia porrò EF, à pede mensoris conijcietur, si quadratum in E, applicetur, vt in prima figura dictum est. Quando denique punctum F, est in Horizonte, inuenietur vtraque distantia, vt Num. 4. tradidimus.

INTERVALLVM inter duo signa, vel puncta in quolibet plano siue recto ad Horizontem, siue inclinato, per quadratum metiri.

PROBLEMA XVI.

1 IN quolibet plano eleuato AB, inquirendum sit interuallum CD, ex plano EF. Posito oculo in G, vt statura mensoris sit GE, inuestigetur per præcedens problema, vtraque distantia GC, GD, in partibus staturæ mensoris

GE. Deinde applicato quadrato stabili ad oculum G, ita vt eius planum per puncta C, D, transeat, atque vnum eius latus ad punctum D, recta vergat, (quod fiet, si posita linea fiduciæ dioptræ supra illud latus, punctum D, per foramina pinnacidiorum conspiciatur) vertatur dioptra, donec per eam punctum quoque C, appareat, & vmbra abscissa notetur, per quam ex problem. 1. anguli CGD, magnitudo addiscatur. Quod si alterum latus quadrati vltra rectam GC, existat, erit angulus CGD, acutus: si verò citra rectam GC, extiterit, dictus angulus erit obtusus: quem cognoscemus, si ad rectum adijciemus reliquum angulum, inter alterum illud latus, & rectam GC; quem quidem inuestigabimus, vt de acuto CGD, diximus, si nimirum in recta C D, mente notemus punctum, in quod alterum illud latus productum incideret. Nam si tunc latus illud rectæ GC, congruat, & dioptra ad punctum notatum vergat, indicabit vmbra inter latus illud, & lineam fiduciæ angulum prædictum reliquum, vt in problemate 1. dictum est. Si denique alterum illud latus præcisè rectæ GC, congruat, angulus CGD, rectus erit. His peractis, quia in triangulo CGD, latera GC, GD, nota continent angulum G, etiam cognitum; *a* cognoscetur quoque tertium latus CD, quod quæritur.

a 12. trian. rectil.

2 VERVM inuentis distantijs G C, G D, in aliqua mensura, vna cum angulo G, facilius, licet non tam certò, interuallum C D, cognoscemus hoc pacto. Descripto angulo G, seorsum, sumatur in GC, portio quotlibet partiũ lateris quadrati, verbi gratia 500. id est, semissis lateris. Et fiat, vt distantia inuenta G C, ad distantiam inuentam G D, ita partes acceptæ 500. ad aliud. Nam Quotiens dabit numerum quartum proportionalem earundem partium lateris quadrati; quibus si capiatur in GD, portio æqualis, *b* erit interuallum inter extrema puncta dictarum portionum, æquidistans interuallo CD; vt constat, si illæ portiones in rectas GC, GD, in figura transferrentur; propterea quod in illis extremis punctis rectæ G C, G D, sectæ essent proportionaliter. Quare si illud interuallum circino mensuretur in eisdem partibus lateris quadrati, continebit interuallum CD, totidem particulas rectæ GC, in 500. partes æquales diuisæ, quot in illo interuallo comprehenduntur ex particulis lateris quadrati: cum sit vt portio particularũ 500. ad interuallum illud, ita GC, diuisa in partes æquales 500. ad CD. Quæ particulę reducentur ad mensuram, in qua inuentæ sunt GC, GD: si fiat, vt GC, quatenus 500. ad mensuras in GC, inuentas, ita CD, inuenta in particulis rectæ GC, in 500. partes diuisæ, ad aliud.

b 2. sexti.

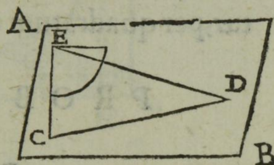
QVIA

QVIA vero vix per circinum accurate reperiri potest interuallum illud inter extremitates proportionalium, magis exquisitè, licet laboriosius, interuallum propositum cognoscetur per 12. triang. rectilineorum.

INTERVALLVM transuersum in Horizonte, cuius vtrumque extremum videri potest, per quadratum metiri.

PROBLEMA XVII.

1 IN Plano Horizontis AB, iaceat interuallum CD, in transuersum, pes autem mensoris in E, ita vt longitudo C D, in vtramque partem producta per E, non transeat. Nam quando recta CD, è directo mensoris iacet, inuestigabitur ea per problema 11. Itaq. vt transuersum interuallũ CD, cognoscatur, inquirenda erit primum vtriusque extremi puncti C, D, distantia à pede mensoris E, vt Num. 4. problematis 15. traditum est, per vnicam stationem. Deinde angulus C E D, explorandus. quod fiet, si vnum latus quadrati rectæ EC, congruat, & dioptra rectæ ED. Nam vmbra abscissa inter latus illud, ac dioptram ostendet quãtitatem anguli CED, vt in problemate 1. dictum est: qui quidem acutus erit, si alterum latus vltra rectam E D, existet: rectus verò si præcisè rectæ E D, congruet: obtusus denique, si citra rectam ED, cadet; quem cognoscemus, si recto angulo adijciemus reliquum acutum, qui deprehendetur, vt in præcedenti problemate docuimus. Quoniam ergo triangulum habemus C E D, cuius duo latera EC, E D, cognita sunt, vna cum angulo comprehenso E: a cognitum quoque erit tertium latus CD, in partibus rectarum EC, ED. a 12. triang. rectil.



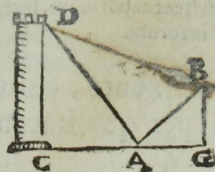
EADEM recta CD, cognita erit, si in rectis EC, E D, seorsum descriptis cum angulo E, inuento sumantur partes ipsis EC, ED, proportionales, &c. vt Num. 2. præcedentis problematis factum est.

DISTANTIAM alicuius signi in Horizonte positi à summitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipsum signum accessus non pateat, per quadratum eruere, vbicunque mensor existat.

PROBLEMA XVIII.

1 IN Horizontis plano punctum A, distet à summitate D, alicuius altitudinis per rectam AD, quã sic venabimur. Vbicunque oculus mensoris existat, nimirum in B, indagentur per problema 15. distantiæ punctorum A, D, ab oculo mensoris B. Deinde angulus exploretur A B D, vt in proble-

a 12. triang. rectil.

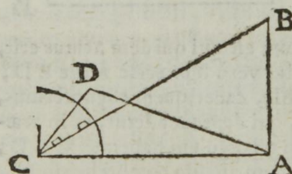


mate 16. docuimus. Nam ſic habebimus triangulum A B D, cuius duo latera nota a ſunt B A, B D, vna cum angulo B. a Igitur tertium quoque latus AD, cognitum erit.

QVOD etiam inuenietur, vt Num. 2. problem. 16. docuimus, ſi in rectis B A, BD, cum angulo B, ſeorſum ductis ſumentur partes ipſis BA, BD, proportionales, &c.

ALTITVDINEM inacceſſibilem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum rectam lineam accedere poſſit menſor, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis cernatur, per quadratum explorare.

PROBLEMA XIX.



1 ALTITVDO metienda ſit AB, inacceſſibilis, ad quam ex C, loco menſoris non liceat accedere, aut ab ea recedere ſecundum lineam rectam, ſed ſolum in tranſuerſum vſque ad D, vnde baſem A, videre poſſimus. Per problema 17. inueſtigetur ex D, interuallum tranſuerſum A C. Nam per 5. problema, quando iam diſtantia CA, manifeſta eſt, altitudo AB, reddetur nota, quam quærimus, in partibus diſtantiæ inuentæ C A.

CAETERVM ex ſcholio problem. 7. facilius per vnicam ſtationem in C, factam inneſtigabitur & altitudo AB, & diſtantia A C, vna cum hypotenuſa B C.

ALTITVDINEM maiorem ex minori cognita, etiamſi ſolum maioris altitudinis vertex cernatur, per quadratum efficere notam.

PROBLEMA XX.

1 MAIOR altitudo A N, metienda proponatur ex minori aliqua turri CO, cognita, ex qua ſolum cacumen A, non autem baſis N, appareat. Fiant in ſummitate duæ ſtationes in C, & D, ſi planum ſummitatis id permittat, ſtaturaq. menſoris ſit CG, vel DE, & ad AN, intelligatur ducta perpendicula-

ris

ris GEF. Per 6. problema reperietur altitudo AF, ad quam si adijcietur altitudo minor DO, vna cum mensoris statura CG, hoc est, recta FN, cognita fiet tota altitudo maior AN.

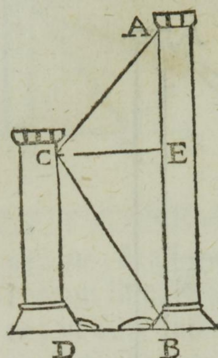
2 QVOD si in summitate tãta planities non sit, vt duæ stationes fieri possint, erigenda est hasta aliqua ad Horizontem recta, nisi forte adsit ædificium quodpiam erectum, ibique faciendæ duæ stationes. Nam tunc per problema 7. inuenietur altitudo inter cacumen maioris altitudinis, & rectam, quæ ab inferiori statione Horizonti ducitur parallela. Cui si apponetur altitudo minor ab inferiore statione vsque ad eius basem, conflabitur tota altitudo maior. Vt in figuris problematis 4. si maior altitudo sit G L, & minor AK, fiantque duæ stationes in A, a, inferior vna, & altera superior, reperietur per 7. problema altitudo GF, cui si addetur minor altitudo AK, ab inferiore statione vsque ad basem, componetur tota altitudo maior GL.

PORRO facilius ex scholio problem. 7. altitudinem AF, eruemus, si in G, bis quadratum accommodetur, vt in eo scholio diximus. Vt si in figura eius scholij maior altitudo foret IF, & minor cognita A H, inueniretur GF, vt ibi ostensum est, &c.

ALTITVDINEM maiorem ex minori incognita, si tamen basis maioris cerni possit, per quadratum venari.

PROBLEMA XXI.

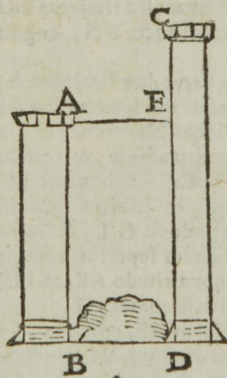
1 IN figura problematis 17. lib. 2. addiscatur altitudo AE, vel per problema



blema 6. vel 7. aut potius per ſcholium problem. 7. ſi C, ſit ſummitas minoris altitudinis CD. Deinde quia baſis B, maioris altitudinis ponitur poſſe videri ex C, inquiratur etiam altitudo minor C D, per problema 8. aut 9. vel potius per ſcholium problem. 9. ſi C, fuerit ſummitas minoris altitudinis CD. Hæc enim adiecta ad inuentam altitudinem A E, conficiet totam maiorem altitudinem AB, notam, quæ deſideratur.

ALTITVDINEM minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris cerni non poſſit, per quadratum ſcrutari.

PROBLEMA XXII.



1 MINOR altitudo AB, ex maiore C D, cognita proponatur dimetienda. Intelligatur ducta recta A E, Horizonti B D, æquidiſtans, vt E D, fiat minori altitudini AB, æqualis. Si igitur ex ſummitate C, per problema 8. vel 9. aut potius per ſcholium probl. 9. exploretur altitudo C E, inſpecto nimirum cacumine A, ac ſi eſſet ſignum aliquod in Horizonte AE, ex C, viſum: atque hæc altitudo inuenta C E, ex maiore altitudine CD, quæ cognita ponitur, detrahatur, reliqua fiet minor altitudo AB, quam inquirimus.

ALTITVDINEM minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris appareat, per quadratū elicere.

PROBLEMA XXIII.

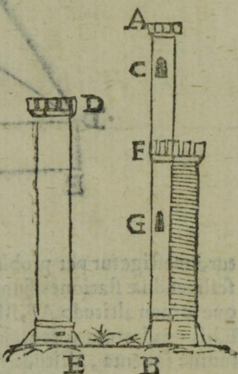
1 FIGVRA præcedentis problematis repetatur. Et quia baſis B, minoris altitudinis, tanquam ſignum quodpiam in Horizonte poſitum, videri poteſt

poteſt, ex hypotheſi, nota efficietur per problema 8. aut 9. vel potius per ſcholium probl. 9. maior altitudo CD. Quare, vt in præcedenti problemate dictũ eſt, minor altitudo AB, ex maiore CD, proxime inuenta cognoſcetur. quod eſt propoſitum.

PORTIONEM altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere.

PROBLEMA XXIIII.

1 SIT portio AC, maioris altitudinis AB, exquirenda ex minore altitudine DE; Item portio GF, altitudinis minoris FB, ex maiore altitudine DE. Si altitudo DE, minor eſt reliqua portione CB, maioris altitudinis, inueſtiganda erit per problema 20. vel 21. vtraque altitudo maior AB, CB, ex minori DE, prout videlicet DE, cognita fuerit, aut incognita. Nam CB, ablata ex AB, notam relinquet propoſitam portionem AC. Si verò DE, maior eſt reliqua portione FB, ſi nimirum maioris altitudinis portio AF, metienda proponatur: inueſtiganda quidem erit maior altitudo AB, ex minore DE, per problema 20. vel 21. At vero minor altitudo FB, ex maiore DE, per problema 22. vel 23. exploranda erit, prout videlicet DE, nota fuerit, aut ignota. Nam rurſus FB, detracta ex AB, notam relinquet portionem propoſitam AF.

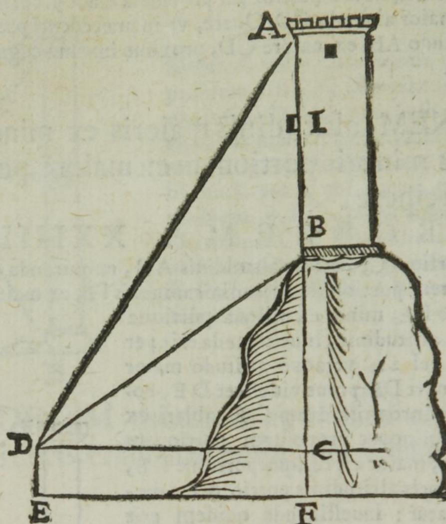


2 NON ſecus per problema 22. vel 23. indaganda erit vtraque altitudo minor FB, GB, ex maiore DE, ſi fortè illarum differentia FG, inuenienda ſit.

ALTITVDINEM, cuius baſis impoſita ſit monti, vel alteri cuipiam altitudini, & vtraque illius extremitas cerni poſſit, etiamſi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiuſdem puncti infimi diſtantia à loco menſoris cognita non ſit, per quadratum ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.

PROBLEMA XXV.

1 HVIVSCEMODI altitudo eſt turris ſupra montem poſita, & portio alicuius ædificij inter duas feneſtras, vel duo ſigna, quorum alterum altero ſuperius eſt. Sit igitur ſupra montem BF, altitudo turris AB, propoſita. Ex aliquo loco E, in planitie, aut valle, vnde vtrumque turris extremum conſpicia-



tur, inuestigetur per problema 6. vel 7. tam altitudo A F, quàm B F, prout scilicet duæ stationes fiunt aut in plano, aut in aliqua hasta erecta. Vtraque tamen altitudo AF, BF, facilius inuenietur per scholium problem. 7. si in E, bis quadratum accommodetur, vt in eo scholio factum est. Vtraque altitudine inuenta, altitudo montis BF, dempta ex tota altitudine A F, notam relinquet optatam altitudinem AB.

SCHOLIVM

Suprema, media atq; infima pars altitudinis, quo pacto metiẽda sit.

ITAQVE si AB, portio superior totius alicuius altitudinis AF, desideretur, indaganda erit per probl. 6. vel 7. aut potius per scholium probl. 7. tam tota altitudo A F, quàm eius portio BF. Earum enim differentia notam dabit superiorem portionem AB, desideratam.

SI autem media aliqua portio I B, cognoscenda sit, conijcienda rursum erit per problema 6. vel 7. aut potius per scholium problem. 7. vtraque altitudo IF, BF, vt earum differentia IB, nota reddatur.

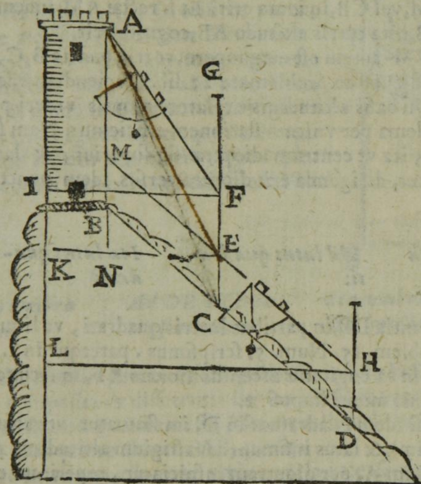
SI denique infima pars BF, proponatur inquirenda, exploranda ea erit per problema quoque 6. vel 7. aut potius per scholium problem. 7.

DISTANTIAM accliuem montis à loco mensoris vsque ad basem altitudinis monti impositæ, etiam non visam, vna cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit, propè verum, beneficio quadrati efficere cognitam.

PRO-

PROBLEMA XXVI.

1 SIT turris A B, monti imposita, in cuius aſcenſu, ſeu latere menſor conſiſtat in C, ex quo loco baſem turris videre non poſſit. Erigatur haſta aliqua CG, ad Horizontē, non autem ad latus montis, perpendicularis, ſitque menſoris ſtatura C E. Cogitetur ducta E K, ad altitudinem perpendicularis, aut Horizonti æquidiſtans. Applicato autem quadrato ſtabili ad haſtam in puncto E, (ſi pendulum adhibeatur, conſtituendus etiam erit oculus



in E.) dirigatur dioptra verſus cacumen A; & per vmbram abſciſſam inueniatur angulus AEK, vt in problemate 1. tradidimus. Deinde fiant alia ſtatio ſuperior in F, in haſta, ductaque per cogitationem recta F I, ad altitudinem perpendiculari, dirigatur rurſus dioptra verſus A, atque eodem modo angulus eruatur AFI, *a* Et quia angulus AFG, duobus angulis FEA, FAE, æqualis eſt, ſi auferatur AEF, complementum prioris anguli AEK, in ſtatione inferiori E, inuenti, ex AFG, complemento poſterioris anguli in ſuperiori ſtatione F, deprehenſi, reliquus fiet angulus EAF, cognitus. Quoniam igitur in triangulo AEF, duo anguli A, E, cogniti ſunt, vna cum latere EF, hoc eſt, cum differentia ſtationum, *b* nota fient reliqua latera A E, AF.

a 32. *primi*

b 10. triang. rectil.

2 POST hæc erigatur alius baculus DH, ad Horizontem rectus, ſumptaque menſoris ſtatura ipſi C E, æquali, & ducta recta H L, ad altitudinem perpendiculari, applicetur ad H, quadratum, ac dioptra in punctum E, dirigatur, rurſumque per problema 1. ex vmbra abſciſſa angulus eliciatur EHL,

a 33. *primi.* ac radius visualis H E, altitudini occurrere concipiatur in M, *a* qui ipsi B C D, lateri montis parallelus erit. Concipienda etenim sunt tria puncta B, C, D, in vna recta linea iacere, ac si D C, producta ad basem turris pertineret. *b* Quia vero angulus EHL, angulo MEK, internus externo æqualis est,
b 29. *primi.* si EHL, cognitus, hoc est, MEK, ex angulo AEN, in priori statione E, obseruato, detrahatur, notus relinquetur angulus A E M: Est autem & angulus EAM, cum complementum sit anguli AEN, in priori statione E, obseruati, cognitus. Igitur & AME, reliquus duorum rectorum cognitus erit: qui quidem etiam relinquitur, si NMH, complementum anguli MHL, in statione postrema H, inuenti ex duobus rectis detrahatur. Quapropter cum in triangulo AEM, omnes anguli noti sint, vna cum latere AE, quod paulo ante inuenimus, *c* cognoscētur quoque reliqua duo latera ME, AM: ac propterea distantia EM, vel CB, inuenta erit. Et si rectæ AM, inuentæ addatur mēsoris statura MB, tota turris altitudo AB, cognita erit.
c 10. triang. rectil.

CVRANDVM autem est magnopere, vt tria puncta B, C, D, in vna linea recta iaceant, id quod in problemate 22. lib. 2. faciendum esse monuimus.

3 QVOD si basis altitudinis ex latere montis videri possit, nullo ferme labore problema per vnicam stationem efficiemus. Nam si in D, statuatur quadratum, ita vt centrum dioptræ sit superius, & latus infimum rectæ in B, feratur, dirigenda erit dioptra versus idem punctum B. *d* Nam si fiat,
d 4. *sexti.*

Vt vmbra versa abscissa	*Ad latus quadrati:*	*Ita latus quadrati*	*ad aliud,*

inuenietur distantia DB, in partibus lateris quadrati, vt liquido constat ex ijs, quæ in problem. 15. Num. 5. scripsimus, patetque in 1. figura eiusdem problematis; si in ea cogitetur ascensus montis A F, in secundo quadrato, & F, basis altitudinis monti impositæ.

DEINDE si idem quadratum in D, ita statuatur, vt rursus centrum dioptræ sit in sublimi, & latus infimum ad fastigium altitudinis A, recta tendat, idemque punctum A, per dioptram inspiciatur, reperietur eodem pacto distantia à D, vsque ad A; si fiat,

Vt vmbra versa abscissa	*ad latus quadrati:*	*Ita latus quadrati*	*ad aliud.*

POSTREMO, accommodato quadrato, ita vt vnum latus rectæ DB, congruat, & dioptra in A, dirigatur, inuenietur angulus, quem rectæ D B, D A, efficiunt, vt in problem. 16. Num. 1. docuimus. Si ergo hic angulus seorsum describatur, & in rectis DB, DA, capiantur duæ portiones proportionales, vt in eodem problem. 16. Num. 2. tradidimus, reperietur altitudo AB, per interuallum inter duas illas portiones, vt ibi interuallum CD, indagauimus.

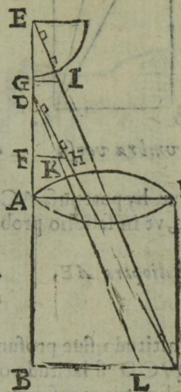
PROFVNDITATEM putei, vel ædificij cuiusuis ad perpendiculum erecti, si modo angulus fundi, vel signum aliquod in fundo positum conspiciatur,

per

per quadratum efficere cognitam.

PROBLEMA XXVII.

1 HOC nihil eſt aliud, niſi turrim ex eius vertice, quando in Horizonte ſignum aliquod apparet, per duas ſtationes in haſta aliqua factas metiri, vt in problem. 9. factum eſt. Quare eius problematis praxim hic breuiter repetemus. Sit puteus, ſeu ædificium erectum ABCM, cuius angulus C, in fundo, vel ſignum quodpiam C, in fundo poſitum conſpici poſſit. Erecta haſta A E, in orificio putei, vel ſummitate ædificij, fiant duæ ſtationes oculi menſoris in D, E, & applicato latere quadrati ad haſtam bis, vt modo centrum dioptræ in D, & modo in E, ſtatuatur, dirigatur dioptra verſus C. Si igitur in vtraque ſtatione dioptra vmbram rectam interſecet, quod plerunque in puteorum dimenſione fieri ſolet: Fiat autem,



Vt differentia vmbrarum rectarum	*Ad DE, differentia ſtationum*	*Ita vmbra recta maior*	*ad EB,*

exibit recta EB, nota in partibus differentiæ ſtationum D E. Si ergo auferatur recta E A, compoſita ex differentia ſtationũ DE, & portione haſtæ D A, quæ plerunque ſtaturæ menſoris eſſe ſolet æqualis, vel certe facile menſurari poteſt, nota relinquetur altitudo AB, quæſita.

2 SI vero in vtraque ſtatione vmbra verſa interſecetur, & fiat,

Vt differentia vmbrarum verſarum	*ad DE, differentiam ſtationum*	*Ita vmbra verſa maior*	*ad E B,*

fiet rurſus nota recta EB, &c.

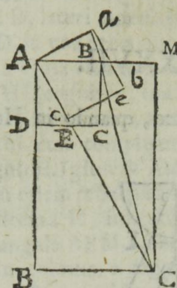
3 SI denique in vna ſtatione latus vmbræ rectæ ſecetur, & in altera latus vmbræ verſæ, reducenda erit vel vmbra recta ad verſam, vel verſa ad rectam. Nam ſi rurſus fiat.

Vt differentia vmbrarum ſiue verſarum, ſiue rectarũ,	*ad DE, differentiam ſtationũ:*	*Ita vmbra verſa vel recta maior*	*ad EB,*

iterum producetur recta EB, in partibus differentiæ ſtationum DE, &c.

PER vnicam quoque ſtationem aſſequemur altitudinem putei, quemadmodum in ſcholio probl. 9. ex montis vertice eius altitudinem menſi ſumus: ſi videlicet in A, quadratum ita ſtatuatur, vt centrum a, dioptræ ſuperius ſit, & latus infimum AC, ex A, ad punctum C, vergat, ad inueniendam di-

ſtantiam



ſtantiam, vel hypotenuſam A C, &c. vt in eo ſcholio factum eſt, atque hæc figura appoſita declarat. Secundo enim quadratum ita locandum eſt, vt A, centrum dioptræ ſit in A, & latus A D, lateri putei A B, adhæreat; adeo vt per dioptram puncto C, inſpecto, radius viſualis ab hypotenuſa AC, non differat. Itaque ſi fiat.

Vt e b, vmbra verſa	*ad latus b a,*	*ita latus a A,*	*ad aliud,*

inuenietur hypotenuſa AC. Inuenta deinde portione dioptræ AE, in ſecundo quadrato, vt in ſcholio problem. 7. docuimus: *a* Si rurſus fiat, *a 2. ſexti. & componēdo.*

Vt portio dioptræ AE, inuenta	*ad hypotenuſam inuentam AC:*	*ita latus AD,*	*ad aliud,*

prodibit altitudo, ſiue profunditas AB.

4 QVOD ſi latitudo orificij AM, vel fundi BC, cognita fuerit, quæ facile per aliquam menſuram cognoſci poterit, facilius per vnam duntaxat ſtationem in D, factam, & per vnicam applicationem quadrati, profunditatem AB, conijciemus. Nam ſi fiat,

Vt vmbra recta, ſi ea abſciſſa fuerit,	*ad latus quadrati:*	*Ita latitudo cognita BC,*	*ad AB,*

Vel

Vt latus quadrati	*ad vmbram verſam, ſi ea fuerit abſciſſa:*	*Ita latitudo cognita BC,*	*ad AB,*

producetur A B, profunditas nota in partibus latitudinis.

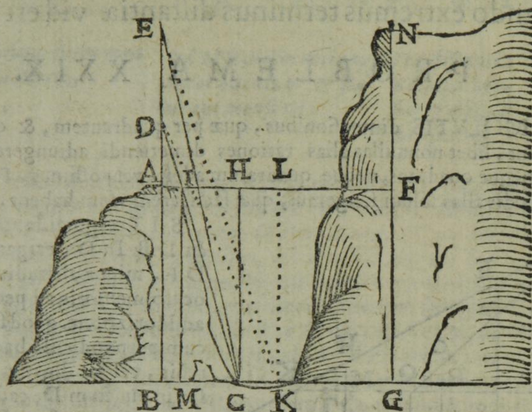
ET ſi forte dioptra per punctum C, in quadrato tranſeat, erit latitudo BC, rectæ AB, æqualis.

HAE porro praxes demonſtratæ ſunt omnes in prædicto problemate 9. hac vltima Num. 4, excepta, quam in problemate 8. Num. 4. demonſtrauimus.

PROFVNDITATEM vallis, eiuſdemque deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, & eius terminus, vel aliquod in ea ſignum conſpici poſſit, per quadratum cognoſcere.

PROBLEMA XXVIII.

1 HOC etiam aliud nihil est, nisi altitudinem quampiam ex eius summo fastigio per duas stationes in hasta aliqua erecta dimetiri, vt in problem. 9. factum est, & in præcedenti problemate repetitum. Sit enim vallis inter duos montes AB, NG, posita, & terminus ipsius C, ex monte AB, conspici



possit. Erecta hasta AE, in qua duæ stationes oculi mensoris fieri possint in D, E, si reliqua construantur, vt in problemate 24. lib. 2. cuius hic figuram iterauimus; inuestigabitur recta EB, vt in 1. figura præcedentis probl. recta EB, fuit inuenta. Et si dematur portio hastæ AE, altitudo montis AB, vel profunditas vallis HC, reliqua fiet nota.

2 DESCENSVS autem obliquus IC, ita colligetur. Per vmbram à dioptra ad C, directa abscissam eliciatur angulus BDC, ex 1. problemate, hoc est, angulus CIM, *a* qui ei æqualis est, externus interno; eritq. proinde reliquus angulus ICM, notus, vt pote illius complementum. Quocirca cum in triangulo CIM, anguli acuti cogniti sint, vna cum latere IM, nuper inuento; *b* basis IC, ignorari non poterit. *a 29. primi.* *b 5. triang. rectil.*

SED hæc omnia facilius per vnicam stationem inuestigabuntur, si in D, puncto hastæ quadratum bis applicetur, vt in præcedenti problemare Num. 2. & in scholio problem. 9. factum est in puncto A, &c.

3 QVOD si terminus C, non cernatur, eligatur aliquod signum K, in valle, quod ex stationibus D, & E, appareat. Ita enim per problema 9. vel potius per eius scholium, eadem altitudo IM, vel HC, inuenietur.

IMMO si in plano vallis duæ stationes commode fieri possint, percipietur ex illis eadem altitudo IM, per problema 6. vel per scholium problem. 7. Descensus verò obliquus IC, tanquam interuallum inter duo signa I, & C, per problema 16. indagandus erit.

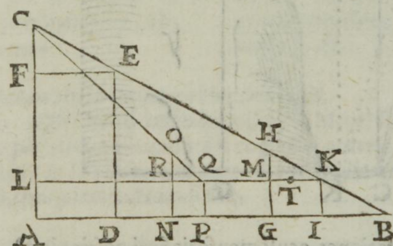
4 EADEM denique profunditatem CH, venari licebit ex altiore monte

monte NG, si modo terminus C, minoris montis, vel aliquod signum in valle appareat ex cacumine N: non aliter, quàm in problemate 22. vel 23. minorem altitudinem ex maiore deprehendimus. Nam hic minor altitudo inquirenda est CH, & maior NG, ex cuius vertice N, terminum C, videri posse statuimus.

DISTANTIAM inter pedes mensoris, & signum aliquod in plano Horizontis beneficio baculi metiri, quando extremus terminus distantiæ videri potest.

PROBLEMA XXIX.

1 ABSOLVTIS dimensionibus, quæ per quadrantem, & quadratum fieri solent, libet nonnullas alias rationes dimetiendi adiungere, vt illis, quando neque quadrans, neque quadratum adest, vti possimus. Ex pluribus autem modis illas solum seligemus, quæ faciliorem vsum habent.



SIT ergo distantia metienda DB. In D, erigatur baculus DE, minor altitudine AC, ab oculo mensoris ad pedes, rectus ad Horizōtem. quod fiet, si filum cum perpendiculo baculo adhærebit, vel lapillus ex E, demissus in punctum D, cadet. Deinde retrocedat mensor vsque ad A, donec radius visualis ex C, prodiens, & per extremum E, baculi transiens occurrat puncto B; intelligaturque duci recta EF, ipsi AB, parallela. Quoniam igitur triangula CFE, EDB, æquiangula sunt; quod anguli F, D, sint recti, a & ECF, BED, æquales, internus, & externus, &c. b Si igitur fiat,

a 29. *primi.*
b 4. *sexti.*

Vt CF, differentia inter baculum DE, & mensoris staturam AC.	*ad FE, spatium inter mensorem & baculū:*	*Ita ED, longitudo baculi noti.*	*ad DB,*

nota prodibit distantia quæsita DB, in partibus baculi DE, vel staturæ mensoris AC. Debent enim baculus, & statura mensoris per vnam eandemque mensuram esse cognita.

ALTITVDINEM turris, aut alterius rei per baculum indagare.

PROBLEMA XXX.

1 SIT in figura præcedentis problematis metienda altitudo AC. Figatur in terra baculus GH, rectus ad Horizontem, & aliquantulum maior statura

tura menſoris ab oculo ad pedes quæ ſit I K. Deinde retrocedat menſor vſque ad I, ita vt eius oculus in K, conſtitutus faſtigium C, inſpiciat: intelligaturq. ducta recta KL, Horizonti AB, parallela, ſecans baculum in M. *a* Quoniã igitur triangula K M H, K L C, ſimilia ſunt, propter parallelas M H, L C: ſi fiat, *a coroll. 4. ſexti.*

Vt KM, ſpatium inter menſorem, & baculum,	*ad MH, differentiam inter baculum & ſtaturam menſoris:*	*Ita diſtantia KL, qua nota fiat p aliquã menſuram,*	*ad LC,*

producetur recta LC, cui ſi adijcietur ſtatura menſoris AL, tota altitudo propoſita AC, cognita erit in partibus ſtaturæ menſoris, vel diſtantiæ KL.

2 QVOD ſi acceſſus non pateat ad altitudinem AC, vt diſtantiam IA, metiri poſſimus, figatur idem baculus, vel alius illi æqualis N O, accedendo videlicet propius ad altitudinem. Deinde menſor retrocedat ad P, vt eius oculus in Q, exiſtens per ſummitatem baculi O, iterum faſtigium C, videat: ſeceturque baculus NO, à recta KL, in R. *c* Et quia eſt, vt KM, ad MH, ita KL, ad LC: Item vt QR, ad RO, ita QL, ad LC: *d* Eſt autem maior proportio KL, ad LC, quam QL, ad eandem LC; erit quoque maior proportio K M, ad MH, quam QR, ad RO, ipſi MH, æqualem. (Cum enim & totæ GH, NO, & ablatæ GM, NR, æquales ſint, erunt quoque reliquæ MH, RO, æquales) *e* Igitur KM, maior erit, quàm QR. Abſciſſa ergo KT, æquali ipſi QR, *f* quoniã eſt, vt KM, ad MH, ita KL, ad LC, erit permutando, vt KM, tota ad totã KL, ita MH, ad LC. Eadẽ ratione erit QR, hoc eſt, KT, ablata ex KM, ad QL, ablatam ex KL, vt RO, ad LC, hoc eſt, vt MH, ad LC. Igitur & reliqua TM, ad reliquam KQ, erit vt tota KM, ad totam KL: Vt autem KM, ad KL, ita paulo ante oſtendimus eſſe MH, ad LC. Quapropter ſi fiat. *c 4. ſexti.* *d 8. quinti.* *e 10. quinti* *f 4. ſexti.*

Vt TM, differentia inter ſpatia K M, & QR, vel KT, à menſore vſque ad baculos,	*ad KQ, differentiam ſtationum*	*Ita MH, differẽtia inter baculum, & menſoris ſtaturã,*	*ad LC,*

efficietur nota L C, cui ſi addetur ſtatura menſoris A L, nota quoque euadet propoſita altitudo AC.

3 IAM ſi prima ſtatio fiat in Q, & ſecunda in K, recedendo magis ab altitudine, non variabitur praxis & demonſtratio, vt liquet.

DISTANTIAM in plano Horizontis inter menſorem, & ſignum quoduis beneficio normæ adinuenire.

PROBLEMA XXXI.

G F A B H I C D E

1 PROPOSITA ſit diſtantia AB. In A, loco menſoris figatur ad angulos rectos baculus AC, paulò minor ſtatura menſoris, & per menſuram, per quam menſoris ſtatura cognita eſt, notus. Angulus deinde rectus normæ C, ſummitati baculi applicetur, & eius latus CE, circa C, paulatim attollatur, deprimaturue, donec radius viſualis per latus interius normæ CE, incedens feratur in punctũ extremũB, diligenterq. notetur punctum F, in quod radius viſualis per alterum latus interius C D, tranſiens incidit. *a* Et quoniam AC, media eſt proportionalis inter AF, quæ in partibus baculi nota efficiatur, & diſtantiam AB: ſi fiat,

a coroll. 8. ſexti.

Vt AF, inter baculum, & punctum F, cognita	*ad baculum AC:*	*Ita baculus AC,*	*ad AB,*

Hoc eſt, ſi quadratus numerus baculi per AF, diuidatur, prodibit in Quotiente diſtantia AB, nota in partibus baculi.

2 NON abs re foret, ſi duo clauiculi in vtroque latere normæ interiori affigerentur, vt radius viſualis per illos incedens rectius in B, & F, feratur.

ALTITVDINEM turris, aut alterius rei per normam inueſtigare.

PROBLEMA XXXII.

1 IN figura præcedentis problematis ſit metienda altitudo GH. Figatur rurſus in A, loco menſoris baculus A C, cuius ſummitati C, angulus rectus normæ applicetur, eiuſque latus CE, paulatim eleuetur, deprimaturue, donec per latus interius CE, vertex altitudinis H, conſpiciatur, punctumque F, in quo alterum latus C D, incurrit, notetur. Et quoniam ducta recta CI, Horizonti parallela, triangula ACF, HCI, æquiangula ſunt; quod anguli A, I, recti ſint, & ACF, HCI, reliqui ex rectis ACI, HCD, (ſi nimirum communis auferatur DCI,) æquales: *b* ſi fiat.

b 4. ſexti.

Vt baculus AC,	*ad AF, inter baculum, & punctum F, cognitam*	*Ita diſtantia CI, vel AG, quæ nota fiat per aliquam menſuram*	*ad IH,*

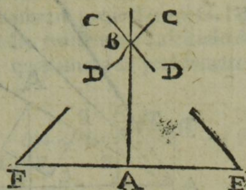
procreabitur IH, nota, ad quam ſi adijcietur longitudo baculi AC, vel G I, propoſita altitudo GH, cognita erit.

DISTANTIAM in plano Horizontis, quæ non ſit valde magna, alio modo facillimo dimetiri.

PRO-

PROBLEMA XXXIII.

1 QVANDO planum aliquod exiguum habet longitudinem, ſed tamen menſurari non poteſt, ob aliquod impedimentum, cuiuſmodi ſunt latitudines fluminum, & ſtagnorum, quorum latitudines, quas nunc pro longitudinibus accipimus, menſurari nequeunt, ob interiectam aquam, vtemur inter alia hoc etiam artificio. Prope ripam fluminis, aut ſtagni, vel alterius cuiuſcunque rei metiendæ, figatur baculus AB, ad Horizontem rectus, cui in puncto B, accommodetur virgula C D, ita vt circa B, deprimi aut eleuari poſſit, donec radius viſualis per CD, tranſiens occurrat extremo E, diſtantiæ AE, metiendæ. Deinde virgula C D, manente immobili, ne angulus DBA, mutetur, vertatur baculus AC, ad rectos ſemper angulos Horizonti inſiſtens, donec radius viſualis per eandem virgulam CD, incedens occurrat plano alicui prope flumen, aut ſtagnum, in quo nimirum menſor exiſtit, & quod menſurari poſſit, in puncto F. Quoniam ergo duo anguli A,B, trianguli ABE, duobus angulis A,B, trianguli A B F, æquales ſunt, & latus AB, commune: *a* erunt latera AE, AF, æqualia: atque idcirco, ſi AF, in plano per aliquam menſuram efficiatur nota; diſtantia quoque AE, cognita erit. a 26. primi.



2 ALII hoc ipſum efficiunt ſine baculo, hac ratione. Erigunt ſe ad angulos rectos cum Horizonte: Deinde deprimũt pileum, qui ſit aliquantulum latus, donec radius viſualis per extremitatem pilei excurrens incidat in terminum E, diſtantię AE, metiendæ: Pileo vero immobili manente, vertunt ſe verſus planum aliquod menſurabile, notantque in eo punctum F, in quo radius viſualis ipſi plano occurrit. Nam rurſus longitudo A F, quæ per menſuram aliquam cognoſcenda eſt, diſtantiæ A E, propoſitæ æqualis eſt: propterea quod ſtatura menſoris fungitur tunc munere baculi A B, & pileus depreſſus vices gerit virgulæ CD, vt conſtat.

ALTITVDINEM cuiuſque rei erectæ ex eius vmbra, quam Sole lucente proijcit, ſi nota fuerit, per quadratum deprehendere.

PROBLEMA XXXIIII.

1 HOC problema à quinto non differt, niſi quòd hic vtimur radio Solis pro radio viſuali, & longitudine vmbræ, quam altitudo, Sole lucente, proijcit, pro diſtãtia à menſore ad altitudinẽ vſque. Sit ergo altitudo FG, vel FI, vel FM, eiuſq. vmbra proiecta FA. Dirigatur quadratum verſus Solem (licet hoc non fiat è directo altitudinis) & tranſeunte radio Solis per foramina pinnacidiorum, notetur quanta vmbra ſiue recta, ſiue verſa à dioptra, vel

filo perpendiculi in quadrato abscindatur. Nam ita se se habebit vmbra recta HB, in quadrato ad latus A B, vt vmbra proiecta A F, ad altitudinem F G. Item ea est proportio lateris A D, ad vmbram versam D E, in quadrato, quæ vmbræ proiectæ A F, ad altitudinem F I. Denique dioptra, vel filo perpendiculi per punctum C, incedente, tanta erit vmbra proiecta AF, quanta est altitudo F M. quæ omnia in problemate 5. demonstrata sunt. Igitur si fiat.

Vt vmbra recta HB, in quadrato abscissa | *ad latus AB,* | *Ita longitudo Vmbra proiecta AF,* | *ad FG,*

Vel

Vt latus AD, | *ad vmbram versam DE, abscissam in quadrato* | *Ita longitudo vmbra proiecta AF,* | *ad FI,*

altitudo proposita FG, vel FI, proueniet nota &c.

LONGITVDINEM vmbræ ab altitudine, Sole lucente, quando altitudo est cognita, ope quadrati apertam, & manifestam facere.

PROBLEMA XXXV.

a Hoc etiam problema à secundo diuersum non est: solum hic pro distantia

ſtantia accipimus longitudinem vmbræ, quam altitudo nota, Sole lucente, proijcit. Sit ergo altitudo AF, eiuſque vmbra proiecta F G. Dirigatur quadratum verſus Solem, vbicunque menſor extra vmbram conſtiterit, & tranſeunte radio Solari per pinnacidiorum foramina, obſeruetur vmbra ſiue recta, ſiue verſa, quam filum perpendiculi, vel dioptra abſcindit. Ita namque ſe habebit latus quadrati A B, ad vmbram eius rectam B E, abſciſſam, vt altitudo A F, ad vmbram proiectam F G. Item ſic erit vmbra verſa DE, in quadrato ad latus A D, vt altitudo A F, ad vmbram proiectam F G. Dioptra denique, vel filo perpendiculi per punctum C, tranſeunte, altitudo AF, longitudini vmbræ proiectæ F G, ęqualis eſt. quæ omnia in problemate 2. demonſtrauimus. Quamobrem ſi fiat,

Vt latus AB,	*ad vmbram rectam abſciſſam BE,*	*Ita altitudo nota AF,*	*ad FG:*

Vel

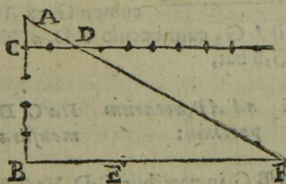
Vt vmbra verſa DE, abſciſſa in quadrato	*ad latus AD,*	*Ita altitudo nota AF,*	*ad FG,*

exibit nota longitudo vmbræ proiectæ FG, &c.

DISTANTIAM in Horizonte inter menſorem, & ſignum aliquod viſum, beneficio ſimpliciſſimi cuiuſdam inſtrumenti comperire.

PROBLEMA XXXVI.

1 CONSTRVATVR inſtrumentum hoc modo. Accipiatur baculus rectus AB, paulo minor, quam menſoris ſtatura, diuidaturque in 5. partes, vel etiam plures, pauciores ue æquales, & in prima eius parte C, vel in alia quacunque, infigatur alius baculus CD, ad rectos angulos, in quo ſumantur ordine quotcunque palmi, aut pedes. In extremitate quoque baculi AB,



infigatur alius baculus BE, ad angulos rectos: conſtructumque erit inſtrumentum, quo varias magnitudines licebit metiri, vt patebit: Sit enim primum metienda diſtantia BF, cuius terminum F, menſor in altero termino B, exiſtẽs videre

videre poſſit ex A, etiamſi in medio ſint valles, & alia impedimenta. Conſtituatur inſtrumentum in tali ſitu, vt A B, ſit ad Horizontem perpendicularis, & BE, eidem æquidiſtans. Inſpecto extremo F, ex A, notetur ſumma cura ac diligentia punctum D, in baculo C D, per quod radius viſualis tranſit *a* Nam cum triangula ACD, ABF, ſint ſimilia; *b* ſi fiat,

a coroll 4. ſexti. *b 4. ſexti.*

Vt A C,	*Ad AB,*	*Ita CD,*	*ad B F,*

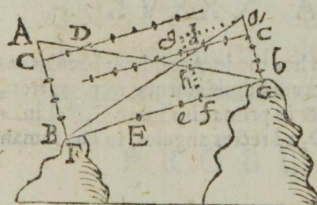
inuenta erit diſtantia B F, in partibus CD. Itaque ſi AC, eſt quinta pars, verbi gratia, baculi AB, erit quoque CD, quinta pars diſtantiæ BF. Et quia in noſtro exemplo CD, continet 2. pedes, ſi eos multiplicemus per 5. producentur 10. pedes pro diſtantia BF.

2 CVRANDVM autem erit diligenter, vt quando radius viſualis non tranſit per aliquem pedem integrum baculi CD, inueſtigetur, quot decimæ, vel centeſimæ vnius pedis in particula abſciſſa contineantur, per ea, quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. ſcripſimus, quod fiet, ſi in regula CD, decē pedes comprehendantur. Idemque de quacunque alia menſura intelligendum eſt, ſi ea in CD, loco pedum ſignetur.

3 VERVM hoc eadem facilitate præſtitimus ope quadrati, tum penduli, tum ſtabilis.

DISTANTIAM inter duo montium aut turrium cacumina, ope prædicti inſtrumenti conijcere.

PROBLEMA XXXVII.



1 SINT duo cacumina montium F, G. Poſito puncto B, prædicti inſtrumenti in cacumine F, minoris montis, deprimatur baculus AB, donec baculus BE, recta in cacumē G, tendat. quod per duos clauiculos in B, E, infixos, facile fiet, vt Num. 2. problem. 31. diximus. Manente in hoc ſitu inſtrumento, inſpiciatur cacumen G, ex A, obſerueturque punctum D, interſectionis radij A G, cum baculo C D. *a* Nam cum æquiangula ſint triangula ACD, ABG, ſi fiat,

a coroll. 4. ſexti.

Vt AC, nota in partibus AB,	*ad AB, notarum partium:*	*Ita C D, nota in data menſura*	*ad BG,*

cognoſcetur diſtantia B G, in partibus C D. Vt ſi A C, eſt quinta pars ipſius AB, & CD, contineat 1. pedem, & inſuper $\frac{2}{3}$. ſi $1\frac{2}{3}$. quinquies ſumatur, efficietur diſtantia BG, pedum $8\frac{1}{3}$.

2 NON aliter diſtantia bF, ex maioris montis cacumine G, inueſtigabitur, vt figura indicat.

IO-

EODEM modo procedes, si puncta F, G, sint fastigia duarum turrium, aut si vnum sit fastigium turris, & alterum, cacumen montis, vt constat.

3 IDEM hoc per quadratum fiet hoc modo. Sit quadratum a b f g, statuaturque angulus b, in cacumine G, & latus b f, deprimatur, ita vt rectà in cacumen F, tendat, si productum intelligatur, obserueturque vmbra versa abscissa g h, à radio visuali a B. Nam quia triangula a g h, B b a, æquiangula sunt, a si fiat. a 4. *sexti.*

Vt g h, vmbra versa	*ad g a, latus quadrati:*	*ita latus quadrati a b,*	*ad B b,*

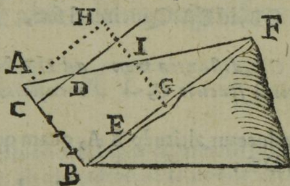
hoc est, si quadratus numerus lateris, nimirum 1000000. diuidatur per vmbrã versam, gignetur in Quotiente distantia B b.

IDEMQVE fieret, si angulus quadrati in B, collocaretur, infimumque latus rectà à B, in cacumen G, tenderet, &c.

LONGITVDINEM ascensus alicuius montis, si eius cacumen ab oculo in radice constituto videatur, eiusdem instrumenti beneficio cognoscere.

PROBLEMA XXXVIII.

1 ACCOMMODETVR predictum instrumentum, vt punctum B, in radice montis statuatur, & baculus BE, beneficio duorum clauiculorum infixorum, vt Num. 2. problem. 31. dictum est, recta in cacumen F, vergat; noteturque intersectio D, radij visualis cum baculo C D, inspecto cacumine F, ex A. *b* Nam iterum triangula ACD, ABF. Similia erunt. *c* Quare si fiat, b *coroll.* 4. *sexti.* c 4. *sexti.*



Vt AC, nota in partibus AB,	*ad AB, notarum partium:*	*Ita C D, nota in data mensura*	*ad B F,*

cognoscetur ascensus obliquus montis B.F, in partibus C D.

2 PARI Ratione, si F, sit fastigium alicuius turris, inuestigabis distantiam à puncto B, in terra, vel alibi posito, vsque ad F, hoc est, hypotenusam BF, vt perspicuum est. Atque hoc eodem instrumento complures aliæ dimensiones absolui poterunt, quod prudens lector facile perspiciet.

3 IDEM assequemur quadrato ABGH, si eius angulus B, in radice statuatur, & latus BG, eleuetur ita, vt recta tendat in cacumen F. Obseruata enim vmbra versa HI, quam dioptra in cacumen F, directa abscindit, fiunt triangula AHI, FBA, æquiangula. *d* Quamobrem, si fiat. d 4. *sexti.*

Vt HI, vmbra versa	*ad AH, latus quadrati*	*Ita latus quadrati AB,*	*ad BF,*

id est, si quadratus numerus 1000000. lateris diuidatur per vmbram versam, dabit Quotiens numerus longitudinem ascensus obliqui BF.

ALTITVDINEM, ad cuius basem pateat accessus, beneficio speculi plani, vna cum distantia speculi à cacumine altitudinis deprehendere.

PROBLEMA XXXIX.

1 SIT altitudo AB, à cuius base B, recedatur per quotuis passus, aut pedes, vsque ad C, punctum, in quo speculi plani centrum collocetur, & secundum rectam BC, retrocedatur, donec mensoris oculus in E, constitutus cacumen A, intueri possit per radium reflexum ECA, ita vt DE, sit statura mensoris ab oculo vsque ad planum. Et quoniam angulus incidentiæ DCE, æqualis est angulo reflexionis ACB, vt Perspectiui docent, & anguli D, B, recti sunt; erunt triangula DCE, BCA, æquiangula; *a* ideoque erit, vt CD, ad DE,
a 4. *sexti.* ita CB, ad BA. Quocirca si fiat,

Vt CD, distantia mensoris à speculo C,	*ad DE, staturam mensoris:*	*Ita CB, distantia speculi ab altitudine.*	*ad BA,*

producetur altitudo BA, quam quærimus, nota in partibus staturæ mensoris DE.

ALITER

2 MENSVRETVR per quadrantem angulus DCE, vel BCA, (Hoc fiet, si angulus rectus construatur FGH, & recta FG, tot particulas æquales contineat, quot passus, vel pedes in CD, distantia continentur: Item recta GH, tot particulas easdem, quot passus aut pedes statura mensoris DE, complectitur. Iuncta namque recta FH, *b* erit angulus F, angulo
b 4. *primi.* C, æqualis. quem angulum F, nullo negotio per quadrantem aliquem in gradus diuisum cognoscemus.) Nam si posito sinu toto CB, fiat.

Vt sinus totus CB,	*ad BA, tangentem anguli reflexionis BCA, vel incidētiæ DCE, quem proxime inuenimus*	*Ita CB, distantia cognita*	*ad BA,*

prodibit altitudo BA, nota in partibus distantiæ CB. Et si rursum fiat,

Vt

Vt sinus totus CB, ad CA, secantem eiusdem anguli BCA, Ita CB, distantia cognita ad CA,

cognita etiam erit CA, distantia à speculo C, vsque ad cacumen A, in partibus distantiæ CB.

ALITER

3 PER solos sinus ita progrediemur, si libet. *a* Fiat, *a* 10. triang. rectil.

Vt sinus anguli A, cōplemēti anguli C, reflexionis, vel incidentiæ, ad CB, distantiam cognitā: Ita sinus anguli C, incidentiæ, vel reflexionis, ad BA.

Nam productus numerus dabit altitudinem BA, notam in partibus distantiæ CB. *b* Rursus fiat, *b* 10. triang. rectil.

Vt sinus anguli A, complementi anguli eiusdem C, ad CB, distantiā cognitam: Ita sinus totus recti anguli B, ad CA.

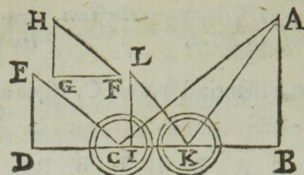
Numerus enim proueniens dabit hypotenusam CA, in partibus distantiæ CB, cognitam.

ALTITVDINEM inaccessibilem beneficio speculi plani, vnà cum speculi distantia tam à base, etiam non visa, quàm à cacumine altitudinis, cognoscere.

PROBLEMA XL.

1 SIT rursus in præcedenti figura altitudo AB, supra planum BD, erecta. Collocato speculo plano in C, recedatur ab altitudine ad D, donec cacumen A, per radium reflexum ECA, cerni possit, obseruetur que per quadrantem angulus ECD, ideoq. & angulus ACB, vt in problemate præcedēti Num. 2. dictum est. Deinde collocato speculo in K, puncto, quotuis passibus à C, versus altitudinem distante, recedatur iterum ad I, donec cacumen A, inspiciatur rursum per radium reflexum LKA; inquiraturque magnitudo anguli IKL, ideoque & anguli AKB. Et quoniam posito sinu toto AB, rectæ BK, BC, tangentes sunt angulorum BAK, BAC, qui complementa sunt angulorum K, C, reflexionum per quadrantem cognitorum; cognita erit KC, earum tangentium differentia. Si ergo fiat.

Vt KC, differentia tangentium, quæ complementis angulorum incidentiæ debentur, ad AB, sinum totum Ita KC, differentia positionum speculi ad AB,



procreabitur numerus, qui altitudinem AB, notam exhibebit in partibus differentiæ positionum ſpeculi K C.

RVRSVS ſi fiat,

Vt KC, differentia complementorum angulorum incidentiæ in ſpeculo,	*ad CB, tangentem maiorem:*	*Ita KC, differentia poſitionum ſpeculi*	*ad CB,*

reperietur CB, maior diſtantia ſpeculi C, ab altitudine. Ex qua ſi auferatur KC, differentia poſitionum ſpeculi, nota remanebit K B, minor diſtantia ſpeculi K, ab eadem altitudine. Quæ etiam inuenietur, ſi fiat, vt KC, differentia prædictorum angulorum, qui complementa ſunt angulorum incidentiæ in ſpeculo, ad KB, tangentem minorem: Ita KC, differentia poſitionum ſpeculi ad aliud, vt perſpicuum eſt.

a 22. *primi.*

a DEINDE quia angulus AKB, in propinquiore ſpeculi poſitione duobus angulis ACK, CAK, æqualis eſt, ſi angulus ACK, remotioris poſitionis detrahatur ex angulo AKB, poſitionis propinquioris: remanebit angulus CAK, notus. *b* Si igitur fiat,

b 10. triang. rectil.

Vt ſinus anguli CAK, differentiæ angulorũ incidentiæ	*ad KC, differẽtiam poſitionũ ſpeculi:*	*Ita ſinus anguli AKC, cõplemẽti anguli AKB, ad duos rectos in propinquiore poſitione ſpeculi*	*ad CA,*

c 10. trian. rectil.

gignetur hypotenuſa CA, remotioris poſitionis ſpeculi, in partibus differentiæ poſitionum ſpeculi KC. *c* Et ſi rurſus fiat,

Vt ſinus anguli CAK, differentiæ angulorũ incidentiæ	*ad KC, differentiã poſitionum ſpeculi:*	*Ita ſinus anguli reflexionis ACK, in remotiori poſitione ſpeculi*	*ad KA,*

procreabitur quoque hypotenuſa KA, propinquioris poſitionis ſpeculi, in eiſdem partibus differentiæ poſitionum ſpeculi K C.

ALITER

2 PER ſolos ſinus idem aſſequemur hoc modo. Inuenta hypotenuſa CA, vt proxime diximus, per ſinus. *d* fiat,

d 10. triang. rectil.

Vt

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam inuentam C A,*	*Ita ſinus anguli ACB, remotioris poſitionis ſpeculi*	*ad A B.*

Prodibit enim in Quotiente altitudo A B, nota in partibus hypotenuſæ inuentæ CA. *a* Quod ſi rurſus fiat,

a 10. triang. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſã inuentã C A,*	*Ita ſinus anguli BAC, cõplementi anguli in remotiore poſitione ſpeculi*	*ad CB,*

producetur C B, maior ſpeculi diſtantia ab altitudine. Ex qua ſi ſubtrahatur KC, differentia poſitionum ſpeculi, cognita etiam relinquetur diſtantia minor KB. Quæ etiam, ſi inueſtigetur hypotenuſa KB, vt ſupra traditum eſt, reperietur: b ſi fiat, vt ſinus totus anguli recti B, ad hypotenuſam inuentam KB, ita ſinus anguli BAK, complementi anguli in propinquiore poſitione ſpeculi, ad aliud, vt manifeſtum eſt.

ALTITVDINEM monti impoſitam, ſi modo altitudinis baſis poſſit conſpici, vel portionem ſuperiorem alicuius turris, beneficio ſpeculi plani efficere notam.

PROBLEMA XLI.

1 QVANDO ad turrim patet acceſſus, vt eius à menſore diſtantia cognoſci poſſit; ſi per probl. 39. inueſtigetur tam altitudo à ſummitate portionis propoſitæ, vſque ad baſem turris, quam altitudo ab infima parte eiuſdem portionis, vſque ad eandem turris baſem: & minor hæc altitudo ab illa maiore dematur, reliqua fiet portio, quæ inquiritur.

2 AT vero, quando altitudo monti eſt impoſita, & baſis altitudinis apparet, aut ad turrim non patet acceſſus: exquirenda erit per præcedens problema vtraque altitudo prædicta. Nam rurſus minor detracta ex maiore, reliquam faciet altitudinem, vel portionem, quæ deſideratur.

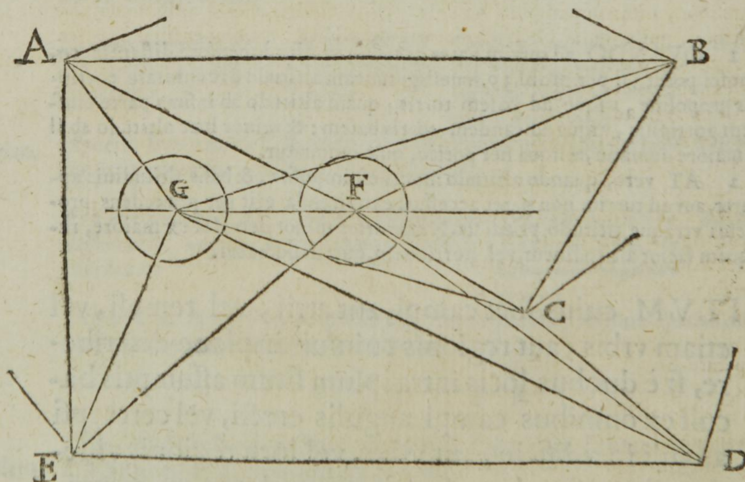
SITVM cuiuslibet campi, aut atrij, vel templi, vel etiam vrbis, aut regionis cuiuſuis in plano deſcribere, ſi è duobus locis intra ipſum ſitum aſſumptis baculi ex omnibus campi angulis erecti, vel certe ipſi anguli in ædificio, aut vrbe, vel loca regionis videri poſſint: ſimulque longitudines laterum campi, vel ædificij, nec non diſtantias inter angulos, & vtrumuis locorum aſſumptorum in data menſura

cognoſcere. Quod ſi talia duo loca intra ſitum eligi nequeant, idem efficere, dummodo ſitum poſſimus circumire.

PROBLEMA XLII.

Situs cãpi cuiuſuis, quo pacto ex duobus locis intra ipſum aſſumptis delineetur.

1 ETSI problema hoc vel Geographicum eſt, vel Architectonicum; tamen quia ſine dimenſione linearum abſolui non poteſt, lubet illud hoc loco paucis explicare. Sit ergo campus quinque lateribus A B, B C, C D, D E, E A, cinctus. Figantur in quinque angulis A, B, C, D, E, quinque baculi ad angulos rectos cum Horizonte, pareturque circa medium areæ planum aliquantulum altum Horizonti æquidiſtans, in quo duo puncta F, G, quantumlibet inter ſe diſtantia, verbi gratia 100. pedibus, è quibus omnes quinque baculi cerni poſſint. Per F, G, ducatur recta FG, ad vtraſque partes; continebitque ſegmentum FG, 100. pedes ex hypotheſi. Affixa deinde dioptra volubili cum pinnacidijs in vtroq. puncto F, & G, deſcriptiſque circulis duobus ex F, & G, vt per eorum circũferẽtias angulorũ magnitudines, qui in F, G, conſtituuntur, cognoſci poſſint, inſpiciantur ex F, & G, per foramina pinnacidiorum (circumducta dioptra) baculi ex angulis A, B, C, D, E, erecti, & anguli, quos linea fiduciæ cũ recta HI, facit, aut quos rectæ à linea fiduciæ deſignatæ inter ſe faciunt, transferantur ordine ad puncta K, L, quomodocunque inter ſe diſtantia in recta K L, quæ ſeorſum in charta aliqua ſit deſcripta, produ-

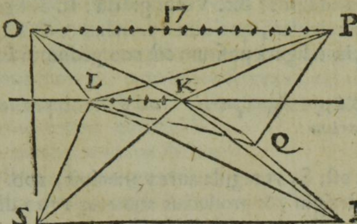


ctis lineis, quæ illos angulos in K, & L, efficiunt vt in 2. figura apparet. Si

namque

namque puncta, vbi dictæ lineæ ex K, & L, prodeuntes concurrunt, lineis rectis coniungantur, descripta erit figura O P Q R S, similis omnino figuræ campi ABCDE, Quod sic demonstro. Triangula AGF, OLK, similia sunt, quòd anguli AGF, AFG, angulis OLK, OKL, æquales sint, ex constructione. a Igitur erit AG, ad GF, vt OL, ad LK. Eademque ratione, ob similitudinem triangulorum FGE, KLS, erit GF, ad GE, vt LK, ad LS: ac proinde ex æquo erit AG, ad GE, vt OL, ad LS. Cum ergo & anguli AGE, O L S, circa quos latera illa sunt proportionalia, æquales sint, quippe cum angulo A G E, factus sit æqualis ex constructione angulus OLS: b similia erũt triangula AGE, OLS, hoc est, æquiangula. Pari ratione ob similitudinem triangulorum FGD, KLR, c erit G D, ad G F, vt L R, ad LK. Itẽ ob similitudinem triangulorum F G E, K L S, erit F G, ad GE, vt K L, ad L S. Igitur erit ex æquo GD, ad GE, vt LR, ad LS: Ac proinde cum anguli DGE, RLS, ex constructione sint æquales; d æquiangula quoque erunt triangula DGE, RLS. Non aliter ostendemus, triangula CGD, BGC, AGB, triangulis QLR, PLQ, OLP, esse æquiangula. Immo eisdem argumentis concludemus, quamuis non sit necessariũ, triangula, quæ in F, supra latera campi constructa sunt, æquiangula esse triangulis in K, supra latera figuræ O P-QRS, constitutis. Ex his sequitur, figuram ABCDE, figuræ O P Q R S, æquiangulam esse: quippe cum earum anguli coagmentati sint ex angulis æqualibus, nimirum angulus AED, ex angulis AEG, GED, ipsum componentibus, qui angulis OSL, LSR, angulum OSR, componentibus equales sunt; & sic de cæteris. Sequitur etiam, latera earundem figurarum circa æquales angulos esse proportionalia. Nam propter triangulorum similitudinem, e est AE, ad EG, vt OS, ad S L: & EG, ad ED, vt SL, ad SR. Ideoque ex æquo AE, ad ED, vt OS, ad SR: Atque ita de alijs. Similes ergo sunt figuræ ABCDE, OPQRS.

a 4. sexti



b 6. sexti

c 4. sexti

d 6. sexti

e 4. sexti

2 IAM vero vt longitudines laterum AB, BC, CD, DE, EA, & rectarum ex F, vel G, ad angulos in prima figura ductarum inueniamus, diuidendum erit in figura inuenta, id est, in secunda, interuallum K L, in quotcunque partes æquales. Deinde inquirendum, quotnam ex illis partibus in singulis lateribus, & rectis eiusdem figuræ secundæ ex K, vel L, prodeuntibus contineantur. quod vel per circinum fieri potest, repetendo sæpius vnam particulam in dictis lateribus rectis: vel (quod magis probo) hoc modo. Repetatur tota KL, in quolibet latere, vel recta, quoties fieri potest, & in reliquo segmento vna etiam particula interualli K L, circino iteretur, quoties fieri potest. Nam quoties repetita fuerit KL: toties numerus particularum ipsius KL, in latere continebitur, cum tot insuper particulis, quot per circinum in reliquo segmento fuerint deprætensæ. Aut certe per ea, quæ lib. 1. cap. 1. ad finem Num. 2. scripsimus, inuestigetur in instrumento partium, quot particulæ interualli KL, in dictis lateribus, & rectis comprehendantur. Deinde fiat, vt numerus particularum interualli KL, assumptus in

2. figu-

2. figura, ad numerum pedum inter puncta F, & G, in prima figura assumptũ, ita numerus particularum in quolibet latere, vel recta in secunda figura inuentarum, ad aliud. Quoties enim numerus indicabit, quot pedes in assumpto latere, vel recta contineantur. Ratio est, quia cum eandem proportionem habeat KL, in 2. figura ad quodlibet latus, vel rectam eiusdem figuræ, quam habet FG, in prima figura ad respondens latus, vel rectam, propter similitudinem figurarum, erit permutando K L, ad interuallum F G, vt latus ad latus, &c. Verbi gratia, In 2. figura interuallum K L, sectum est in 5. particulas, qualium 17. in latere O P, inuentæ sunt: Et quia spatium FG, in 1. figura positum est 100. pedum: si fiat,

Vt KL, quinque particularum	*ad FG. 100. pedum:*	*Ita OP, 17. particularum*	*ad AB,*

hoc est, si, vt regula aurea præcipit, 100. ducantur in 17. secundus numerus in tertium, & productus numerus 1700. diuidatur per 5. id est, per primum numerum, reperientur in Quotiente 340. pedes per latere AB. & sic de cæteris.

Situs cãpi cuiusuis qua ratione ex vno loco intra ipsum assumpto describatur.

3 EVNDEM situm campi propositi ABCDE, delineabimus etiam ex vno tantum loco F, intra ipsum assumpto, hac ratione. Dioptra ad singulos baculos ex angulis erectos, dirigatur, notatis angulis, quos lineæ, per dioptrã designatæ inter se faciũt; distantięque ab F, ad singulos angulos inquirantur in aliqua mensura, vel catenulam aliquã ferream, quæ nec intẽdi possit, nec remitti, vel per chordam ex F, ad singulos angulos extensam, vel certe, si distantiæ illæ magnæ sint, per problema 2. vel 36. beneficio quadrati, alteriusue instrumenti. Nam si in charta aliqua ad quodlibet punctum K, ijdem anguli constituantur, & in rectis illos angulos efficientibus accipiantur tot particulæ inter se æquales cuiusuis magnitudinis, quot mensuræ inuentæ sunt in rectis respondentibus, quæ ex F, exeunt: extrema autem puncta vltimarum particularum rectis lineis coniungantur, descripta erit figura OPQRS, similis omnino campo ABCDE: *a* propterea quod triangula ad punctum F, collecta similia sunt triangulis ad punctum K, collectis, ob æqualitatem angulorum in F, & K, constitutorum, & latera circa illos angulos proportionalia, ex constructione.

a 26. sexti.

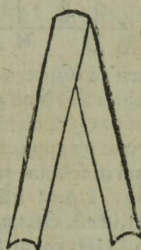
4 LATERVM autem longitudines in campo A B C D E, cognoscentur, si per circinum inquiratur, quot particulæ in lateribus figurę OPQRS, contineantur ex illis, quæ in quauis recta ex K, emissa sumptæ fuere. Totidem namque mensuræ in lateribus campi comprehendentur, vt perspicuum est ex figurarum similitudine.

Vrbis cuiusuis, ac regionis situs quo pacto describatur.

5 EADEM prorsus ratio tenenda est in situ alicuius atrij vel templi, vel vrbis, aut regionis explorando. Solum in vrbe describenda pro punctis F, & G, eligendæ sunt duæ turres altæ, è quibus omnes vrbis anguli conspici possint, & quarum distantia vnius ab altera vel cognita sit, vel per præcedentia problemata inuestigata. In regione autem delineanda pro ijsdem punctis F, & G, duo oppida deligenda sunt, & in quolibet ex altissima turre circumiacentia oppida inspicienda, vt anguli habeantur, quos rectæ ab oculo mensoris ad singula oppida eductæ constituunt. Hi autem facilius obseruabuntur, si loco dioptræ, quia nimis alta est, statuatur planum ere-

erectum in punctis F,& G, ita vt circumductum transeat per oppida circumiacentia, si intelligatur esse productum. Ita namque planum ipsum rectas designabit, quæ angulos prædictos constituant. Atque hoc etiam in situ vrbium peruestigando faciendum erit. Itaque si anguli vrbis cuiuspiam, aut oppida alicuius regionis sint A,B,C,D,E, & duæ turres in F, & G, omnia perficienda erunt, vt supra de campi situ dictum est. Nā situm vrbis, vel regionis exhibebit figura OPQRS, distantiæque locorum A,B,C,D, E, vnius ab altero cognoscentur, vt de lateribus campi dictum est.

6 QVOD si intra situm propositum duo loca, vel vnus saltem non existat, vnde omnes anguli conspici possint, vt in omnibus ædificijs contingit, oportebit situm circumire, & inuestigare angulos per rectas, quæ in campo à baculo ad baculum ducendæ sunt per catenulam ferream, vel chordam, aut certe erigendum planum, quod per binos baculos transire conspiciatur. Ipsum enim planum dictas rectas exhibebit. In ædificijs autem, ac templis ipsi muri exteriores dictos angulos constituunt, quorum amplitudo inuestigari solet ab artificibus instrumento quodam ex duabus regulis compacto, quarum vna sub alteram ingressa moueatur, (quod Italis Squadra zoppa dicitur) vt hæc figura indicat. Aperto namque instrumento, si crura duobus muris angulū efficientibus congruent, dabunt interiora crurium latera in concursu angulum quæsitum. Et si idem instrumentum interioribus angulis ædificiorum applicetur, dabunt eadem latera interiora crurium angulos, qui à muris efficiuntur. Inuentis angulis, ac notatis, mensuranda erunt interualla inter baculos in campo erectos, vel inter angulos ædificiorum, per catenulam ferream, vel chordam, aut certe in campis, si ea interualla longa sint, per problema 2. vel 36. exploranda in aliqua mensura nota, vt in cubitis. Nam si in charta ducatur linea OP, tot particulas æquales continens, quot cubiti, verbi gratia, in interuallo AB, deprehensi sunt, & angulus POS, angulo BAE, inuento fiat æqualis: & in recta O S, accipiantur tot particulæ prioribus æquales vsq. ad S, quot cubiti in interuallo AE, reperti sunt: ac rursum angulus OSR, angulo AED, æqualis fiat, & sic deinceps, repræsentabitur situs campi per figuram OPQRS. Idemq. de situ ædificiorum tam exteriori, quam interiori intelligendum est, si diligenter anguli, ac distantiæ obseruentur.



LONGITVDINEM trabis ad Horizontem inclinatæ, cuius portio superior tantum conspiciatur, vna cum angulo inclinationis, distantia basis à mensore, & altitudine fastigij supra Horizontem, per Quadratum metiri.

PROBLEMA XLIII.

1 Trabs inclinata ſupra murũ CD, ſit AB, & menſor in F, conſtitutusè directo ipſius trabis, ita, vt ipſe & trabs in eodẽ ſint plano metiri debeat lõgitudinẽ AB, angulũ inclinationis ABE, diſtantiã BE, & altitudinem A F, etiamſi tantum portionem ſupremam A G, videat, baſem occultante muro C D; Si quadratum ad E, bis applicetur, ſemel videlicet inclinatum, vt vnum latus recta tendat ad punctum A, & iterum demiſſum ad Horizontem, ita vt centrũ dioptræ ſit in E, & latus EL, Horizonti incũbat. Nã inſpecto pũcto A, ex a, *a* ſi fiat, vt vmbra verſa e b, ad latus b a, ita latus a E, ad aliud, gignetur diſtantia, ſiue hyootenuſa E A. Deinde explorata portione dioptræ E I, vt in ſcholio Probl. 7, Num. 2. docui; *b* Si fiat, vt E I, portio dioptræ inuenta ad repertam hypotenuſam E A, ita f I, lateri quadrati æqualis ad aliud, producetur altitudo AF, quæſita. quod eſt quartum.

a 4. *ſexti.*

b 2. *ſexti. & componẽdo.*

2 *c* ET ſi rurſus fiat, vt E I, portio dioptræ ad hypotenuſam E A, ita E f, ipſi c I, æqualis ad aliud, nota fiet diſtantia EF. Non aliter, ſi aliud punctum G, inſpiciatur, cognita fiet hypotenuſa EG, & altitudo GH, vna cum diſtantia E H, ſi nimirum quadratum primo ita applicetur ad E, vt vnum latus tendat recta ad G, &c. quemadmodum in ſcholio probl. 7. oſtendimus.

c 2. *ſexti. & componẽdo.*

3 I A M ſi E F, inuenta ex cognita E H, ſubducatur, nota relinquetur FH, id eſt, GI, quæ in ſublimi duci cogitetur parallela Horizonti. Eodem modo ſi GH, cognita, vel illi æqualis FI, ex inuenta AF, dematur, reliqua AI, nota fiet. Cum igitur in triangulo rectangulo AGI, in ſublimi conſtituto duo latera AI, IG, cognita ſint, *d* cognoſcetur & baſis AG, & angulus A G I, *e* qui æqualis eſt angulo inclinationis A B E, qui quæritur. quod eſt ſecundum.

d 6. triang. rectil.

e 29. *primi.*

4 ITAQVE cum in triangulo rectangulo ABF, latus AF, notum ſit factum, vna cum angulo B, ac proinde & cum eius complemento BAF, *f* cognitum fiet alterum quoque latus BF, cui ſi adijcietur diſtantia EF, inuenta, tota diſtantia quæſita EB manifeſta erit. quod eſt tertium.

f 4. triang. rectil.

5 D E N I Q V E in eodem triangulo A B F, rectangulo, ex latere AF, & angulo B, ac proinde & eius cõplemento BAF, cognitis, *g* cognoſcetur etiam baſis AB, longitudo videlicet trabis. quod eſt primum. Hæc autem nota etiam efficietur, *h* ſi fiat, vt AI, differentia altitudinum cognitarum AF, GH, ad AF, maiorem altitudinem, ita A G, paulo ante nota effecta, ad AB.

g 4. trian. rectil.

h 2. *ſexti. & componẽdo.*

VISIS duarum turrium ſummitatibus, etiamſi baſes propter ædificia interiecta occultentur, diſtantiam tam inter earum baſes, quam inter earundem faſtigia, vna cum ipſarum altitudinibus, ac diſtantijs à menſore conijcere.

PRO-

PROBLEMA XLIIII.

1 SINT duæ turres AF, GH, quarum ſola faſtigia A, G, cernantur ex loco Horizontis B. Oportet inueſtigare & diſtantiam F H, & interuallum A G, & vtriuſque turris altitudinem. Sit primum minor turris A F, inter maiorem, & menſorem, ita vt menſor in eodem cum turribus ſit plano, & minor non occultet faſtigium G, maioris. Per ſcholium probl. 7. inuenietur & vtraque diſtantia BF, BH, & vtraque altitudo A F, G H: ſi nimirum in B, Quadratum ita locetur, vt vnum eius latus cum hypotenuſis B A, B G, coincidat, &c. quod eſt quartum, ac tertium. Et quia tria puncta B, F, H, ponuntur in eadem recta, erit diſtantiarum differentia F H, cognita, hoc eſt, diſtantia inter turrium baſes, quod eſt primum. Rurſus differentia altitudinum G C, nota erit, a ac propterea in triangulo rectangulo ACG, ex duobus lateribus. AC, CG, cognitis, baſis quoque A G, efficietur nota. quod eſt ſecundum. a 6. triang rectil.

2 DEINDE conſiſtat menſor in D, ita vt ipſe, ac baſes F, H, non iaceant in vna linea recta. Per ſcholium problem. 7. iterum tam altitudines AF, GH, quam diſtantiæ DF, D H, cognitæ fient, ſi videlicet quadrati vnum latus hypotenuſis DA, DG, congruet, &c. quod eſt tertium, ac quartum. Inueſtigatis autem hypotenuſis DA, DG, vt in eodem ſcholio traditũ eſt, cognoſcetur per problema 16. præſertim per ea, quæ Num. 2. eiuſdem problematis ſcripſimus, interuallum AG, ſi nimirum in hypotenuſis accipentur portiones DI, DE ipſis hypotenuſis proportionales, vt in illo Num 2. diximus. &c. quod eſt ſecundum. Et quoniam altitudines A F, G H, notæ factæ ſunt, erit etiam earum differentia GC, nota. Quamobrem ex baſe A G, & latere GC, in triangulo rectangul o A C G, cognitis, latus quoq. AC, hoc eſt, diſtantia FH, inter baſes nota erit: quod eſt primum.

SI turres eſſent AF, CH, æquales, eſſet diſtantia A C, inter faſtigia diſtantiæ F H, inter baſes æqualis.

SCHOLIVM.

1 EX omnibus, quæ demonſtrata ſunt in hoc 3. libro, colligi poteſt regula generalis ad dimetiendas omnes longitudines, ſiue eæ ſint diſtantiæ in Horizonte, ſiue altitudines, profunditates ue, ſiue hypotenuſæ, id eſt, diſtantiæ ab oculo ad quodlibet punctum, ſiue interualla inter duo puncta, vbicunque exiſtant: dummodo vtrumque extremum longitudinis dimetiendæ videri poſſit à menſore, vbicunque etiam ipſe exiſtat. Nam ſi per problema 15. præſertim per ea, quæ Num. 5. eius problematis ſcripſimus, diſtantiæ à menſore vſque ad duo extrema longitudinis explorentur, inueſtigato prius angulo, quem duæ illæ diſtantiæ, ſiue hypotenuſæ efficiunt, vt in ſcholio probl. 7. Num. 2. docuimus; &c. factum erit, quod proponitur. Itaque ſi diligenter ea, quæ in problem. 15. ac 16. ſcripſimus, percepta fuerint

Vnica regula ad omnes rectas dimetiendas, quãdo earũ extrema videntur.

rint, eadem semper ratio metiendarum rectarum tenenda erit, si vtraque extremitas rectæ propositæ cerni potest, vt diximus.

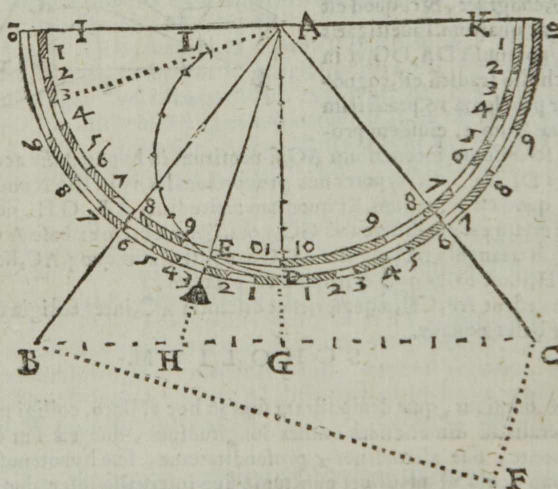
2 SED neque hoc omittendum puto, quando inuentæ sunt duæ distantiæ à mensoris loco vsque ad duas extremitates rectæ metiendæ, vna cum angulo ab ipsis comprehenso, certius (quãquã laboriosius) interuallum inter duo illa extrema, hoc est, rectam propositam inueniri posse ex duabus illis distantijs, & angulo comprehenso, per 12. triang. rectil. quam per duas dictas portiones illis distantijs proportionales: propterea quod interuallum inter extrema illarum portionum vix accurate per circinum reperiri possit. Id quod etiam in problem. 16. ad finem Num. 2. monuimus.

SPATIVM terræ inæquale pro ducendis aquis librare: aut etiam si lubet, Horizonti æquidistans efficere.

PROBLEMA XLV.

1 QVANDO oblatum spatium non est valde magnum, excogitauit Ioannes Ferrerius Hispanus nobilis Architectus, & Mathematicus, instru-

Instrumenti constructio pro librationibus



mentum percommodum pro librationibus, hoc modo. Compingantur duæ regulæ AB, AC, ex ligno aliquo solido, ac duro, æqualium crurum, quæ longitudinem habeãt satis longã, ita vt distantiæ inter extrema B, C, contineat 10. palmos præcise, aut etiam plures. Deinde ducta recta AG, ad BC, perpendiculari, describatur ex A, semicirculus quantuscunque ILD K, cuius semidiameter AD, in tot æquales partes secetur, quot palmi in distantia BC,

com-

comprehenduntur. Descripto quoque circa A D, semicirculo occulto AED, transferantur ex D, in eius peripheriam omnia interualla inter D, & puncta rectæ AD: ac tandem ex A, per singula puncta semicirculi A E D, rectæ occultæ emittantur, notéturque intersectiones earum cum peripheria D I, atque in alteram peripheriam DK, transportentur. Si namque ex A, filum cum perpendiculo egrediatur, & omnes partes excindantur, relictis solum cruribus instrumenti AB, AC, vna cum peripheria semicirculi IDK, constructum erit instrumentum ad librationes peropportunum.

2 NAM in campo aliquo, vel horto, positis punctis B, C, in terra, si filum perpẽdiculi transit per D, erunt puncta B, C, in terra eiusdem altitudinis, ita vt si spatium interiectum BC, complanetur, spatium illud horti, vel campi sit libratum, hoc est, Horizonti parallelum. Spatium in æquale quo pacto libretur.

SI vero filum perpendiculi A H, abscindet ex quadrante D I, aliquot partes, nimirum 3. erit punctum C, tribus palmis altius puncto B, atque ita fodiendum ibi erit ad altitudinem trium palmorum, vt complanatum spatium inter B, & infimum punctum effossum Horizonti sit parallelum. Quod si filum perpendiculi abscinderet ex alio quadrante D K, quotcunque partes, nimirum 5. esset punctũ C, depressius quinque palmis puncto B. Quare tunc superimponenda, foret puncto C, terra ad altitudinem 5. palmorum, vt spatium inter B, & supremum punctum terræ superimpositæ complanatum Horizonti æquidistet. Complanato spatio inter B, & aliud punctum prope C, siue effosum, siue eleuatum, iteranda erit eadem operatio, posito crure A B, in puncto inuento, &c. Atq. ita deinceps procedendum est vsq. ad vltimũ signum in horto, vel cãpo propositum. Hoc ita demonstratur. Concipiatur ducta recta BC, & recta C F, filo perpendiculi A H, duci parallela, quæ ad Horizontem erit perpendicularis, ac proinde ducta B F, ad CF, perpendicularis Horizonti æquidistabit. Et quoniam in triangulis A G H, B F C, recti anguli E, F, æquales sunt, *a* nec non & alterni C, H, *b* æquiangula erunt triangula; Est autem AGH, triangulo ADE, æquiangulum, quod & recti G, E, æquales sint, & A, communis. Igitur triangula quoque ADE, BCF, æquiangula erunt. *c* Ideoque erit vt A D, 10. partium ad DE, 3. partium, ita BC, 10. palmorum, ad CE, ac proinde C F, 3. palmos continebit, tot nimirum, quot partes filum perpendiculi abscindit ex semicirculo IDK. Quod si quadratum CF, nimirum in dato exemplo 9. palmi (cum latus CF, sit 3. palmorũ) dematur ex 100. id est, ex quadrato B C. 10. palmorũ, reliquum fiet quadratum 91. lineæ horizontalis BF, cuius quadrata radix $9\frac{10}{19}$. dabit horizontalem distantiam BF, à puncto B, vsque ad perpendicularem C F.

a 29. *primi.*
b 32. *primi.*
c 4. *sexti.*

HAEC eadẽ distantia horizontalis BF, cognoscetur quoq. sine numerorum supputatione, hoc modo. Ex A, describatur alius semicirculus, & in semicirculum AED, transferantur omnia interualla inter A, & puncta rectæ AD, ac tandem ex A, rectis occultis emissis per puncta in semicirculo notata, obseruentur earum intersectiones cum semicirculo ex A, descripto, transferanturque in alterum quadrantem versus K. Nam quot partes filum perpendiculi A H, ex vltimo hoc semicirculo ex A, descripto abscindet, tot palmos continebit horizontalis longitudo B F: *d* propterea quod eadem est proportio DA, ad AE, quæ CB, ad BF, quippe cum triangula DAE, CBF, ostensa sint similia. Cum ergo ex constructione, recta AE, complecta-

d 4. *sexti.*

tur tot partes rectæ AD, quot ex A, in semicirculum A E D, vsque ad filum perpendiculi sunt translatæ, (vt in nostro exemplo partes propemodum $9\frac{1}{2}$.) comprehendentur totidem palmi rectæ CB, in recta BF. Est autem consideratione dignum, partes posterioris semicirculi contrario ordine similes esse partibus prioris semicirculi IDK. Nam si verbi gratia rectæ D E, quæ æqualis est tribus partibus rectæ D A, initium sumentibus à D, accipiatur æqualis AL, trium quoque partium rectæ AD, initium sumentium à puncto A, ducaturque recta AL, fiet angulus IAL, æqualis angulo DAE. Quia enim arcus DE, AL, æquales sunt, erunt quoque reliqui AE, DL, æquales. *a* Igitur anguli ADE, DAL, æquales erunt: ideoque & reliqui DAE, IAL, æquales inter se erunt: propterea quod tam duo ADE, DAE, propter rectum E, in semicirculo, quam duo DAL, IAL, vni recto sunt æquales. Ex quo fit, rectas AI, AL, ex posteriori semicirculo ex A, descripto auferre arcum similem arcui in priori semicirculo IDK, inter rectas AD, AE, intercepto: Eademq. ratio est de alijs.

a 27. tertij.

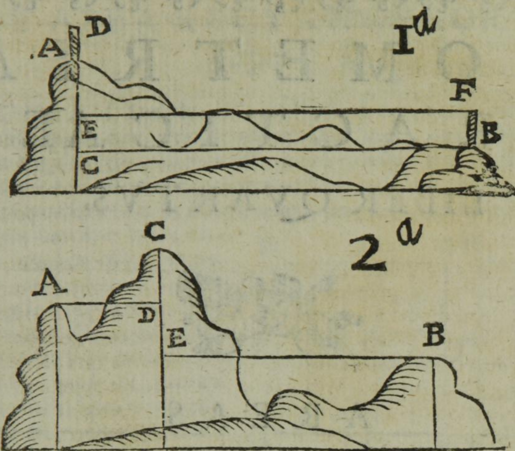
QVANDO instrumentum sæpius repetitum fuit, quæritur autem, quanto altius, vel depressius sit primum punctum, quam vltimum, scietur hoc per altitudines, depressionesue intermedias. Vt si primus locus fuerit altior quam secundus, quinque palmis; & hic altior quam tertius, duobus palmis; hic autem depressior, quam quartus locus, tribus palmis; & hic denique altior quam vltimus locus, vno palmo, colligemus primum locum altiorem esse vltimo loco quinque palmis. Nam primus locus erit altior tertio septem palmis, cum primus secundum quinque palmis superet, & secundus tertium, duobus. Et quia tertius superatur a quarto, tribus palmis, superabit primus quartum quatuor palmis. Cum ergo hic altior sit, quam vltimus, vno palmo, erit primus altior, quam vltimus, quinque palmis, & sic de cæteris.

3 CAETERVM quando duo loca multum inter se distant, explorabimus per quadratum stabile, quanto alter altero sit altior, vel humilior, hac ratione. Sit primus locus A, secundus B, in prima figura. Erecto baculo AD, staturæ mensoris æquali, concipiatur ex B, ad perpendiculum loci A, altioris perpendicularis BC, (per quadratum autem facile cognosces, vter locorum sit altior. Nam quando per latus supremum Horizonti æquidistans, ex A, locus B, cernitur, eadem est altitudo vtriusque loci: Si vero deprimendum est illud, vt B, videri possit, erit locus A, altior: Si denique idem latus attollendum est, erit locus B, altior.) Nam si per doctrinam scholij probl. 9. inuestigetur altitudo DC, & auferatur mensoris statura AD, reliqua erit altitudo A C: Ac tanto erit altior locus A, loco B. Et si è contrario in loco humiliori B, erigatur baculus B F, staturæ mensoris æqualis, & per doctrinam scholij probl. 7. inquiratur altitudo AE, vsque ad perpendicularem FE, per cogitationem ad AC, ductã, & apponatur statura mensoris BF, nota euadet tota altitudo AC; Ac tantò depressior erit locus B, quam locus A. Atque ita ex loco A, ad locum B, conduci potest aqua, non autem contra.

Librationes pro conducendis aquis, quo modo fiãt.

4 QVOD si inter primum locum A, & secundum B, interpositus sit mons C, ita vt ex A, locus B, videri nequeat, vt in 2. figura, ita procedemus. Ex A, per scholium problem. 7. indagabimus altitudinem C D. Deinde ex C, per scholium problem. 9. explorabimus altitudinem C E, ductis nimirum ad CE, perpendicularibus AD, BE. Nam hac ratione concludes locum

locum A, altiorem esse loco B, quantitate D E. Quamobrem si perfodiatur mons C, vel aquæductus circa ipsum extruatur, conduci poterit aqua ex A, ad B, & non contra.



5 POSTREMO si in mõte aliquo, vel in eius latere sit aqua vel in puteo aliquo profundo, vel in fossa aliqua profunda CD; & scire desideres, an ex D, ad B, conduci possit aqua per aquæductũ, ita erit agendũ. Primũ si CD, puteus est, inuestiga eius profunditatẽ CD, per probl. 27. si vero fossa, aut vorago aliqua, per problema 28. Deinde concipiatur ex B, ad perpendiculum C D, duci perpendicularis BE; atque per scholium probl. 7. ex B, inuestigetur altitudo CE. Si namque hæc deprehensa fuerit æqualis profunditati inuentæ CD, habebit fundus aquæ D, eandem altitudinem cum loco B, ac proinde aqua ad B, ex D, defluere non poterit per aquæductum: Si vero altitudo CE, reperta fuerit maior quam profunditas CD, conduci poterit aqua ex D, in locum B: Si denique altitudo CE, inuenta fuerit minor profunditate CD, erit locus B, altior quam aqua iuxta D, atque idcirco defluere non poterit ad B.

EX his non obscure intelliges, vbi aquæductus vtiliter sint extruendi, & vbi non.

FINIS TERTII LIBRI.

GEOME-



GEOMETRIAE PRACTICAE
LIBER QVARTVS.



AREAS
Superficierum planarum inuestigans.

Penes quid mensuræ linearum rectarum, planarum superficierum & solidorũ sumantur.



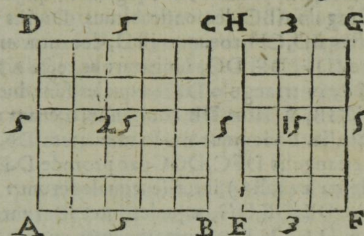
VEMADMODVM linea recta rectas lineas metitur, ita Geometræ superficies planas per superficiem quadratam, & corpora, siue solida, per corpus cubicum metiri solent. Nam sicut linea recta dicitur 100. *palmorũ in qua linea vnius palmi centies continetur, ita superficies plana dicitur* 100. *palmorum, quæ centies quadratum continet, cuius latus palmo æquale est: & solidum* 100. *palmorum illud dicitur, quod complectitur* 100. *cubos, quorum quilibet latus habet vnius palmi: quod de alijs etiam mensuris, vt de pede, cubito, passu, milliario, &c. intelligendum est. Quia vero qualibet superficies tot quadrata cuiusque mensuræ comprehendere dicitur, quot in parallelogrammo rectangulo, quod illi æquale est, continentur, explicandum primo loco erit, qua ratione area cuiuslibet rectanguli cognoscatur. Deinde de area triangu-*

lorum

lorum, quadrilaterorum non rectangulorum, cæterarumque figurarum plurium laterum agemus: ac denique circulum, eiusque partes metiemur.

DE AREA RECTANGVLORVM Caput I.

QVONIAM Euclides defin. 1. lib. 2. docet, omne parallelogrammum rectangulum contineri sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum; manifestum est, aream cuiusque rectanguli produci ex multiplicatione duorum laterum circa rectum angulum, vnius in alterum; adeo vt in quadrato satis sit ducere vnum latus in se, vt eius area cognoscatur: quippe cum duo latera circa vnum angulum rectum æqualia sint. Vt in quadrato A B C D, cuius singula latera quinos palmos continent, si latus AB, quinque palmorum in se ducatur, producentur 25. quadrata, quorum quodlibet habet latus vnius palmi; atque tot palmos quadratos continere dicetur area quadrati ABCD. At area rectanguli altera parte longioris EFGH, cuius vnum latus circa rectum angulum continet 5. pedes, & alterum 3. dicetur continere 15. palmos quadratos, propterea quod ex mutua laterum 5. & 3. multiplicatione numerus 15. procreatur. Area quadrati, & altera parte longioris quo pacto cognoscatur.



2 ITAQVE si campum aliquem rectangulum, vel parallelogrammum rectangulum metiri iubeamur, mensuranda erunt per aliquam mensuram notam, vt per palmum, vel pedem, &c. duo latera circa angulum rectum. Nam vno in alterum ducto, area propositi campi, vel parallelogrammi rectanguli producetur, vt dictum est. Vt campus rectãgulus mẽsuretur, quid agendum.

DE AREA TRIANGVLORVM Caput II.

1 QVANDO trianguli omnia tria latera cognita sunt, duabus vijs eius area cognosci potest. Prima, quæ accuratissima est, ita se habet. *Colligantur omnia latera in vnam summam: Ex huius summæ semisse subtrahantur singula latera, vt habeantur tres differentiæ inter illam semissem, & latera singula: Postremo tres hæ differentiæ, & dicta semissis inter se mutuo multiplicentur. Producti enim numeri radix quadrata erit area trianguli quæsita.*

Verbi gratia, si latera sint 10. 17. 21. erit summa ex illis collecta 48. & semissis 24. Differentiæ autem inter hanc semissem, & latera erunt 14. 7. 3. Hæ inter se multiplicatæ (ducendo primum 14. in 7. deinde productum in 3.) faciunt 294. quæ ducta in 24. semissem prædictam, producũt 7056. cuius numeri

meri radix quadrata 84. erit area dicti trianguli, cuius latera sunt 10. 17. 21. Rursus si in alio quopiam triangulo latera sint 13. 14. 15. inueniemus eandem aream. Nam summa laterum est 42. semissis 21. Differentiæ inter hanc semissem, & tria latera sunt 8. 7. 6. quæ inter se multiplicatæ faciunt 336. quæ ducta in 21. semissem prædictam efficiunt 7056. cuius numeri quadrata radix 84. dabit aream trianguli, quod lateribus 13. 14. 15. continetur. Denique si detur triangulum ABC, in quo latus AB, 7. BC, 10. & AC, 11. summa omnium est 28. & semissis 14. quæ latera superat hisce numeris 7. 4. 3. qui inter se multiplicati faciunt 84. quæ ducta in 14. semissem summæ gignunt numerum 1176. cuius radix quadrata $34\frac{2}{6}\frac{0}{9}$. fere dabit aream trianguli A B C. Ex quo colliges, non omnis trianguli aream esse numerum rationalem: propterea quod numerus vltimo loco productus non est semper quadratus, vt in postremo hoc exemplo contigit.

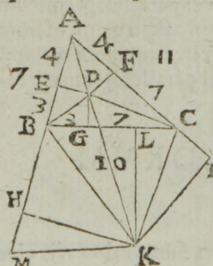
HANC praxim, siue regulam, quę exquisitissima est, vt dixi, ita in triangulo ABC, demonstrabimus. Diuisis angulis ABC, ACB, bifariam per rectas BD, CD, coeuntes in D, ducantur ex D, ad singula latera perpendiculares DE, DF, DG, iungaturque recta A D. Quoniam igitur duo anguli E, DBE, in triangulo DEB, æquales sunt duobus angulis G, DBG, in triangulo DGB, & latus DB, commune; *a* erunt tam latera DE, DG, quam BE, BG, æqualia. Eodemque modo tam latera DF, DG, quam CF, CG, æqualia erũt in triangulis DFC, DGC: ac proinde D E, D F, (cum vtraque ipsi D G, sit ostensa æqualis) inter se æquales erunt: ideoque omnes tres perpendiculares DE, DF, DG, æquales inter se erunt.

a 26. *primi.*

b DEINDE quia quadrato ex AD, æqualia sunt tam quadrata ex AE, ED, quam quadrata ex AF, FD; æqualia erunt quadrata ex AE, ED, quadratis ex AF, FD; Ac proinde ablatis æqualibus quadratis rectarum E D, F D, æqualium, reliqua quadrata rectarum A E, A F, æqualia erunt, propter eaque & rectæ ipsæ AE, AF, æquales erunt. Igitur cum latera AE, AD, trianguli ADE, lateribus AF, AD, trianguli ADF, æqualia sint, & basis ED, basi FD; *c* erit angulus DAE, angulo DAF, æqualis.

b 47. *primi.*

c 8. *primi.*



QVIA vero AE, ipsi AF, & EB, ipsi B G, æqualis est ostensa, erit tota AB, duabus AF, BG, æqualis: additisque æqualibus CG, CF, duæ A B, C G, duabus AC, B G, æquales erunt. Tam ergo duæ AB, CG, quam duæ A C, B G, semissem trium laterum AB, BC, AC, constituent. Quocirca CG, vel CF, differentia erit inter semissem laterum, & latus A B. Item BG, vel BE, differentia inter eandem semissem, & latus AC. Denique cum AB, CG, semissem laterum efficiant, sitque B G, ipsi BE, æqualis, vt ostendimus, constituent quoque B C, AE, semissem eorundem laterum: ideoque A E, differentia erit inter laterum semissem, & latus BC. Tres ergo rectæ AE, EB, CG, & semissem laterum constituunt, & tres differentias inter semissem laterum, & tria latera trianguli.

PRODVCTIS iam AB, AC, sit BH, ipsi CG, & CI, ipsi BG, æqualis; ita vt tam AH, semissi laterum, rectis videlicet A B, C G, quam A I, eidem semissi laterum, rectis nimirum AC, B G, sit æqualis, constetque ex tribus differentijs ante dictis. Ducta quoque HK, ad A H, perpendiculari, quæ

quæ cum AD, producta conueniat in K; connectantur rectæ KI, KB, KC. Et quia duo latera AH, AK, trianguli AHK, duobus lateribus AI, AK, trianguli AIK, æqualia sunt, angulosque ad A, continent æquales, vt supra ostendimus, *a* æquales quoque erunt & bases HK, IK, & anguli H, I. Cum ergo H, per constructionem sit rectus, rectus etiam erit I. a 4. *primi*

ABSCINDATVR præterea BL, ipsi CG, vel BH, æqualis, vt proinde reliqua CL, reliquæ BG, vel ipsi CI, æqualis sit, iungaturque recta KL. Producta autem BH, sumatur HM, ipsi CI, æqualis, connectaturque recta KM. Et quia duo latera KH, HM, trianguli HMK, duobus lateribus KI, IC, trianguli CIK, æqualia sunt, angulosque H, I, continent æquales, vtpote rectos: *b* erunt quoque bases KM, KC, æquales: atque adeo cum duo latera BM, BK, trianguli BMK, duobus lateribus BC, BK, trianguli BCK, æqualia sint, (est namque BM, ipsi BC, æqualis, quod partes BH, HM, partibus BL, LC, sint æquales) sitque basis KM, basi KC, ostensa æqualis; *c* erunt quoque anguli KBM, KBC, æquales. Itaque quoniam duo latera BH, BK, trianguli BHK, duobus lateribus BL, BK, trianguli BLK, æqualia sunt, æqualesque continent angulos ad B, vt ostendimus, *d* erunt & bases HK, KL, & anguli H, L, æquales. Cum ergo H, ex constructione rectus sit, erit quoque L, rectus. Quare cum latera KH, KB, trianguli KBH, lateribus KL, KB, trianguli KBL, æqualia sint, & basis BH, basi BL, *e* erunt etiam anguli BKH, BKL, æquales. b 4. *primi*. c 8. *primi*. d 4. *primi*. e 8. *primi*.

QVONIAM autem ex ijs, quæ ad prop. 32. lib. 1. Euclidis demonstrauimus, quatuor anguli quadrilateri BHKL, quatuor rectis sunt æquales: erunt, demptis duobus rectis H, L, duo HBL, HKL, duobus rectis æquales; ideoque duobus angulis HBL, EBL, æquales, *f* quod hi quoque duobus sint rectis æquales, ablatoque communi HBL, reliquus HKL, reliquo EBL, æqualis erit: ac propterea & HKB, ipsi EBD, dimidius dimidio, æqualis erit. Cum ergo & rectus H, recto E, sit æqualis, *g* erit quoque reliquus HBK, in triangulo HBK, reliquo EDB, in triangulo EDB, æqualis; ac proinde triangula BHK, DEB, æquiangula erunt. *h* Quapropter erit vt DE, ad EB, ita BH, ad HK; atque idcirco si lineæ hæ ad numeros contrahantur, *i* erit numerus, qui fit ex DE, in HK, æqualis numero, qui fit ex EB, in BH. *k* Eandem ergo proportionem habebit quadratus ex DE, ad productum ex DE, in HK, & ad productum ex EB, in BH. *l* Sed ita est quadratus ex DE, ad productum ex DE, in HK, vt DE, ad HK: propterea quod DE, multiplicans DE, & HK, fecit & quadratum ex DE, & productum ex DE, in HK. Erit igitur quadratus quoque ex DE, ad productum ex EB, in BH, vt DE, ad HK. Vt autem DE, ad HK, ita est AE, ad AH. *m* Nam cum parallelæ sint DE, HK, æquiangula erunt triangula AED, AHK, ex coroll. prop. 4. lib. 6. Euclid. *n* Igitur erit vt AE, ad ED, ita AH, ad HK, & permutando, vt AE, ad AH, ita ED, ad HK. Igitur erit quadratus quoque ex DE, ad productum ex EB, in BH, vt AE, ad AH. *o* Qui ergo fit ex quadrato ipsius DE, in AH, æqualis erit ei, qui fit AE, in productum ex EB, in BH. Igitur ex numerus, qui ex producto ex quadrato ipsius DE, in AH, multiplicato in AH, gignitur, æqualis erit numero, qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, multiplicato in eundem AH, procreatur. (Nam quia æquales numeri, nimirum productus ex quadrato ipsius DE, in AH, & productus ex AE, in productum ex EB, in BH, eundem numerum AH, multiplicant *p* habebunt producti, nimirum numerus, qui ex producto ex quadrato ipsius DE, in AH, multipli- f 13. *primi* g 32. *primi* h 4. *sexti*. i 19. *septim*. k 7. *quinti*. l 17. *sept*. m 28. *primi* n 4. *sexti*. o 19. *sept*. p 18. *sept*.

cato in AH, gignitur, & numerus, qui ex producto ex A E, in productum ex EB, in BH, multiplicato in eundem AH, procreatur, eandem proportionem, quam multiplicantes. Cum ergo hi ęquales sint, erunt & illi producti æquales) hoc est, numerus productus ex AH, in AH, id est, quadratus ipsius AH, ductus in quadratum ipsius DE, (Per scholium enim propos. 19. lib. 8. Euclid. quomodocunque tres numeri inter se multiplicentur, idem semper numerus procreatur) æqualis erit numero, qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, nempe ex producto trium differentiarum AE, E B, BH, inter se multiplicatarum, ducto in AH, id est, in semissem laterum gignitur. At ex quadrato ipsius DE, in quadratum ipsius A H, producitur quadratus numerus areę trianguli ABC, vt mox ostendemus. Igitur & ex producto trium excessuum AE, EB, BH, inter se multiplicatorum, ducto in AH, semissem laterũ AB, BC, AC, producitur idem quadratus numerus areæ triãguli ABC: ac proinde radix quadrata huius numeri erit dicti trianguli area: quod erat demonstrandum.

QVOD autem ex quadrato ipsius DE, in quadratum ipsius A H, producatur quadratus numerus areæ trianguli ABC, in hunc modum demonstro; Quoniam vt Num. 2. ostendemus, ex DE, in semissem lateris AB, producitur area trianguli ADB; Et ex eadem DE, hoc est, ex DG, in semissem lateris BC, efficitur area trianguli BDC; Item ex eadem DE, id est, ex DF, in semissem lateris AC, gignitur area trianguli ADC: Quod autem fit ex D E, in semisses laterũ AB, BC, AC, *a* æquale est ei, quod fit ex DE, in AH, ex illis semissibus conflatã: fiet propterea area trianguli ABC, ex DE, in AH; ac propterea (contractis hisce lineis ad numeros) quadratus numerus areæ eiusdem trianguli procreabitur ex quadrato ipsius DE, in quadratum ipsius AH. Quãdo enim duo numeri se mutuo multiplicantes fecerint aliquem, producent eorum quadrati se mutuo multiplicantes quadratum illius producti. quod ita perspicuum fiet. Duo numeri A, & B, se multiplicantes faciant D; & ambo se ipsos multiplicantes faciant C, & E: Denique hi quadrati C, & E, se multiplicantes faciant F. Dico F, esse quadratum ipsius D. Cum enim A, multiplicans se ipsum, & B, faciat C, & D: *b* erit vt A, ad B, ita C, ad D: Eademque ratione, cum B, multiplicans A, & se ipsum, faciat D, & E, erit vt A, ad B, ita D, ad E: ideoque C, D, E, continuè proportionales erunt, *c* Quare qui fit ex C, in E, numerus videlicet F, æqualis erit ei, qui fit ex D, in se: ac proinde F, quadratus erit ipsius D. Quæ cum ita sint, cum ex DE, in AH, producatur area trianguli A B C, vt ostendimus, fiet ex quadrato ipsius DE, in quadratum ipsius AH, quadratus numerus areæ eiusdem trianguli ABC. Quod erat demonstrandum.

A . . B . . .

C . . . . D . . . . . . E . . . .

F 36.

a 1. secũdi

b 17. sept.

c 20. sept.

2 ALTERA via, qua ex datis lateribus area trianguli colligitur, hæc est.

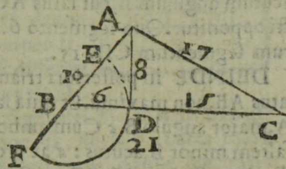
Area trianguli quo pacto aliter ex datis laterib. colligatur.

Ex quouis angulo ad latus oppositum, etiam protractum, si opus est, perpendicularis ducatur. Hæc enim (si eius quantitas cognita fuerit) multiplicata in semissem basis, seu dicti lateris, vel eius semissis in totam basem producet aream trianguli, Vel si mauis, tota perpendicularis ducta in totam basem, numerum procreabit, cuius semissis aream trianguli offeret:

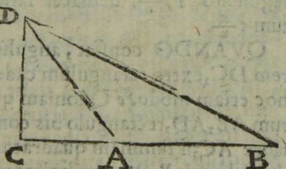
NAM vt lib. 7. propos. 1. demonstrauimus, est area trianguli æqualis rectangulo comprehenso sub perpendiculari, & semisse basis, vel sub semisse per-

ſe perpendicularis,ac tota baſe; Item ſemiſſi rectanguli ſub perpendiculari, ac tota baſe comprehenſi. Cum ergo per cap. 1. huius lib. area rectanguli illius producatur ex multiplicatione vnius lateris circa angulum rectum in alterum: hoc eſt,ex perpendiculari (*a* quæ vni lateri æqualis eſt) in ſemiſſem baſis trianguli, vel ex ſemiſſe perpendicularis (*b* quę ſemiſſi lateris eſt æqualis)in totam baſem: vel denique rectangulum trianguli duplum ex perpendiculari in totam baſem trianguli: conſtat propoſitum. *a 34. primi.* *b 34. primi.*

MAGNITVDO autem dictæ perpendicularis, ſicuti et baſis,in metiendis campis inueſtiganda eſt per catenulam ferream, quod hæc neque intendatur, neque remittatur, aut certe, ſi omnia latera nota ſint, Geometrice hoc modo. Sit triangulum ABC,cuius latus AB,ſit 10.& BC,21. & AC,17. Primum inueſtiganda ſunt ſegmenta BD, CD, inter perpendicularem, per ea,quæ lib. 1. cap. 3. Num. 9. ſcripſimus, hac ratione. Fiat vt latus BC, in quod cadit perpendicularis AD, (Semper autem eſſet demittenda perpendicularis in maximũ latus, vt intra triangulum caderet)ad ſummam aliorum duorum laterum AB,AC,nimirum, vt 21.ad 27.ita differentia eorundem laterum, videlicet 7. ad aliud. Producetur enim numerus 9. (qui quoniam minor eſt latere BC,argumento eſt, perpendicularem intra triangulum cadere. Si enim maior eſſet,cadere t extra, vt propoſ. 9. noſtrorum triangulorum rectil.oſtendimus.) qui ablatus ex latere BC,id eſt,ex 21.relinquit 12.cuius ſemiſſis 6.dabit minus ſegmentum BD,prope minus latus AB: quæ eadem ſemiſſis ex latere BC, ſubtracta reliquum faciet maius ſegmentum CD, nimirum 15.iuxta maius latus AC. Segmẽta baſis, quæ à perpendiculari abſcinduntur,quo pacto cognoſcantur.



SIT rurſus triangulum ABD, cuius latus AB,12. AD, 11.& BD, 20. demittenda autem ſit perpendicularis ex D, ad AB. Fiat, vt latus AB, 12. ad ſummam aliorum duorum 31.ita differentia eorundem, nimirum 9. ad aliud. Producetur enim numerus $23\frac{1}{4}$. (qui quoniam maior eſt latere AB, argumento eſt, perpendicularem cadere extra triãgulum, angulumque A, eſſe obtuſum,) ex quo latus AB, 12. ſubtractum, relinquit, $11\frac{1}{4}$. Huius autem numeri ſemiſſis $5\frac{5}{8}$. dabit ſegmentum exterius AC, inter perpendicularem, & angulum obtuſum: eademque ſemiſſis addita lateri AB,efficiet aliud ſegmentum BC,inter perpendicularem, & angulum acutum $17\frac{5}{8}$. Atque hæc ratio expeditiſſima eſt.



ALITER. Sit ducenda perpendicularis ad maximum latus BC, in priori triangulo A B C, quæ neceſſario cadet intra triangulum; *c* propterea, quod angulus A,maior eſt vtrolibet B C; ac proinde vterque horum acutus eſt. *d* Quoniam autem quadratum rectæ A B, minus eſt quadratis rectarum AC,BC, rectangulo bis comprehenſo ſub BC,& ſegmento CD,inter C, & perpendicularem: ſi quadratum rectæ AB,100.detrahatur ex ſumma quadratorum rectarum AC,BC,id eſt, ex 730.reliquum fiet rectangulum 630. bis comprehenſum ſub BC,& ſegmento CD,inter C, & perpendicularem. *c 18. primi.* *d 13. ſecũdi*

Quare eius semissis 315. æqualis erit rectangulo illi semel sumpto: ac proin de hoc rectangulo 315. diuiso per latus BC, 21. dabit Quotiens 15. segmentum CD, prope angulum acutum C, cui opponitur latus AB, cuius quadratum ex summa reliquorum quadratorum detractum fuit. Ablato autem segmento CD, 15. ex latere BC, 21. remanebit alterum segmentum BD, 6. Eodem pacto, *a* quia quadratum rectæ AC, minus est quadratis rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, & segmento BD, inter B, & perpendicularem: si quadratum rectæ AC, 289. subducatur ex summa 541. quadratorum rectarum AB, BC, reliquum fiet rectangulum 252. comprehensum bis sub CB, & segmento BD, inter B, & perpendicularem. Quare eius semissis 126. æqualis erit illi rectangulo semel sumpto: ac proinde hoc rectangulo 126. diuiso per latus CB, 21. dabit Quotiens 6. segmentum BD, iuxta acutum angulum B, cui latus AC, quadrati ex duobus alijs quadratis detracti opponitur. Quo segmento 6. dempto ex latere BC, 21. remanebit alterum segmentum CD, 15.

a 13. *secũdi.*

DEINDE in posteriori triangulo ABD, ducenda sit perpendicularis ad latus AB, non maximũ. Et quia latus DB, latere AD, maius est; *b* erit angulus A, maior angulo B. *c* Cum ambo ergo simul sint duobus rectis minores, erit saltem minor B, acutus: *d* ac proinde quadratum rectæ AD, minus erit quadratis rectarum AB, BD, rectangulo bis comprehenso sub latere AB, & segmento inter B, & perpendicularem. Si ergo quadratum rectæ AD, 121. subtrahatur ex summa quadratorũ rectarum AB, BD, id est, ex 544. reliquum fiet rectangulum bis comprehensum sub AB, & segmento, inter B, & perpendicularem, nimirum 423. ideoque eius semissis $211\frac{1}{2}$. æqualis erit illi rectangulo semel sumpto. Quare si rectangulum hoc $211\frac{1}{2}$. diuidatur per latus AB, 12. dabit Quotiens $17\frac{5}{8}$. segmentũ inter B, & perpendicularem. quod quia maius est latere AB, argumento est, perpendicularem DC, cadere extra triangulum: ac proinde angulum A, obtusum esse. Quod si ex hoc segmento $17\frac{5}{8}$. dematur latus AB, 12. remanebit exterius segmentum $5\frac{5}{8}$.

b 18 *primi.*
c 17. *primi.*
d 13. *secũdi.*

QVANDO constat, angulum A, esse obtusum, ideoque perpendicularem DC, extra triangulum cadere, reperiemus eadem segmenta BC, CA, hoc etiam modo. *e* Quoniam quadratum lateris BD, superat quadrata laterum AB, AD, rectangulo bis comprehenso sub latere AB, & segmento exteriore AC; si summam quadratorũ rectarum AB, AD, 265. detrahatur ex quadrato lateris BD, 400. reliquum erit rectangulum 135. bis comprehensum sub AB, AC: & eius semissis $67\frac{1}{2}$. illi rectangulo semel sumpto æqualis erit; ac proinde hoc rectangulo $67\frac{1}{2}$. diuiso per latus AB, 12. indicabit Quotiens $5\frac{5}{8}$. segmentum exterius CD; cui si addatur latus AB, 12. conflabitur segmentum BC, $17\frac{5}{8}$. Sed prior ratio, quę ex lib. 2. Euclid. non pendet, expeditior est, ac proinde tenenda: quamuis auctores alij posteriorem hanc viã plerunque sequantur.

e 12. *secũdi.*

Quæ ratio tenenda in segmentis exquirẽdis.

INVENTIS segmentis à perpendiculari factis, ita magnitudinem perpendicularis cognoscemus.

DIFFERENTIA inter vtrumuis segmentum, & latus adiacens ducatur in summam ex eodem segmento & latere conflatam. Radix enim quadrata numeri producti perpendicularem exhibebit notam, vt lib. 1. cap. 3. Num. 17. demonstrauimus.

Perpendicularis in triãgulo quo pacto reperiatur.

Verbi

Verbi gratia. In priori triangulo A B C, ſi differentia 4. inter ſegmentum BD, & latus AB, hoc eſt, inter 6. & 10. multiplicetur per 16. nempe per ſummam eiuſdem ſegmenti BD, & lateris AB; gignetur numerus 64. cuius radix quadrata 8. dabit perpendicularem AD. Pari ratione ſi differentia 2. inter ſegmentum C D, & latus AC, hoc eſt, 15. & 17. ducatur in 32. id eſt, in ſummam eiuſdem ſegmenti CD, & lateris A C: procreabitur numerus 64. cuius radix quadrata 8. præbebit perpendicularem A D, vt prius.

IN poſteriori autem triangulo ABD, ſi differentia $5\frac{3}{8}$. inter ſegmentum AC, & latus AD, nimirum inter $5\frac{5}{8}$. & 11. ducatur in $16\frac{5}{8}$. hoc eſt, in ſummam eiuſdem ſegmenti AC, & latus A D: producetur numerus $\frac{5719}{64}$. ſiue $89\frac{23}{64}$. cuius radix quadrata in numeris exhiberi non poteſt, ſed paulo maior eſt, quam appoſita fractio cuius numerator eſt $75\frac{94}{151}$. denominator autem 8. quæ ad hũc numerum $9\frac{547}{1208}$. reducetur, ſi numerator per denominatorem diuidatur: atque tanta eſt ferme perpendicularis DC, nimirum $9\frac{547}{1208}$. Sic etiam ſi differentia $2\frac{3}{8}$. inter ſegmentum B C, $17\frac{5}{8}$. & latus B D, 20. multiplicetur per $37\frac{5}{8}$. ſummam eiuſdem ſegmenti BC, & latus BD: gignetur idem numerus, qui prius, $\frac{5719}{64}$. hoc eſt, $89\frac{23}{64}$. cuius radix quadrata paulo maior eſt, quam $9\frac{547}{1208}$. veluti prius. Atque hæc ratio ſatis expedita eſt.

$$\frac{75\frac{94}{151}}{8}$$

ALITER. *a* Quoniam quadratum rectæ AB, in priori triangulo A B C, æquale eſt duobus quadratis rectarum A D, B D: ſi quadratum 36. ſegmenti BD, tollatur ex 100. quadrato lateris adiacentis A B, relinquetur quadratum 64. perpendicularis AD. Radix ergo eius quadrata 8. erit magnitudo perpendicularis AD, vt ſupra. Similiter ſi quadratum 225. ſegmenti CD, dematur ex 289. quadrato lateris adiacentis AC, reliquum fiet quadratum 64. perpendicularis A D, cuius radix 8. magnitudo erit perpendicularis A D, vt prius. *a 47. primi.*

IN triangulo vero poſteriori A B D, ſi quadratum $31\frac{41}{64}$. ſegmenti AC, $5\frac{5}{8}$. ſubtrahatur ex 121. quadrato lateris adiacentis AD, 11. remanebit quadratum $89\frac{23}{64}$. perpendicularis D C, cuius radix eſt paulo maior quam $9\frac{547}{1208}$. vt ſupra. Sic etiam ſi quadratum $310\frac{41}{64}$. ſegmenti BC, $17\frac{5}{8}$. ſubtrahatur à quadrato 400. lateris adiacentis BD, 20. remanebit rurſus quadratũ $89\frac{23}{64}$. perpendicularis DC, cuius radix paulo maior eſt quã $9\frac{547}{1208}$. vt ſupra. Verum prior ratio magis expedita videtur, quãquam alij poſteriorem hanc viam tradant. *Quæ via inueſtigandæ perpendicularis ſit expeditior.*

IN triangulo porro æquilatero perpendicularis hoc alio modo inuenietur. *b* Quoniam quadratum lateris ſeſquitertium eſt quadrati perpendicularis: ſi fiat vt 4 ad 3. ita quadratum lateris ad aliud, proueniet quadratum perpendicularis. Radix ergo huius quadrati notam exhibebit perpendicularem. Vt ſi latus eſt 10. & fiat vt 4 ad 3. ita 100. quadratum lateris ad aliud, gignetur quadratum perpendicularis 75. cuius radix. $8\frac{11}{17}$. proxime erit perpendicularis quæſita. *b 12. quarti decimi.*

DENIQVE inuentis ſegmentis baſis à perpendiculari factis, perpendicularis ipſa per ſinus ita fiet cognita in priori triangulo. Fiat vt 10. latus AB, recto angulo oppoſitum ad ſinum totum recti anguli D; ita 6. ſegmentum BD, ad aliud; producetur que ſinus anguli oppoſiti BAD, 60000. Ergo angulus BAD, erit grad. 36. Min. 52. ac proinde angulus B, eius complementum

tum erit grad. 53. Min. 8. Si ergo rursus fiat, vt sinus totus ad 10. latus AB: ita 80003. sinus anguli BAD, ad aliud, procreabitur latus AD, hoc est, perpendicularis $8\frac{30}{100000}$. ferme, quæ paulo maior est, quã 8. supra inuenta. quod discrimen oritur ex eo, quod sinus non sunt omnino tales, quales in tabula describuntur: quod tamen in mensuratione camporum non inducit sensibilem admodum errorem.

Area prioris trianguli ABC.

ITAQVE, si in priori triangulo ABC, perpendicularis AD, 8. ducatur in $10\frac{1}{2}$. semissem basis BC, vel 4. semissis perpendicularis AD, in 21. totam basem, procreabitur area trianguli ABC, 84. Quæ etiam producetur, si tota perpendicularis 8. in totam basem 21. multiplicetur, & producti numeri 168. semissis accipiatur 84.

Area posterioris trianguli ABD.

ITEM in posteriori triangulo ABD, si perpendicularis DC, $9\frac{547}{1208}$. ducatur in 6. semissem basis AB, vel semissis perpendicularis, nimirum $\frac{11419}{2416}$. vel $4\frac{1755}{2416}$. in totam basem 12. conficietur area trianguli ABD, $56\frac{866}{1208}$. vel $56\frac{433}{604}$. Quæ etiam producetur, si tota perpendicularis in totam basem ducatur, & producti capiatur semissis.

Vt fractionis vitentur quid agendum.

VT autem fractiones, quoad eius fieri potest, vitentur, curabis, vt quando perpendicularis est numerus par, & basis numerus impar, accipias semissem perpendicularis, eamque in totam basem ducas: quando vero perpendicularis est numerus impar, & basis numerus par, sumas semissem basis, eamque ducas in totam perpendicularem. Quod si tam perpendicularis, quam basis fuerit numerus par, vel impar, nihil interest, vtrius semissem capias.

Quid agendum, quãdo perpendicularis est numerus surdus.

QVANDO etiam perpendicularis est radix surda, quæ videlicet numero exprimi nequeat, qualis fuit DC, in posteriori triangulo ABD, rectè feceris, si eius quadratũ (nõ extracta radice illa surda) multiplices per quadratũ semissis basis. Numerus. n. productus erit quadratus numerus areæ trianguli: adeo vt radix eius sit ipsa trianguli area. Hac. n. ratione minus à vero aberrabimus. Vt in dicto posteriori triangulo ABD, si quadratũ perpendicularis DC, $\frac{5719}{64}$. ducamus in 36. quadratum semissis basis, producemus $\frac{205884}{64}$. quadratum areæ, cuius radix est $56\frac{2605}{3628}$. area videlicet trianguli ABD, paulo maior, quam prius inuenta. Pari ratione, si in aliquo triangulo quadratum perpendicularis foret 72. & semissis basis 6. si radicem numeri 72. nimirum $8\frac{8}{17}$. hoc est, ipsam perpendicularem, ducamus in 6. producemus aream $50\frac{14}{17}$. At si ipsummet quadratum 72. multiplicemus per 36. quadratum videlicet semissis basis, procreabimus 2592. quadratum areæ, cuius radix paulo maior est, quam $50\frac{92}{101}$. qui numerus aliquanto maior est, quam area prius inuenta $50\frac{14}{17}$. Ratio huius nostræ regulæ est, quòd, vt paulò ante ad finem Num. 1. demonstrauimus, duo numeri se se multiplicantes producant radicem numeri ex eorum quadratis producti.

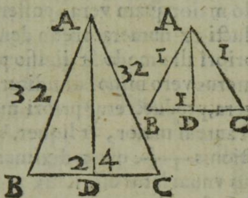
Area trianguli rectanguli.

3 EXPOSITIS duabus regulis generalibus, per quas trianguli cuiuslibet area ex cognitis lateribus inuestigatur, proponemus nunc particularia quædam præcepta pro particularibus triangulis nonnullis, quæ nonnumquã magno vsui erunt, cum per ea sæpenumero expeditius in aliquibus triangulis areæ reperiantur, quam per illas generales regulas. Area ergo trianguli rectanguli producetur, si duo latera circa rectum angulum inter se multiplicentur, & numeri producti semissis capiatur. Nam ex multiplicatione illa gigni-

tur

tur parallelogrammum rectangulum ſub duobus lateribus circa angulum rectum comprehenſum, vt cap. 1. dictum eſt, *a* cuius rectanguli triangulum ſemiſſis eſt, Quod perinde eſt, ac ſi ſemiſſis vtriuſuis lateris in totũ alterum, tamquam in baſem, multiplicetur. Vt in præcedenti triangulo A B C, diuiſo in duo triangula rectangula ADB, ADC; ſi A D, 8. ducatur in B D, 6. producetur numerus 48. cuius ſemiſſis 24. erit area trianguli A D B. Sic ſi AD, 8. ducatur in D C, 15. fiet numerus 120. cuius ſemiſſis 60. erit area trianguli ADC: vbi vides, duo triangula 24. & 60. componere totum triangulum ABC, 84. vt ſupra inuenimus. *a 41. primi.*

4 AREA trianguli Iſoſcelis, vel etiam æquilateri, procreabitur, ſi quadratum ſemiſſis baſis ex quadrato lateris auferatur, & reliquus numerus in idẽ quadratũ ſemiſſis baſis ducatur, ac deniq; huius producti radix quadrata eruatur. Vt in Iſoſcele ABC, cuius æqualia latera AB, AC, ſint 32. 32. & baſis B C 24. ſi quadratum 144. ſemiſſis baſis dematur ex 1024. quadrato lateris AC, vel A B, & reliquus numerus 880. ducatur in 144. quadratum ſemiſſis baſis, erit producti 126720. radix quadrata $355\frac{6}{7}\frac{9}{1}\frac{5}{1}$. (quæ paulo minor eſt vera radice) area trianguli A B C. Nam ſi quadratum ſemiſſis baſis D C, auferatur ex quadrato lateris AC, *b* reliquum fit quadratum perpendicularis AD, quod ex ſcholio propoſ. 26. lib. 1. Euclid. perpendicularis AD, baſem BC, ſecet bifariam in D. Quare vt circa finem Num. 2. oſtendimus, quadratum perpendicularis AD, ductum in quadratum DC, ſemiſſis baſis producet quadratum areæ trianguli ABC. Eademque ratio eſt in triangulo æquilatero, cum hoc habeat etiã duo latera æqualia. *Area trianguli Iſoſcelis.* *b 47. primi.*



5 PRO area tamen trianguli æquilateri hæc etiam regula ab auctoribus traditur, quamuis à nemine (quod ſciam) demonſtrata ſit. Quadratum lateris ducatur in 13. productuſque numerus per 30. diuidatur. Quotiens enim erit area trianguli æquilateri. Vt ſi vnum latus æquilateri trianguli ſit 10. ducatur quadratum lateris 10. nimirum 100, in 13. productuſque numerus 1300. per 30. diuidatur. Quotiens enim $43\frac{1}{3}$. erit area trianguli. Hanc regulam ita demonſtro. Area trianguli æquilateri, cuius ſingula latera ſunt 1. eſt radix quadrata huius numeri $\frac{}{1}\frac{3}{6}$. (Nam per regulam præcedentem Num. 4. explicatam, ſi $\frac{1}{4}$. quadratum ſemiſſis lateris dematur ex 1. quadrato lateris, & reliquus numerus $\frac{3}{4}$. ducatur in idẽ quadratũ $\frac{1}{4}$. ſemiſſis lateris, producetur quadratũ areæ trianguli $\frac{}{1}\frac{3}{6}$.) nimirũ $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$. proxime. Cũ ergo quadratũ lateris 1. ad quadratũ lateris 10. hoc eſt, 1. ad 100. eandem proportionem habeat, quam area $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$. trianguli, cuius vnum latus eſt 1. ad aream trianguli, cuius vnum latus eſt 10. *c* quod vtraque proportio proportionis lateris 1. ad latus 10. ſit duplicata: ſi fiat vt 1. (quadratum lateris 1.) ad 100. (quadratum lateris 10.) ita area $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$. ad aliud, producetur area trianguli, cuius vnum latus eſt 10. Hoc autem fit, ducendo ſecundum numerum 100. in tertium $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$. hoc eſt, (vt conſtat ex regula multiplicationis fra- *Area trianguli æquilateri.* *c 20. & 19. ſexti.*

nis fractorum, ducendo 100 in numeratorẽ 13. & productum per denominatorem 30. diuidendo. Neq. vero opus est productum hunc numerũ $43\frac{1}{3}$. per primum 1. partiri, cum vnitas diuidens, aut multiplicans quemcunque numerum producat numerum eundem. Sic etiam si latus vnum trianguli æquilateri sit 6. ducemus eius quadratum 36. in $\frac{13}{30}$. hoc est, in 13. numeratorem, productumque 468. per 30. partiemur. Quotiens namque $15\frac{3}{5}$. erit trianguli propositi area.

Radix quadrata numeri fracti quo pacto eruatur.

QVOD autem $\frac{13}{30}$. sit radix quadrata numeri $\frac{3}{16}$, patet ex regula qua cuiusuis fracti numeri radix extrahitur: quæ talis est. Numerator in denominatorem ducatur, & producti radix propinqua inueniatur. Si enim per hanc radicem diuidemus numeratorem: vel ipsam radicem per denominatorem partiemur; exibit radix fractionis propositæ: priori quidem modo maior quam vera, posteriori autem minor, si radix illa propinqua producti ex numeratore in denominatorem fuerit minor, quam vera: quia in priori illo modo fit diuisio per numerum vero minorẽ, in posteriori autẽ numerus vero minor diuiditur. Quod si radix illa propinqua foret maior, quã vera, produceretur priori modo radix fractionis minor, quam vera, posteriori autem maior, vt liquet. Verbi gratia. Inuenienda sit radix quadrata fractionis $\frac{3}{16}$. quam diximus esse quadratum areæ trianguli æquilateri, cuius vnum latus est. 1. Ex 3. in 16. fit numerus 48. cuius radix propinqua $6\frac{12}{13}$. minor quam vera, per quam si diuidatur numerator 3. prodibit radix $\frac{13}{30}$. fractionis $\frac{3}{16}$. maior, quam vera: at si radicem eandem propinquam $6\frac{12}{13}$. partiamur per denominatorem 16. reperietur radix $\frac{45}{104}$. eiusdem fractionis $\frac{3}{16}$. minor, quam vera. Ratio huius extractionis hæc est. Quando numerator 3. denominatorem 16. multiplicat, a erit producti 48. radix quadrata medio loco proportionalis inter 3. & 16. quod radix hæc in se ducta producat numerum 48. æqualem ei, qui ab extremis 3. & 16. inter se multiplicatis gignitur: ac proinde proportio 3. ad 16. erit duplicata tam proportionis 3. ad illam radicem, quam illius radicis ad 16. b Cum ergo proportio 3. ad 16. sit quoq. duplicata proportionis, quã radix numeri 3. ad radicem numeri 16. habet: erit vt 3. ad radicem producti 48. Vel vt radix huius producti ad 16, ita radix numeri 3. ad radicem numeri 16. Quapropter cum fractio, cuius numerator est radix numeri 3. denominator autem radix numeri 16. sit radix fractionis $\frac{3}{16}$. erit quoque tam fractio, cuius numerator 3. & denominator radix producti 48. quam fractio cuius numerator radix producti 48. denominator autem 16. hoc est, tam Quotiens, qui fit ex diuisione 3. per radicem producti 48. quam quotiens, qui fit ex diuisione radicis producti 48. per 16. radix propinqua fractionis $\frac{3}{16}$. Eademque de cæteris ratio est.

a 20. sept.

b 11. octaui

ALII hanc tradunt regulam ad aream trianguli æquilateri inueniendã. Ex quadrato lateris sumatur tam pars decima, quàm tertia. Harum enim partium summa erit area trianguli. Quod sic ostendo. Hæ fractiones $\frac{1}{10}$. & $\frac{1}{3}$. in vnam collectæ summam efficiunt $\frac{13}{30}$. ac proinde idem est ex quadrato lateris auferre $\frac{1}{10}$. & $\frac{1}{3}$. atque $\frac{13}{30}$. Sed quando auferuntur $\frac{13}{30}$. multiplicatur quadratum lateris per $\frac{13}{30}$. vt in 6. quæstiuncula fractorum docui. Igitur cum, vt Num. 5. explicatum est, ex multiplicatione quadrati lateris in $\frac{13}{30}$. producatur area trianguli æquilateri, liquido constat, par-

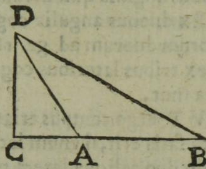
tem

tem decimam, & partem tertiam quadrati lateris conficere eandem aream. Itaque ſi latus ſit 30. erit eius quadratum 900. cuius $\frac{1}{10}$. eſt 90. & $\frac{1}{3}$. eſt 300. quæ partes ſimul conficiunt numerum 390. pro area illius trianguli æquilateri.

6 HACTENVS expoſuimus regulas, quæ nos in cognitionem areæ cuiuſcunque trianguli ducunt, ſi ſingula latera cognita ſint. Nunc triangulorum areas per doctrinam ſinuum, Tangentium, ſecantiumque inueſtigabimus, licet non omnia latera ſint cognita, ſed vnum duntaxat, vel duo, vna cum duobus angulis, vel vno. In triangulis ergo rectangulis ita procedemus.

Area trianguli rectanguli ex latere quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto cognito, quo pacto inueſtigetur.

QVANDO in triangulo rectangulo latus recto angulo oppoſitum cognitum eſt, cum vno angulo acuto, cognoſcemus aream hoc modo. Detracto angulo acuto dato ex recto, id eſt, ex grad. 90. relinquetur alter acutus angulus etiam notus. Vt in triangulo DCB, habente angulum rectum C, & latus BD, notum, vna cum angulo acuto B. *a* Et quoniã duo B, & BDC, vni recto, id eſt, gradibus 90. ſunt æquales, ſi angulus B, ex grad. 90. detrahatur, reliquus fiet angulus BDC. Si ergo fiat, vt ſinus totus anguli recti C, ad oppoſitum latus BD, in qualibet menſura cognitum; ita tam ſinus anguli B, quàm anguli BDC, ad aliud; *b* nota fient latera DC, & CB, in partibus lateris BD: atque ita omnia tria latera cognita erunt. Ergo & area cognoſcetur vel ex Num. 1. huius cap. vel ex Num. 3.



a 32. *primi.*

b 2. triang. rectil.

ITAQVE ſi campus menſurandus triangularis eſt habens vnum angulum rectum, ſatis erit, ſi ſumma diligentia latus recto angulo oppoſitum menſuretur, & inſuper vnus angulus acutus, beneficio alicuius quadrantis in gradus diuiſi, qualis eſt à nobis constructus cap. 2. lib. 1. Nam ex his cognitis, vt proxime diximus, tota area trianguli cognoſcetur, etiamſi ad alia duo latera accedere non poſſimus.

QVANDO in eodem triangulo rectangulo BDC, alterutrum latus datur circa angulum rectum vna cum latere, quod recto angulo opponitur, nimirum ſi DC, & DB, cognita ſint; *c* cognoſcetur quoque alterum latus BC, ſi fiat, vt latus DB, angulo recto oppoſitum ad ſinum totum anguli recti C, ita latus datum DC, ad aliud. Productus enim numerus erit ſinus anguli B, quo cognito ex tabula ſinuum, cognitus etiam erit eius complementum BDC. Si ergo rurſus fiat, vt ſinus totus anguli recti C, ad latus oppoſitum datum DB, ita ſinus anguli BDC, inuenti ad aliud, exibit latus oppoſitum BC. Ex duobus igitur lateribus DC, CB, cognitis, area trianguli nota fiet ex ijs, quæ Num. 3. paulo ante ſcripſimus.

c 3. triang. rectil.

Area trianguli rectanguli ex vno latere circa angulum rectũ, & latere quod recto angulo opponitur.

ATQVE ita in campo, ſi detur portio triangularis, habens angulum rectum; ſatis eſt, ſi diligenter menſuretur vnum latus circa angulum rectum, vna cum latere, quod recto angulo opponitur, etiamſi ad tertium latus non pateat acceſſus. Ex illis enim duobus area cognoſcetur, vt dictum eſt.

QVOD ſi in eodem triangulo rectangulo BDC, notum fuerit vnum latus circa rectum angulum, videlicet DC, vna cum alterutro angulo acuto, vt pote cum C, *d* notum efficietur alterum latus CB: ſi fiat, vt ſinus totus ad datum latus DC: Ita Tangens anguli BDC, quæſito lateri CB, oppoſiti, (co-

d 4. triang. rectil.

gnoſcetur autem alter hic angulus BDC, ſi angulus C, ex gradibus 90. de- matur) ad aliud. Nam inuentus numerus dabit latus C B, quæſitum. Vel ſi fiat, vt ſinus anguli C, dato lateri DC, oppoſiti ad latus datum D C: Ita ſinus alterius anguli B D C, ad aliud. Nam rurſus producetur latus quæſitum BC. Ex duobus ergo lateribus D C, C B, aream cognoſcemus, vt Num. 3. traditur.

Area trianguli rectanguli ex vno latere circa angulum rectum & vno angulo acuto.

IN Campo ergo aliquo, ſi proponatur portio triangularis angulum habens rectum, ſatis erit vnum latus circa rectum angulum, & vnum angulum acutum metiri, vt eius trianguli area reperiatur, etiamſi ad alia duo latera acceſſus denegetur. Atque hæc de rectangulis triangulis: veniamus iam ad obliquangula.

7 SI ergo in triangulo non rectangulo ABD, notum ſit vnum latus, cum duobus angulis quibuſcunque, perueniemus in cognitionem areæ hoc modo Ex duobus angulis cognitus erit quoque tertius, cum ſit complementum aliorum duorum ad gr. 180. *a* Igitur alia duo latera cognoſcentur: ac proinde ex tribus lateribus cognitis area fiet nota ex ijs, quæ Num. 1. & 2. tradita ſunt.

a 10. triang. rectil.

Area trianguli obliquanguli ex vno latere ac duobus angulis.

VT ergo campus triangularis nullum habens angulum rectum cognitus fiat, ſatis erit, ſi vnum latus cum duobus angulis accurate menſuretur. Ex ijs enim duo reliqua latera nota efficientur, &c. vt dictum eſt.

RVRSVS ſi in eodem triangulo A B D, non rectangulo nota ſint duo latera, vna cum angulo ab ipſis comprehenſo; *b* inuenietur tertium latus: ac proinde, vt prius, ex omnibus tribus lateribus area trianguli efficietur cognita.

b 12. trian. rectil.

Area trianguli obliquanguli ex duobus lateribus & angulo ab ipſis comprehendo.

ITAQVE ſatis erit, ſi in campo quouis triangulari duo latera, vna cum angulo ab ipſis comprehenſo menſurentur: vt area ipſius nota reddatur.

8 NEQVE vero hoc omittendum videtur: ſi videlicet vnum latus trianguli, vel cuiuſuis figuræ rectilineæ in partes quotlibet æquales ſecetur, reliqua latera in eiſdẽ partibus fieri poſſe cognita, beneficio inſtrumenti partium, vt ad finem Num. 1. cap. 1. lib. 1. declarauimus. Verum vt magis exquiſitè reperiantur, inquirendum erit fragmentum vltimæ particulæ (ſi quod ſuperfuerit) in partibus milleſimis, per ea, quæ Num. 14. cap. 2. lib. 1. docuimus. Ita enim in dimenſionibus figurarum minus à vero aberrabimus.

Diuiſo vno latere figuræ in quotuis partes æquales, quo pacto alia latera in eiſdẽ partibus fiant nota.

9 NEMINEM autem moueat, aut perturbet, quod rectas dixerimus metiendas eſſe nonnunquam mechanice per catenulam aliquam feream, aut per inſtrumentum partium. Nam in hoc dimetiendi negotio, præſertim in campis, & agris admittenda omnino eſt huiuſmodi mechanica linearum dimenſio, tum quia apud omnes agrimenſores hic mos eſt: tum quia non ſemper via Geometrica id præſtare poteſt; tum vero maxime, quia in dimenſionibus agrorum, ſiue figurarum ſatis eſt rem prope verum attingere, dummodo notabilis error non committatur. Quod ſi hæc dimenſio quarundem linearum alicui non probetur, is profecto è medio tollat, neceſſe eſt, omnem agrorum, figurarumue dimenſionem. Vnde enim conſtat, agrum propoſitum, vel figuram habere latera cognita, niſi hæc ipſa per mẽſuram aliquã materialem ſint explorata? Si igitur laterum dimenſio mechanica, tanquã à vero parum aberrans, ab omnibus vſurpatur, cur eam in lineis intra figuras metiendis reijciendam cenſeamus, non video. Non nego tamen, viam

In negotio dimenſionũ admittẽdã eſſe in nonnullis lineis & angulis mechanicã menſurationem.

Geome-

Geometricam, quando fieri potest, adhibendam esse. In figuris quoque, vbi latera non sunt nimis magna, vtendum censeo doctrina, quam in instrumento partium lib. 1. cap. 1. ad finem Num. 2. tradidimus, non neglectis etiam ijs, quæ in eodem lib. 1. cap. 2. Num. 14. de quauis particula lineæ cognoscenda, in partibus saltem millesimis, scripsimus, quod hac ratione vix à vero quis aberrare possit.

IDEM de mechanica angulorum dimensione per quadrantem intelligendum est: præsertim si præter gradus inuestigentur quoque minuta, vt lib. 1. cap. 2. docuimus.

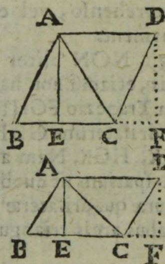
DE AREA QVADRILATERORVM non rectangulorum.

Caput III.

1 

TRIA sunt genera quadrilaterarum figurarum, quæ vel nullum angulum rectum habent, vel certe non omnes rectos: Rhombus, Rhomboides, & Trapezium. Primę duæ figuræ nullum habent angulum rectum: posterior autem potest habere vel vnum rectum, vel duos, vel etiam nullum: Item duo latera opposita parallela, vel non parallela. Rhombi & Rhomboidis, quorum latera nota sint, area producitur ex ductu perpendicularis in latus, in quod perpendicularis cadit. Ita vt magnitudo perpendicularis accurate sit prius exploranda vel per instrumentum partium initio huius operis constructi, vt paulo ante cap. 2. Num. 8. monuimus, vel alio modo, vt mox dicam. Verbi gratia, in Rhombo & Rhomboide A B C D, producetur area ex multiplicatione perpendicularis A E, in latus B C, *a* Nam rectangulum AF, sub A E, & A D, comprehensum æquale est parallelogrammo B D, quòd hæc duo parallelogramma sint inter parallelas AD, B C, & super eandem basem A D. Itaque frustra alij præcipiunt, vt diameter ducatur AC, & beneficio perpendicularis AE, area triãguli ABC, inquiratur, quod hæc duplicata areã exhibeat totius parallelogrammi: *b* quippe cum triangulum ABC, semissis sit parallelogrammi. Frustra, inquam, hoc præcipiunt, cum expeditius area inueniatur si perpendicularis in totum latus BC, ducatur, quam si in semissem multiplicetur, ac productus deinde numeus dupletur.

Rhombi & Rhomboidis area



a 35. *primi.*

b 34. *primi.*

SI per quadrantem cap. 2. lib. 1. constructum inuestigetur quantitas anguli B, reperietur perpendicularis A E, per sinus, hac ratione. Fiat vt sinus totus anguli recti E, ad latus oppositum AB, ita sinus anguli B, ad aliud. *c* Productus enim numerus erit perpendicularis AE, cognita in partibus lateris dati AB.

Perpendicularis inuentio.

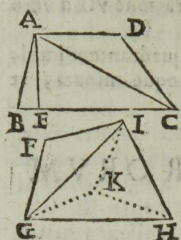
c 2. triang. rectil.

2 TRAPEZII, in quo duo latera opposita sint parallela AB, BC, & omnia

latera nota, area producitur ex perpendiculari AE, inter duo latera parallela multiplicata in semissem summæ ex lateribus parallelis conflatæ. Nam ducta diametro AC, area trianguli ABC, producitur ex perpendiculari AE, in semissem basis BC, vt cap. 2. Num. 2. dictum est: Item area trianguli ACD, ex eadē perpēdiculari AE, in semissem basis AD: Ac proinde hæ duæ areæ simul areā totius Trapezij ABCD, cōficient. *a* Cū igitur idē fiat ex AE, in summam ex semisse rectæ BC, & ex semisse rectæ AD, conflatā, id est, in semissem rectarum BC, AD, simul: quod ex AE, in semissem lateris BC, & ex AE, in semissem lateris AD; liquido constat, aream Trapezij gigni ex perpendiculari AE, in semissem summæ laterum AD, BC. Atque hæc ratio locum etiam habet in Trapezio habente vnum angulum rectum, vel duos rectos.

Area trapezij habētis duo latera parallela.

a 1. *secundi.*



PERPENDICVLARIS vero AE, inuenietur, vt in Rhombo, & Rhomboide diximus, duobus modis, si per quadrantem angulus B, inuestigetur, &c.

IN Trapezio autem FGHI, in quo nulla sunt latera parallela, omnia tamen latera sunt nota, mensuranda primum est diameter. IG, per instrumentum partium. Deinde vtriusque trianguli FGI, GHI, area inuenienda, vt cap. 2. Num. 1. & 2. tradidimus. Ambæ enim areæ simul conficient aream totius Trapezij.

Area trapezij nulla habentis latera parallela.

QVOD si malueris angulum F, vel H, per quadrantem inuenire, cognoscemus diametri GI, magnitudinem, per doctrinam sinuum, ac Tangentium, *b* vt lib. 1. cap. 3. docuimus, ex duobus lateribus FG, FI, & angulo F, ab ipsis comprehenso, vel ex duobus lateribus HG, HI, & angulo H, quem continent.

b 12. trian. rectil. Nu. 2.

3 NON aliter aream consequemur cuiuscunque quadrilateri irregularis, etiamsi non habeat omnes angulos introrsum, sicut Trapezium. Vt si in Trapezio FGHI, ducantur ex G, & I, duæ rectæ GK, IK, constituetur quadrilaterum GHIK, irregulare, cum solum habeat tres angulos GHI, HIK, HGK. Nam ad K, non fit angulus GKI, introrsum versus H, cum illud spatium sit duobus rectis maius, sed versus F, extrorsum. Huius ergo figuræ quadrilateræ irregularis aream colligemus, ducta diametro KH, ex duabus areis triangulorum IKH, GKH, vt de Trapezio FGHI, dictum est.

Area figuræ quadrilateræ irregularis.

DE AREA MVLTILATERARVM figurarum irregularium.

Caput IIII.

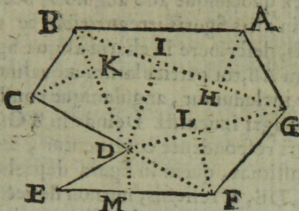


FIGVRAS multilateras irregulares, quæ videlicet plura latera habent inæqualia, quam quatuor, etiamsi valde irregulares sint, metiemur, vt trapezia irregularia, resoluendo nimirum illas in triangula, & singulorum triangulorum areas inuestigando. Nam omnes hæ areæ in vnam summam collectæ æquales sunt areæ totius figuræ propositæ. Vt si figura septem laterum

Area multilateræ figuræ.

laterum ABCDEFG, resoluatur in quinque triangula ABG, GBD, DBC, DEF, FDG, ita vt eorũ latera se mutuo nõ intersecẽt, inquirendæ sunt areæ

Quãdo figura in triangula resolui potest, quo modo eius area colligatur.



singulorum hoc modo. Quando omnia latera triangulorum nota effici possunt per aliquam mensuram, siue figura agrum aliquem repræsentet, siue in charta solum sit descripta, demittantur ex angulis ad latera opposita perpendiculares AH, DI, CK, DM, FL, singulæ in singulis triangulis. Deinde in triãgulo ABG, *a* inquirantur ex tribus lateribus notis segmẽta BH, HG; & ex his perpendicularis AH, vt cap. 2. huius lib. Num. 2. declarauimus Nam AH, in semissem basis BG, ducta producet aream trianguli ABG. Eademque ratione aliorum triangulorum areæ peruestigẽtur: atque omnes areæ in vnam redigantur summam, vt area totius figuræ habeatur. Quod si malueris, poteris omnium triangulorum areas indagare ex tribus lateribus cognitis, per ea, quæ cap. 2. Num. 1. scripsimus, etiamsi neque perpendiculares ductæ sint, neque segmenta BH, GH, inuenta.

a 9. triang. rectil.

2 QVANDO latera triangulorum interiora mensurari nequeunt, immo neque duci, vt non raro accidit in campis, aut agris, qui vel propter arbores, vel paludes interiectas, rectis itineribus pertransiri non possunt; alia ratione scopum attingemus, hac videlicet. Cognitis lateribus figuram ambientibus per aliquam mensuram, inuestigentur quoque anguli ab ipsis comprehensi beneficio quadrantis alicuius in gradus diuisi. In proposita figura angulus CDE, indagandus non est, quod sit extra figuram. Resoluta deinde figura mente, aut cogitatione in triangula, ac si latera interiora ducta essent, vt prius: *b* explorentur in triangulo ABG, duo anguli B, G, ex duobus lateribus AB, AG, anguloq. ab ipsis comprehenso; atq. insuper latus BG. Hinc.n. in triangulo rectãgulo ABH, vel AGH, *c* demissa perpendicularis ex A, cognoscetur ex base AB, & angulo B, vel ex base AG, & angulo G: ac proinde area triãguli reperietur, vt antea, ex ijs, quæ c. 2. huius lib. Nu. 1. & 2. tradita sunt. Nõ aliter area trianguli BCD, nota fiet ex duobus lateribus CB, CD, notis angulum C, notũ ambientibus, *d* si nimirũ inuestigentur prius anguli B, D, vna cum latere BD, *e* & ex his demissa perpendicularis CK. Post hæc in triangulo BDG, si anguli ABG, CBD, iam cogniti detrahantur ex toto angulo ABC, noto, remanebit angulus DBG, notus. Cum ergo latera BD, BG, ipsum includentia facta sint etiam nota; *f* cognoscẽtur eodem modo & anguli D, G, & latus DG; *g* atque insuper perpendicularis ex B, in DG, demissa, &c. Similiter in triangulo GDF, si ex angulo noto AGF, tollantur anguli AGB, BGD, iam noti effecti, relinquetur angulus DGF, notus. Cum igitur & latus GD, notum factum sit; *h* cognoscemus & duos angulos

Quãdo figura in triangula resolui nõ potest quo modo eius area deprehendatur

b 12. trian. rectil.

c 2. triang. rectil.

d 12. trian. rectil. Nu. 2.

e 2. triang. rectil.

f 12. trian. rectil. Nu. 2.

g 2. triang. rectil.

h 12. trian. rectil.

a 2. triang. rectil.
b 16 trian. rectil.
c 2. triang. rectil.

gulos GDF, GFD, & insuper latus DF, a vna cũ perpendiculari ex G, in DF, demissa, &c. In triangulo denique DEF, cum omnia latera sint nota; b efficientur quoque noti omnes tres anguli: ac proinde demissa perpendicularis DM, ex D, demissa, vel ex quocunque alio angulo b, nota fiet, &c. Ex his facile intelliges, quomodo in alijs figuris irregularibus te gerere debeas.

Quomodo figura agro proposito similis describi possit.

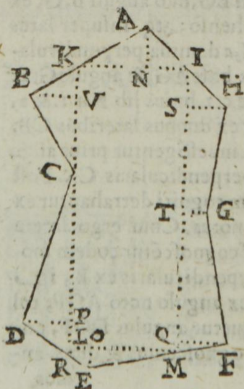
POTES etiam, si vis, describere in charta aliqua figuram agro similem: si nimirum sumas rectam AB, tot particularum æqualium, quot mensuræ in latere agri respondente includuntur, angulumque constituas A B C, æqualem ei, quem in ambitu agri inuenisti. Deinde in B C, tot particulas accipias, quot in latere agri respondente continentur, iterumque angulum BCD, æqualem illi constituas, quem in figura deprehendisti. Denique si idem facias de angulo CDE, & reliquis, necnon de rectis CD, DE, & alijs, descripta erit figura similis agro: quæ si resoluetur in triangula, quorum latera intra figuram per instrumentum partium mensurentur, reperietur eius area, sicuti prius, quando ager resolui poterat in triangula.

QVANDO campi planities non est impedita, magis exquisitè figura ei similis descibetur per ea, quæ lib. 3. Problem. 42. Num. 3. scripsimus: si videlicet intra campum eligatur punctum quodpiam, ex quo ad omnes angulos rectæ ducantur, notatis angulis, quos efficiunt. Nam si illæ rectæ mensurentur, angulique ad aliquod punctum in charta transferantur, & in rectis angulorum capiantur tot particulæ æquales, quot mensuræ in rectis angulorum circa punctum in campo electum consistentium deprehensæ sunt, continebunt rectæ extrema puncta connectentes figuram similem campo, vt in loco citato demonstrauimus. Quod si duo puncta eligantur in campo, è quibus rectæ ad angulos ducantur, notatis punctis, vbi binæ rectæ, conueniunt, describetur etiam figura campo similis, quamuis rectæ illæ non mensurentur: quemadmodum ibidem Num. 1. declarauimus.

Qua ratione campus intra quem lacus vel silua existat mensuretur.

MANIFESTVM autem est, eodem pacto mensurari posse campum, in quo lacus, vel silua comprehendatur, licet in triangula resolui non possit, dummodo eius latera exteriora cum angulis cognosci possint. Quod si in circuitu agri fuerit aliqua portio curua, & non recta, secanda ea erit in tot partes, donec à rectis lineis parum differant, eæque pro lateribus rectis assumendæ.

Ratio communis mensorum in area cuiusuis figuræ inuestigāda



3 AGRIMENSORES ne cogantur totum campum sæpius perambulare, vt perpendiculares in triangulis ducant, angulosque metiantur, hanc ineunt rationem. In agro, seu figura constituunt, quam possunt, maximum rectangulum, atque ad eius latera ex angulis figuræ perpendiculares concipiunt demitti, quod faciunt, applicando vnum latus normæ ad latus rectanguli, & aliud ad angulum figuræ oppositum dirigendo. Ita namque tota figura resoluta erit in rectangulum illud constitutum, & in trapezia duorum laterum parallelorum, atque in triangula rectangula. Deinde vel ipsimet metiuntur latera rectanguli, & perpendiculares, vel vt ab alijs mensurentur, præcipiunt, quod quidem per catenulam ferream exequuntur. Postremo triangula qui

quidem rectangula metiuntur, vt cap. 2. Num. 3. tradidimus, trapezia vero duorum laterum parallelorum, vt cap. 3. Num. 2. docuimus. Rectangula denique per ea, quæ cap. 1. scripsimus, mensurant. Horum enim areæ in vnam summam collectæ conficiunt aream totius agri, seu figuræ. In proposito octangulo ABCDEFGH, continetur rectangulum IKLM, trapezia HSTG, GTQF, OLRE; & triangula rectangula ANK, ANI, ISH, FQM, MOE DPR, CDP, BCV, BKV.

ALII non constituunt rectangulum intra campum, vel figuram, sed lineam, quam possunt, longissimam ducunt, nimirum à puncto A, ad latus EF, quam fundamentalem appellant. Ad hanc ex angulis demittunt perpendiculares: atque ita totam rursus figuram in trapezia duorum laterum parallelorum, & in triangula rectangula dispertiunt, &c. Sed prior ratio commodior videtur: quippe in qua perpendiculares ex angulis deductæ breuiores sint, ac propterea facilius mensurentur, ac certius.

QVANDO intra agrum dictę operationes fieri nequeunt, solent etiam mensores circa agrum includentē siluas, lacus, & ædificia, vel alia impedimenta, formare rectangulum. Nam si ad eius latera ducantur perpendiculares ab angulis exterioribus agri, constituentur iterum trapezia rectangula duorum laterum parallelorum, vel parallelogramma, & triangula rectangula extra agrum: quorum areæ si ex area totius rectanguli subducātur, reliqua fiet area propositi agri.

4 SED neque aspernanda mihi videtur ea ratio, quam olim meis auditoribus explicare solebam. Vt nimirum toti figuræ (reducto prius agro ad similem figuram, vt paulo ante Num. 2. præcepi) constituatur quadratum æquale, vel certe latus eius quadrati inueniatur. Nam si vnum huius quadrati latus mensuretur, atque in seipsum ducatur, prodibit area figuræ propositæ. Mensurandum porro est latus in particulis laterum figuræ, quæ mensuris laterum agri respondent, quod facile fiet per instrumentum partiū. *Pulchra ratio areæ inueniendæ cuiuscunq; figuræ.*

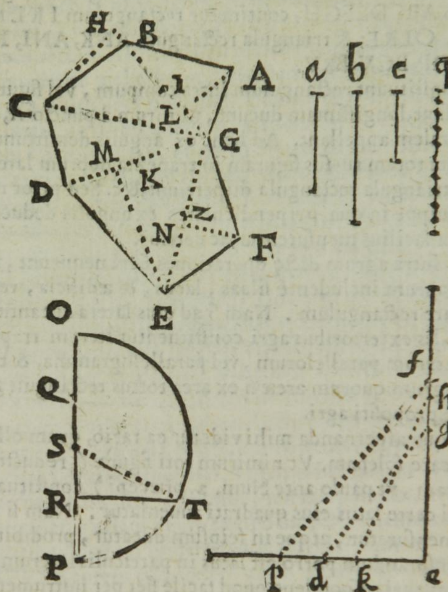
QVO pacto autem cuilibet figuræ quadratum æquale sine magno labore construi possit, docui in scholio propos. 14. lib. 2. Euclid. quod hoc loco, paucis in melius mutatis, repetendum censeo. Sit ergo heptagonum irregulare ABCDEFG, quo resoluto in 5. triangula ABG, BCG, CDG, DEG, EFG, ducātur ad BG, basē communē duorū triangulorū ab angulis oppositis A, C, perpendiculares AL, CH, quarū posterior in GB, protractā cadit in nostra figura. Deinde in recta quacūq. OP, sumantur OQ, QR, ipsis AL, CH, æquales. Itē RP, ipsi BI, semissi basis BG, æqualis; ac circa OP, ex medio puncto S, semicirculus describatur OTP: ac deniq. ex R, termino rectæ OR, quæ duabus perpendicularibus AL, CH, ęqualis est, ad OP, perpendicularis excitetur RT, semicirculum secans in T. Dico quadratum rectæ RT, duobus triangulis simul ABG, BCG, esse æquale. Quia enim rectangulum sub BI, semisse basis, & perpendiculari AL, æquale est triangulo ABG, ex propos. 1. lib. 7. huius; & rectangulum sub eadem BI, & perpendiculi GH, æquale est triangulo BCG: Quod autem sub BI, & aggregato ex AL, CH, hoc est, sub RP, OR, (quod RP, ipsi BI, sumpta sit æqualis, & OR, ipsis AL, CH, simul) *a* æquale est eis, quæ sub BI, & AL, CH, comprehenduntur, rectangulis; erit rectangulum sub OR, RP, duobus triangulis ABG, BCG, æquale. *b* Cum ergo quadratum ex RT, rectangulo sub OR, RP, sit æquale, (quod ex scholio propos. 13. lib. 6. Euclid. RT, media proportionalis sit inter OR, RP,

Quadratum datæ figuræ æquale qua ratione construatur.

a 1. *secundi*

b 17. *sexti.*

RP,) erit quoque quadratum ex RT, duobus triangulis ABG,BCG, æqua-



le. quod est propositum. Immo quadratum ex RT, rectangulo sub OR, RP, æquale esse, demonstrabitur hoc etiam modo sine ope lib. 6. Euclid. *a* Rectangulum sub OR, RP, vna cum quadrato ex SR, æquale est quadrato ex SP, hoc est, (ducta ST,) quadrato ex ST, *b* hoc est, quadratis ex SR, RT. Ablato ergo communi quadrato rectæ SR, reliquum rectangulum sub OR, RP, reliquo quadrato ex RT, erit æquale.

a 5. secundi

b 47. primi.

EODEM modo reperiemus quadratum duobus triangulis CDG, DEG, æquale, si ad basem communem DG, ducantur perpendiculares CD, EM, quarum prior in nostra figura cum latere CD, coincidit, &c. Atque ita deinceps, si plura fuerint triangula, reperiemus semper binis triangulis singula quadrata æqualia. Sed quia in nostra figura superest vnum tantum triangulum EFG, inueniemus ei quadratum æquale, si, ducta perpendiculari FN, circa rectam ex FN, & semisse basis EZ, conflatam semicirculus describatur, &c. Sint ergo a, b, c, latera quadratorum trapezijs ABCG, CDEG, & triangulo EFG, æqualium. quibus omnibus quadratis vnum æquale exhibebimus hac arte. Fiat angulus rectus d e f, & lateribus a, b, æquales sumantur rectæ e d, e g, *c* eritque quadratum ductæ rectæ d g, quadratis rectarum ed, eg,

c 47. primi.

e d, e g, hoc est, laterum a, b, æquale. Capiatur rursus e k, lateri c, & recta e h, rectæ d g, æqualis; *a* eritque rursus quadratum ex kh, æquale quadratis ex k e, e h, idest ex c, e h, nimirum tribus ex a, b, c. Si igitur latus ex k h, mensuretur, & in se ducatur, gignetur area figuræ propositæ A B C-D E F G. *a 47. primi*

EODEM artificio, si plura sint latera, inueniemus quadratum omnibus quadratis æquale. Vt si foret alterum latus q, acciperemus ei æqualem rectam e p. Item rectam e f, rectæ kh, æqualem. Nam quadratum ex p f, quadratis ex e p, hoc est, ex q, & ex e f, id est, ex a, b, c, erit æquale, & sic de pluribus.

EX his colligitur facilis ratio metiendi trapezij irregularis, cuiusmodi est in proxima figura trapezium ABCG. Nam ducta diametro B G, si ad eam duæ perpendiculares demissæ AL, CH, mensurentur, earumque aggregatum in medietatem diametri BG, multiplicetur, procreabitur area trapezij, vt demonstratum est. Facilis ratio mensurandi trapezij irregularis.

IN octauo porrò lib. propos. 6. docebimus quoque, qua ratione datæ figuræ rectilineæ rectangulum æquale construatur: quod si fiat hoc loco, efficietur illi rectangulo quadratum æquale, per vltimam propos. lib. 2. Euclidis, sine vllo negotio, aut molestia.

DE AREA MVLTILATERARVM figurarum regularium. Caput V.



1 QVAMQVAM regulares figuræ, quæ scilicet sunt & æquilateræ & æquiangulæ, mensurari possint, vt irregulares præcedentis capitis, resoluendo eas in triangula, &c. solet tamen dari propria ac peculiaris regula, qua cuiusque figuræ regularis area inuenitur: quæ ita se habet.

SEMISSIS ambitus figuræ multiplicetur in perpendicularem è centro figuræ ad vnum latus cadentem. Numerus enim productus area erit figuræ. Area figuræ regularis.

NAM vt lib. 7. de Isoperimetris propos. 2. demonstrabimus, area cuiuslibet figuræ regularis æqualis est rectangulo contento sub perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ducta, & sub dimidiato ambitu eiusdem figuræ.

2 PERPENDICVLARIS porro è centro figuræ in vnum latus cadens, vna cum semidiametro circuli figuram ambientis sic reperietur. Numerus laterum, siue angulorum duplicetur, & à duplo auferantur 4. Nam reliquus numerus indicabit, quot rectis angulis omnes anguli figuræ æquiualeant, per ea, quæ in scholio propos. 32. lib. 1. Euclid. demonstrata sunt. Hic idem numerus reliquus, videlicet, numerus angulorum rectorum, per numerum angulorum diuidatur, vt Quotiens vnius anguli figuræ magnitudinem exhibeat, qui in hxagono continet rectum cum parte tertia, hoc est, grad. 120. Et quoniam semidiameter secat angulum figuræ bifariam, vt constat ex demonstratione propos. 12. lib. 4. Euclid. Perpendicularis & semidiameter figuræ regularis quo pacto inueniatur.

clid. fit vt ſi ſemiſſis lateris, in quod perpendicularis cadit, ponatur ſinus totus, perpendicularis ſit Tangens ſemiſſis anguli figuræ, & ſemidiameter, Secans. Si fiat ergo,

Vt 100000. *ſinus totus.*	*ad ſemiſſem lateris:*	*ita Tangens ſemiſſis anguli, vel ſecans,*	*ad aliud,*

prodibit tam perpendicularis, quàm ſemidiameter in partibus lateris figuræ. Verbi gratia, in Hexagono regulari, cuius vnum latus ſit 12. ſi fiat, vt 100000. ſinus totus ad 6. ſemiſſem lateris: ita 173205. tangens ſemiſſis anguli Hexagoni ad aliud, reperietur perpendicularis $10\frac{39230}{100000}$. vel $10\frac{3923}{10000}$. Item ſi fiat, vt 100000. ſinus totus ad 6. ſemiſſem lateris; ita 200000. Secans ſemiſſis anguli Hexagoni ad aliud, exibit ſemidiameter figuræ 12.

ITAQVE ſi perpendicularis $10\frac{3923}{10000}$. ducatur in 36. ſemiſſem ambitus Hexagoni ex tribus lateribus conflatam, producetur area Hexagoni $374\frac{1228}{10000}$. vel $374\frac{307}{2500}$. Eodemque modo procedendum eſt in alijs figuris regularibus, in quibus angulorum ſemiſſes in tabula Tangentium, ac ſecantium accipi poſſunt.

3 QVONIAM vero circa quamlibet figuram regularem circulus deſcribi poteſt, vt ex lib. 4. Eucl. conſtat, proponemus hic plurimarum figurarum regularium latera in partibus diametri circuli ambientis 20000000. vel ſemidiametri, ſiue ſinus totius 10000000. ex probatis auctoribus, vt earum areæ magis exquiſitè inueniri poſſint per regulam Num. 1. propoſitam. Nam ſi ex ſolo vno latere in aliqua menſura cognito aream inueſtigare velimus quemadmodum in Hexagono factum eſt, occurrēt multę difficultates ac magnæ, propterea quod ſemidiametri, perpendicularesque ex ſinubus, Tangentibus, ac ſecantibus erui non poſſunt, niſi quando ſemiſſis anguli figuræ comprehendit præciſè gradus, vel gradus cum minutis, vel gradus cum minutis & ſecundis: (quamuis ſi ſecunda adſint, neceſſe ſit partem proportionalem adhibere) ſicut in Hexagono paulo ante factum eſt, cuius anguli ſemiſſis continet grad. 60. quod in quamplurimis figuris non contingit. Nam, verbi gratia, in Heptagono omnes 7. anguli ex ſcholio propoſ. 32. lib. 1. Euclid. æquiualent 10. rectis, ideoque vnus angulus complectitur vnum rectum cum $\frac{3}{7}$. hoc eſt, gradus 128. Min. 34. Sec. 17. Ter. 8. Quar. 34. &c. atque eius ſemiſſis grad. 64. min. 17. Secun. 8. Ter. 34. Quar. 17. &c. ex qua ſemiſſe neque Tangens pro perpendiculari, neque ſecans pro ſemidiametro per tabulas Tangentium, atque ſecantium excerpi poteſt. Idemque in alijs figuris innumeris accidere comperies. Quod ſi ſcientia inuenta eſſet conſtruendi omnes figuras regulares, ſuperari aliquo modo poſſet hæc difficultas: propterea quod cognito latere vno in quantiſcunque partibus, cognoſci quoque poſſet tam perpendicularis, quam ſemidiameter in ijsdem partibus, beneficio inſtrumenti partium, vt lib. 1. cap. 1. ad finem Num. 1. tradidimus. Sed quia pauciſſimas figuras æquilateras deſcribere nouimus intra circulum, areas plurimarum ignorari neceſſe eſt. Hanc ob cauſam nonnulli Geometræ, inter quos ſtrenuam operam nauauit Ludouicus à Collen, ingenti labore latera figurarum, ſiue deſcriptæ eæ ſint, ſiue non, explorarunt: quamuis earum anguli præter gradus, ac minuta comprehendant inſuper Secunda, Tertia, Quarta, &c. vt earum areas conſequi poſſimus. Ludolphus

Quare ex latere figuræ regularis dato non ſemper poſſit inueniri area, niſi figura ipſa deſcripta ſit.

Nam

TABVLA CONTINENS LATERA figurarum regularium a triangulo vſque ad figuram 80. laterũ, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000.

Num. lat. vel angulor.	Latera figurarũ regularium, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000.	Num. lat. vel angulor.	Latera figurarũ regularium, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000.	Num. lat. vel angulor.	Latera figurarũ regularium, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000.
3	17320508	29	2162380	55	1141776
4	14142135	30	2090569	56	1121408
5	11755705	31	2023366	57	1101755
6	10000000	32	1960341	58	1082778
7	8677674	33	1901120	59	1064443
8	7653668	34	1845367	60	1046719
9	6840402	35	1792786	61	1029575
10	6180339	36	1743114	62	1012983
11	5634651	37	1696118	63	996917
12	5176380	38	1651586	64	981353
13	4786313	39	1609331	65	966275
14	4450418	40	1569181	66	951638
15	4158233	41	1530985	67	937445
16	3901806	42	1494601	68	923669
17	3674990	43	1459906	69	910291
18	3472963	44	1426783	70	897296
19	3291891	45	1395129	71	884666
20	3128689	46	1364848	72	872387
21	2980845	47	1335852	73	860444
22	2846296	48	1308062	74	848824
23	2723332	49	1281404	75	837513
24	2610523	50	1255810	76	826499
25	2506664	51	1231218	77	815771
26	2410733	52	1207569	78	805318
27	2321858	53	1184812	79	795130
28	2239289	54	1162896	80	785196

Nam ex latere cuiuſcunque figuræ regularis cognito in partibus diametri circuli circũſcripti, vel ſinus totius, veniemus per ea, quæ cap. 2. Num. 2. ſcripſimus, in cognitionem lineæ perpendicularis ex centro in vnum latus deductæ, ac proinde totam aream nanciſcemur, vt paulo ante Num. 1, docuimus. Latera igitur in quàm plurimis figuris in tabula præcedenti expoſita habes, quæ omnia veris lateribus ſunt paulo minora; & ſi adiceris vnitatem, fient paulo maiora veris; ita vt verum latus trianguli æquilateri inter hos duos numeros 17320508. 17320509. conſiſtat.

Ex cognita ſemidiametro circuli inuenire latus figuræ regularis in eo circulo deſcriptæ.

4 IAM vero cognita ſemidiametro alicuius circuli in partibus cuiuſcunque menſuræ, reperiemus in iiſdem partibus latus figuræ regularis, cuius laterum numerus maior non eſt, quam 80. beneficio præcedentis tabulæ: ſi nimirum fiat, vt ſinus totus 10000000. ad latus figuræ propoſitæ in præcedenti tabula, ita ſemidiameter circuli propoſiti data ad aliud. Sit verbi gratia, ſemidiameter alicuius circuli 12. & inueniendum ſit latus decagoni reſpectu dictæ ſemidiametri: Fiat vt 10000000. ſinus totus ad 6180339. latus Decagoni; ita 12. ſemidiameter data ad aliud; exibitque latus quæſitum $8\frac{164068}{1000000}$. vel in minoribus numeris $8\frac{41017}{250000}$.

Fractionẽ magnã ad minorẽ ferè æquiualentem reducere.

ET ſi moleſtum videatur operari cum fractione tam magna, reduces eam ad minorem quaſi æquiualentem hoc modo. Elige pro Numeratore quemuis numerum, vt 10. Et fiat vt Numerator 164068. ad ſuum Denominatorem 1000000. ita Numerator electus 10. ad aliud, reperieſque Denominatorem $609\frac{82588}{164068}$. Ita vt relicta hac fractione, Denominator 609. ſit minor quam verus; & 610 maior, hoc eſt, fractio $\frac{10}{609}$. ſit maior fractione $\frac{164068}{1000000}$. fractio autem $\frac{10}{610}$. minor. Inter has autem duas fractiones $\frac{10}{609}$. $\frac{10}{610}$. produces mediam $\frac{20}{1219}$. cuius Numerator ex Numeratoribus, & Denominator ex Denominatoribus conflatus eſt. Eritque hæc fractio inuenta fere maiori illi æqualis.

Inter duas fractiones inuenire mediam

FRACTIONEM porro, cuius Numerator ex duobus Numeratoribus, & Denominator ex Denominatoribus duarum minutiarum componitur, eſſe maiorem minore, & minorem maiore, demonſtrabimus lib. 8. propoſ. 10.

Ex cognito latere figuræ regularis, inuenire ſemidiametrum circuli circumſcripti.

VICISSIM ex dato latere cuiuslibet figuræ regularis cognoſcemus ſemidiametrũ circuli circũſcribentis: ſi fiat, vt latus propoſitæ figuræ in tabula antecedente ad 10000000. ita latus datum ad aliud. Vt ſi latus Pentagoni detur 12. & fiat, vt 11755705. ad 10000000. ita 12. ad aliud, reperietur ſemidiameter circuli circumſcripti $10\frac{2442950}{11755705}$. Et ſi fiat, vt Numerator huius fractionis ad ſuum Denominatorem: ita Numerator electus quicunque, nimirum 1. ad aliud, inuenietur Denominator ſequens $4\frac{1983905}{2442950}$. ita vt fractio $\frac{1}{4}$. ſit maior, quam $\frac{2442950}{11755705}$. at $\frac{1}{5}$. minor. Ex additione numeratorum. 1. 1. inter ſe, & Denominatorum 4. 5. inter ſe, efficies fractionem $\frac{2}{9}$. mediam: quæ adhuc maior eſt, quam $\frac{2442950}{11755705}$. Media autem inter $\frac{1}{5}$. & $\frac{2}{9}$. eſt $\frac{3}{14}$. quæ parum ab illa differt: ita vt ſemidiameter quæſita dici poſſit eſſe $10\frac{3}{14}$. Atque in hũc modũ per minores numeros operationes fieri poſſunt, quamuis non omnino exquiſitè, quod fractiones aſſumptæ non ſint omnino veræ; ſed hic error in dimenſionibus camporum tolerabilis eſt.

5 ANTEQVAM rectilinearum figurarum dimenſionem concludam, lubet regulam attexere, qua ex cognita area cuiuſcunque figuræ latus habentis notum venire poſſimus in cognitionem alterius figuræ ſimilis illi, ſimili-

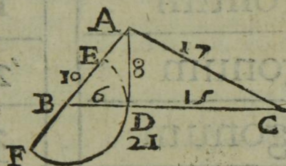
militerq. positæ latus homologum etiam notum habentis: quæ sic se habet.

Quadratus numerus denominatoris proportionis, quam latus figuræ ignotæ ad latus figuræ cognitæ habet, (qui denominator habebitur, si latus figuræ ignotæ per latus figuræ cognitæ diuidatur) si ducatur in areã cognitã, producetur area alterius figuræ quæsitæ. Debent autem figuræ esse similes, similiterque positæ, & earum latera homologa sumi vt dictum est.

Qua ratione ex area cuiuslibet figuræ eruatur area alterius figuræ similis.

Nam denominator proportionis lateris figuræ quæsitæ ad latus figuræ datæ in se multiplicatus gignit denominatorẽ proportionis duplicatæ eorum laterum, vt ad defin. 10. lib. 5. Euclid. scripsimus. a Cum ergo figuræ similes similiterque positæ habeant etiam proportionem duplicatam laterum homologorum; fit vt denominator proportionis duplicatæ laterum prædictorum multiplicans aream cognitam producat aream quæsitam, hoc est, numerum, qui ad aream cognitam proportionem habeat duplicatam proportionis datorum laterum, denominatam scilicet à denominatore, qui ex denominatore proportionis eorum laterum in se multiplicato producitur. Verbi gratia, Trianguli A B C, cuius latus A B, 10. AC, 17. & BC, 21. area est 84. Si ergo sit aliud triangulum huic simile habens latus ipsi A B, homologum 70. qui vero A C, homologum 119. & ipsi

a 18. vel 20 sexti.



BC, homologum 147. diuidaturque latus 70. per 10. vt denominator 7. proportionis lateris 70. ad latus 10. procreetur, & quadratus numerus huius denominatoris, nimirum 49. ducatur in 84. aream trianguli ABC, producetur area 4116. posterioris trianguli. Rursus quia area trianguli æquilateri, cuius singula latera sint, 1. area est $\frac{13}{30}$. fermè, vt supra patuit, si detur aliud triangulum æquilaterum, cuius singula latera sint 70. inueniemus eius aream hoc modo. Denominator proportionis laterum est ipsummet latus 70. quod 70. diuisa per 1. faciant 70. Ducemus ergo 4900. quadratum lateris 70. in $\frac{13}{30}$. aream cognitam. Productus enim numerus $2123\frac{1}{3}$. erit area posterioris trianguli.

6 HAEC regula ita quoque proponi poterit. *Fiat vt quadratus numerus lateris figuræ cognitæ ad quadratum numerum lateris figuræ quæsitæ, ita area figuræ cognitæ ad aliud. Productus enim numerus erit area figuræ quæsitæ.* Propterea quod eadem est proportio quadrati lateris cognitæ figuræ ad quadratum lateris figuræ quæsitæ, quæ figuræ notæ ad figurã quæsitam: b quippe cum vtraque proportio sit duplicata proportionis laterum homologorum. Et quoniam quadratum lateris 1. est 1. fit, vt quotiescunque latus figuræ aream cognitam habẽtis fuerit 1. satis sit, quadratum numerũ lateris figuræ quæsitæ multiplicare in datam aream, vt quæsita area producatur: Adeo vt operæ pretium sit areas inuestigare plurimarum figurarum re-

Regula supradicta aliter proposita.

b 19. vel 20. sexti.

gula-

Falicitas prædictæ regulæ, quando latus figuræ notæ est vnitas.

gularium, quarum latera ſint 1. Ex his enim ſine magno labore areæ aliarum figurarum ſimilium elicientur, quarum latera cognita ſint. Areas decem figurarum regularium, quarum latera ſunt 1. hic ſubiecimus, vt per eas ſimilium figurarum, quarum latera vnitatem ſuperant, inueſtigari poſſint ex regula Num. 5. vel 6. præſcripta; quamuis in quadrato id neceſſarium non ſit, cum latus datum in ſe ductum producat ſuum quadratum.

	Figuræ regulares.	Areæ prædictarũ figurarum ſunt ferè hæ.
Quarum latera ſunt 1.	Trigonum	$\frac{1875000}{4330127}$ Vel $\frac{13}{30}$
	Tetragonum	1
	Pentagonum	$1\frac{8469719}{11775706}$
	Hexagonum	$2\frac{2990381}{5000000}$
	Heptagonum	$3\frac{5507221}{8677674}$
	Octogonum	$4\frac{1585127}{1913417}$
	Enneagonum	$6\frac{1243755}{6840402}$
	Decagonum	$7\frac{858089}{1236068}$
	Vndecagonum	$9\frac{517050}{1408663}$
	Duodecagonum	$11\frac{84614}{431365}$

Qua rõne beneficio laterum ſuperioris tabulæ areæ figurarum regulariũ inueniantur.

POSSVNT autem hæ fractiones ad minores ferè æquiualentes, ſi placet, reuocari, vt ſupra Num. 4. docuimus.

7 AREAE porro hæ procreatæ ſunt per regulam Num. 1. præſcriptam, inuentis prius perpendicularibus ex centris in latera cadentibus, licet in nonnullis figuris anguli contineãt ſecunda, ac tertia, præter gradus, & minuta; hoc modo. Pro heptagono, verbi gratia, ex ſuperiori tabula ſumpta eſt ſemiſſis lateris heptagoni 4338837. (quandò numerus lateris eſt impar,

adden-

addenda eſt 1. vt fiat par, ac proinde ſemiſſem habeat, quandoquidem minus eſt vero latere, vt diximus. Deinde quia, vt in tractatione ſinuum dictum eſt, ſemiſſis hæc ſinus eſt anguli oppoſiti in centro, quæſitus eſt is angulus ex tabula ſinuum (adhibita parte proportionali, quemadmodam ad finem Lemmatis 53. noſtri Aſtrolabij docuimus, vt angulus reperiretur in gradibus, minutis, ac ſecundis.) inuentusque eſt grad. 25. min. 42. ſec. 51.

Poſt hæc, *a* quia eſt, vt ſinus huius anguli inuenti, nimirum ſemiſſis ipſa 4338837. lateris ex ſuperiori tabula excerpti, ad $\frac{1}{2}$. ſemiſſem lateris, id eſt, ita ſinus complementi eiuſdem anguli inuenti, hoc eſt, ita ſinus grad. 64. min. 17. ſec. 9. (adhibita quoque parte proportionali, propter ſecunda.) nimirum 9011398. ad perpendicularem huic complemento inuenti anguli oppoſitam in triangulo rectãgulo: Inuenta eſt hæc perpendicularis $\frac{9}{8}\frac{0}{6}\frac{1}{7}\frac{1}{7}\frac{3}{6}\frac{9}{7}\frac{8}{8}$ quæ tandem ducta in $\frac{7}{2}$. ſemiſſem ambitus heptagoni produxit aream heptagoni $3\frac{1}{1}\frac{1}{7}\frac{0}{3}\frac{1}{5}\frac{4}{5}\frac{4}{3}\frac{4}{4}\frac{2}{8}$. vel in minorib⁹ numeris $3\frac{5}{8}\frac{5}{6}\frac{0}{7}\frac{7}{7}\frac{2}{6}\frac{2}{7}\frac{1}{4}$. Atque hac eadem ratione aream cuiuſcunque figuræ regularis latus habentis 1. dummodo numerus laterum maior non ſit, quam 80. reperies: Ex qua deinde aream ſimilis figuræ latus habentis maius, quam 1. per regulam Num. 5. vel 6. traditam elicies. *a 4. triang. rectil.*

EODEM tamen artificio hoc Num. 7. expoſito aream cuiuſuis figuræ regularis, etiamſi latus habeat maius, quam 1. (ſi placet) colligere licebit, quamuis non reperiatur prius area figuræ ſimilis, cuius latus ſit 1. ſi nimirum loco $\frac{1}{2}$. ſemiſſis lateris 1. accipiatur ſemiſſis lateris dati, quod maius ſit quam 1. vt perſpicuum eſt.

8 Cognita area figuræ regularis, cuius numerus laterum maior non ſit, quam 12. cognoſcetur eius latus hoc modo. Fiat vt area figuræ ſimilis latus habentis 1. ex præcedenti tabula deſumpta ad aream figuræ propoſitæ: Ita 1. quadratum lateris 1. ad aliud. Productus enim numerus erit quadratus lateris quæſiti. Radix ergo eius quadrata dabit latus quæſitum. Nam. ita eſt area ad aream, vt quadratum lateris ad quadratum lateris; *b* quod vtraque proportio ſit proportionis laterum duplicata. *Ex area cognita quo pacto latus eruatur.* *b 10. vel 20. ſexti.*

QVOD ſi area cognita ſit figuræ regularis plura latera habentis, quam 12. non plura tamen, quam 80. inuenienda primum erit area figuræ ſimilis latus habentis 1. beneficio ſuperioris tabulæ laterum, vt Num. 7. docuimus. Deinde latus exquirendum, vt hoc Num. 8. declaratum eſt. Et ſi tabula ſuperior laterum extenſa eſſet ad plura latera, inueniretur eodem modo latus figuræ plurium laterum, quam 80. ex eius area. Exempli gratia. Sit area alicuius trianguli æquilateri $15\frac{3}{5}$. Et quia area æquilateri trianguli, cuius latus eſt 1. inuenta eſt ſupra $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$. ſi fiat vt $\frac{1}{3}\frac{3}{0}$. ad aream propoſitam $15\frac{3}{5}$. ita 1. quadratum lateris 1. ad aliud, reperietur quadratum lateris quæſiti 36. cuius radix quadrata 6. dabit latus, quod quæritur.

De dimensione circuli ex Archimede.

Caput VI.



T circulum quemlibet propositum, eiusq. partes metiri possimus, necesse est probè nosse, quæ Archimedes de circuli dimensione tradidit. Non abs re ergo erit, si eius libellum de circuli dimensione acutissimum sane, & subtilissimum hic interseram, tum quia breuissimus est, quippe qui tribus dũtaxat propositionibus constet: tum ne studiosus, vt rem tam vtilem, atque apud omnes artifices peruulgatam intelligat, Archimedem ipsum adire cogatur: tum vero maxime, quod cum Archimedis scripta ob affectatam breuitatem, sint paulo obscuriora, illis nos lucem aliquam allaturos speramus. Nec dubitamus etiam, quin res hæc studioso lectori grata, ac iucunda sit futura.

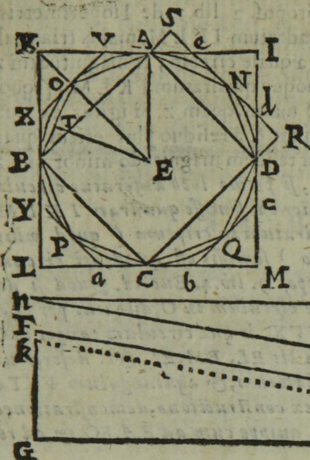
PROPOSITIO I.

AREA cuiuslibet circuli æqualis est triangulo rectangulo, cuius vnum quidem latus circa angulum rectum semidiametro circuli, alterum verò peripheriæ eiusdem circuli æquale est.

SIT circulus ABCD, cuius centrum E, semidiameter EA: sitque triangulum rectangulum FGH, angulum habens rectum G, latus verò FG, semidiametro circuli EA, & latus GH, peripheriæ eiusdem circuli æquale. Dico circulum ABCD, triangulo FGH, æqualem esse. Si enim dicatur non esse æqualis, sit primum, si fieri potest, circulus maior quam triangulum, magnitudine Z: adeo vt circulus æqualis sit triangulo, & magnitudini Z simul; propterea q. maior, quam Z. Si igitur ex circulo auferatur plus, quàm dimidium, & à residuo plus etiam, quam dimidium, & ita deinceps: *a* relinquetur tandem magnitudo minor, quam Z. *a 1. decimi.*

Hæc autem detractio continua fiet, si primo loco auferatur ex circulo quadratum inscriptum ABCD. Hoc enim cum dimidium sit quadrati IKLM, circulo circumscripti, vt in scholio propos. 9. lib. 4. Eucl. ostendimus: circulus autem ipsius quadrati IKLM, pars sit: erit quadratum inscriptũ ABCD, maius quã dimidiũ circuli. Deinde si auferantur à residuis quatuor segmentis quatuor triãgula Isoscelia AOB, BPC, CQD, DNA, ductis rectis ad media pũcta arcuũ. Hæc.n. simul maiora sunt, quã dimidium quatuor segmentorum simul, cum vnumquodque maius sit, quam di-

midium



midium segmenti, in quo existit. Completo enim rectangulo A R, a erit eius dimidium triangulum A N D: ac proinde idem triangulum maius erit quam dimidium segmenti A N D. Eademq. ratio est de alijs. Pari ratione, si à residuis octo segmentis auferantur octo alia triangula Isoscelia in illis constituta, &c. atque ita deinceps. a 41. primi.

Ponantur ergo iam octo segmenta AO,OB,BP,PC,CQ,QD,DN,NA, relicta esse minora magnitudine z. & quoniã circulus æqualis cõceditur triãgulo FGH, & magnitudini z, simul: si demantur inæqualia, nimirum ista segmenta ex circulo, & magnitudo z, ex aggregato trianguli cum z, reliqua erit figura inscripta, octogona videlicet, maior triangulo FGH, quod est absurdum; quippe cum multo minor sit. Si namque ex centro E, ad latus BO, ducatur perpendicularis ET, & in triangulo sumatur G k, ipsi E T, & recta G i, ambitui octogoni æqualis, cadet punctum k, citra F, & i, citra H, quod ET, minor sit semidiametro circuli, & ambitus octogoni minor peripheria eiusdem circuli. Igitur ducta recta k i, erit triangulum Gk i, minus triangulo FGH, pars toto. Est autem triangulum kG i, octogono æquale: quippe cum ex scholio propos. 41. lib. 1. Euclid. æquale sit rectangulo sub Gk, & semisse ipsius G i, comprehenso, quod per propositionem 2. lib. 7. de Isoperimetris octogono æquale est. Octogonũ ergo minus est triangulo FGH. Non ergo maius est: ac proinde circulus triangulo maius esse nequit.

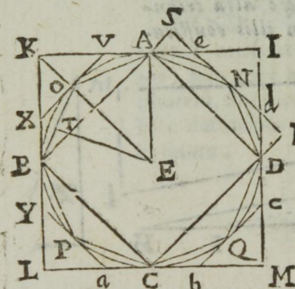
SIT deinde, si fieri potest, circulus ABCD, minor, quam triangulum FGH, magnitudine z. Circumscribatur circulo quadratum I K L M, cuius latera circulum tangant in punctis A, B, C, D. quod maius erit triangulo F G H. Cum enim eius ambitus (vt lib. 8. propos. 1. probabimus) maior sit peripheria circuli, hoc est, recta G H, & perpendicularis EA, ipsi FG, æqualis, erit triangulum rectangulum latus vnum habens æquale ipsi FG, & alterum maius latere GH, (æquale nimirum ambitui quadrati I K L M.) maius trian-

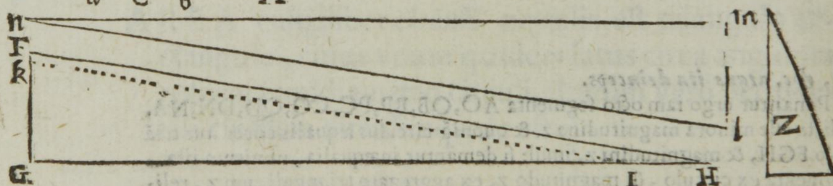
gulo FGH. Cum ergo triangulum illud, per scholium propos. 45. lib. 1. Euclid sit æquale rectangulo sub FG, & semisse ambitus quadrati IKLM, comprehenso: hoc autem rectangulum per propos. 2. lib. 7. de Isoperimetris, quadrato IKLM, æquale; erit quoque quadratum IKLM, maius triangulo FGH. Et quia triangulum FGH, ponitur æquale circulo, & magnitudini z, simul, ac proinde maius quam z, erit quoque quadratum IKLM, (quod maius esse ostendimus triangulo FGH,) maius, quam z. Si igitur ex quadrato IKLM, auferatur plus, quam dimidium, & à residuo plus etiam quam dimidium, atq. ita deinceps, a relinquetur tandem magnitudo minor, quã z.

a 1. decimi.

Hæc autem detractio continua fiet, si primo loco auferatur circulus ABCD: Hic enim maior est semisse quadrati IKLM, propterea quod quadratum inscriptum (quod minus est circulo, pars toto) semissis est quadrati circumscripti, ex scholio propos. 9. lib. 4. Euclid. Quod si ducta recta EK, secante circulum in O, ducatur per O, ad EK, perpendicularis VX, b quæ circulum tanget in O: idemque fiat, ductis rectis EL, EM, EI, &c. descriptum erit Octogonum æquilaterum, & æquiangulum VXYabcdeV, vt constat ex constructione, demonstrationeq. propos. 12. lib. 4. Eucl. quippe cum ad EA, EO, & ad re-

b 16. tertij.





liquas semidiametros octogoni inscripti ductæ sint perpendiculares ve, VX, &c. Quoniam vero vA, vO, per 2. coroll. propos. 36. lib. 3. Euclid. æquales sunt; c & est KV, maior quam vO: erit quoque KV, maior quam vA, ideoque & triangulum KvO, triãgulo vAO, maius erit; d cum sit triangulum ad triangulum, vt basis ad basem. Igitur triangulum KVO, maius erit, quam dimidium trianguli KAO; ac proinde multo maius, quam dimidium trianguli mixti KAO, cuius vnum latus est arcus AO. Eadem ratione erit KOX, maius, quam dimidium trianguli mixti KOB, cuius vnum latus est arcus OB. Auferendo ergo triangulum KVX, ex figura mistilinea KAB, in qua vnum latus est arcus AOB, ablatum erit plus quam dimidium. Subtractis igitur quatuor eiusmodi triangulis KVX, LYa, Mbc, Ide, ablatum erit plus, quã dimidium ex quatuor residuis extra circulum, & sic deinceps. Ponatur igitur iam octo triangula mixta residua, quorum bases sunt arcus AO, OB, BP, &c. minora magnitudine z. Cum ergo circulus cum z, æqualis positus sit triangulo FGH, erit circulus cum illis octo residuis, hoc est, figura Octogona VXYabcdeV, minor

c 19 primi.
d 1. sexti.

eodem

eodem triangulo FGH. quod est absurdum, cum maius sit: quippe cum perpendicularis EO, æqualis sit lateri FG, & ambitus Octogoni maior circumferentia circuli, hoc est, recta GH. Hinc enim fit, triangulum rectangulum, cuius latus FG, æquale perpendiculari EO, & alterum latus æquale ambitui Octogoni, maius videlicet, quam GH, maius esse triangulo FGH. Cũ ergo illud triangulum sit, ex scholio propos. 41. lib. 1. Eucl. æquale rectangulo sub FG, & semisse ambitus octogoni comprehenso; hoc autem rectangulum octogono æquale, ex propos. 2. lib. 7. de Isoperimetris: erit quoq. octogonum maius triangulo FGH. Non ergo minus esse potest, ac proinde circulus ABCD, minor non est triangulo FGH: Sed neq. maior est, vt demonstrauimus. Igitur æqualis est, quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

IOSEPHVS Scaliger, vel quia vim huius demonstrationis non perpendit, vel quia suæ circuli quadrandi rationi vidit esse contrariam, non est veritus Archimedem hoc loco falsitatis arguere: conaturque ostendere, non rectè ab eo demonstratum, circulum æqualem esse triangulo rectanctulo, cuius vnum latus semidiametro, & alterum circumferentiæ circuli est æquale. Nam, ait, si demonstratio Archimedis bona est, demonstrabitur eodem modo, ciculum æqualem esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro æquale est, & alterum peripheria circuli maius. Sit enim in triangulo l m n, latus quidem l m, trianguli semidiametro circuli E A, æquale, at m n, peripheria maius. Concedit ergo Scaliger, circulum non esse maiorem triangulo F G H, rectè esse ab Archimede demonstratum, hoc est, triangulum FGH, cuius latus GH, peripherię est æquale, non esse minus circulo, ac proinde neque triangulum l m n, cuius latus m n, maius est peripheria, circulo minus esse. Concedit item, rectè probatum esse, circulum non esse minorem triangulo F G H, si latus GH, peripheriæ sit æquale, hoc est, triangulum F G H, non esse maius circulo. Sed negat, ex hoc sequi, triangulum F G H, esse æquale circulo. Cur? quia, inquit, eodem modo, si basis m n, maior est peripheria, sed minor circumscripti polygoni ambitu, (hoc enim contingere, ait, nihil prohibet) polygonum erit quidem maius triangulo l m n, quod ambitus Polygoni maior sit recta m n, & semidiameter E A, rectę l m, ęqualis. Sed resectis portionibus, sequeretur, idem polygonum esse triangulo l m n, minus, quod est ineptum. Ita ne vero mi Scaliger? Non aduertis, te cum hypothesi pugnare? Nam posito latere m n, maiore, quam peripheria; quando eo peruentum erit, polygonum esse minus triangulo l m n, (si nimirum relictæ portiones minores fuerint magnitudinę z,) sequitur necessariò, ambitum polygoni minorem esse latere m n. Cum enim triangulum rectangulum, cuius altitudo semidiametro polygoni, & basis ambitui æqualis est, æquale sit, ex scholio propos. 41. lib. 1. Eucl. rectangulo sub eadẽ semidiametro, & semisse ambitus Polygoni comprehenso; hoc autem, per propos. 2. lib. 7. huius de Isoperimetris, polygono æquale: erit quoque triangulum illud minus triangulo l m n. Quare cum hęc triangula habeant æquales altitudines; a erit vt illud triangulum ad l m n, ita basis illius ad basem m n: ac proinde illa basis, hoc est, ambitus polygoni, base m n, minor erit. Non ergo po- a 1. sexti.

nere potes basem trianguli l m n, si maior est, quam peripheria circuli, minorem ambitu polygoni: In demonstratione autem Archimedis constat, ambitum polygoni maiorem esse base trianguli F G H, si G H, æqualis est peripheriæ circuli, cum maior sit, quam peripheria: ac propterea rectè conclusit Archimedes, polygonum esse maius triangulo F G H, cum tamen ex hypothesi aduersarij ostensum sit esse minus. Itaq. potuisset Archimedes ita quoque propositum colligere. Polygonum minus est triangulo F G H, propter relictas sectiones minores magnitudine Z. Ergo eius ambitus minor est base GH, (quemadmodum proxime demonstrauimus.) hoc est, peripheria circuli. quod est absurdum, cũ ambitus polygoni maior sit, quam peripheria. Quod absurdum, doctissime Scaliger, colligere non potes in tuo triangulo l m n, cum statuas basem m n, peripheria circuli maiorem. Et sane miror te, Mathematicus cum sis, negare quantitatem aliquam illi esse æqualem, qua neque maior est, neque minor. Si enim æqualis non est, erit inæqualis. Igitur vel maior vel minor, contra hypothesim, cum dicatur neque maior esse, neque minor. An non vides, non solum Archimedem, sed etiam Euclidem lib. 12. hunc argumentandi modum frequentissime vsurpare?

PROPOSITIO II.

CVIVSLIBET circuli peripheria tripla est diametri, & adhuc superat parte, quæ quidem minor est decem septuagesimis, hoc est, septima parte diametri, maior verò decem septuagesimis primis.

HAEC est Archimedis propositio 3. quam nos secundam facimus, vt doctrinæ ordo seruetur, quandoquidem sequens propositio 3. quam ipse 2. facit, hanc nostram propositionem 2. in demonstrationem adhibet.

Sit igitur circulus ABCD, cuius centrum E, diameter AB, quam ad rectos angulos secet semidiameter E c, & e c F, ad E c, perpendicularis du-
a 16. tertij. catur, *a* quæ circulum tanget in c. Ducatur latus hexagoni AD, *b* quod se-
b 15. quar. midiametro æquale erit, & arcus AD, grad. 60. Ideoque D c, grad. 30. Ducta ergo recta E D e, erit angulus c E c, tertia pars recti, cum rectus angulus contineat grad. 90. Fiat quoque angulus cEF, angulo cEe, æqualis: eruntque anguli e, F, inter se æquales, quod vterque complementum sit tertiæ partis anguli recti, ac proinde vterque duas tertias partes vnius recti compre-
c 32. primi. hendet. *c* Cũ ergo omnes tres anguli in triãgulo eEF, contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti, continebit quoq. e E F, $\frac{2}{3}$. vnius recti, ipsumq. triangulũ æquiangulũ erit, hoc est, per coroll. propos. 6. lib. 1. Euclid. æquilaterum; propterea que perpendicularis E c, basem e F, bifariam secabit, ex scholio propos. 26. lib. 1. Euclid. atque ideo E e, ipsius e c, dupla erit. Posita igitur c e, 153. erit E e, 306. Et si quadratum ipsius c e, 23409. dematur ex 93636. qua-
d 47. primi drato ipsius E e, *d* reliquum fiet quadratum ipsius E c, 70227. cuius radix est

est paulo maior, quam 265. *a* ac proinde Ec, ad c e, maiorem habebit pro- a 8. *quinti*
portionem, quam 265. ad 153.

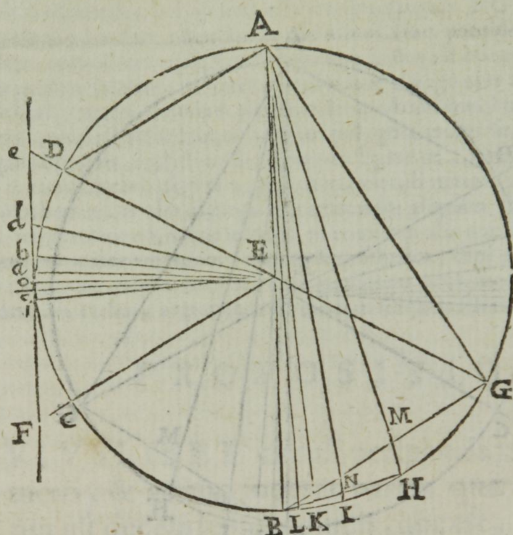
SECTO iam angulo e E c, bifariam per rectam E d; *b* erit e E, ad E c, vt e d ad d c. Et componendo e E, E c, simul ad E c, vt e c, ad d c. Et permutando e E, E c, simul ad e c, vt E c, ad c d. Quia verò e E, E c, simul maiores sunt, quam 571. (quippe cum e E, sit 306. & E c, paulo maior, quam 265.) & e c, posita est 153. *c* habebunt e E, E c, simul ad e c, maiorem proportionem, quam 571. ad 153. ideoque & proportio E c, ad c d, maior erit, quam 571. ad 153. ac proinde si c d, ponatur 153. *d* erit E c, paulo maior quam 571. Igitur quadratum ipsius E c, paulo maius erit, quam 326041. atque idcirco, cum quadratum ipsius c d, sit 23409. erit quadratum ipsius E d, *e* quod quadratis rectarum E c, c d, est æquale, paulo maius, quam 349450. eiusque radix maior, quam $591\frac{1}{8}$. quippe cum huius radicis quadratum sit tantum $349428\frac{4}{6}\frac{9}{4}$. *f* Habebit igitur E d, ad d c, maiorem proportionem, quam $591\frac{1}{8}$. ad 153.

b 3. *sexti.* c 8. *quinti.* d 10. *quinti* e 47. *primi.* f 8. *quinti.*

SECTO rursus angulo d E c, bifariam per rectam E b; *g* erit rursus vt d E, E c, simul ad d c, ita E c, ad c b. Quia verò d E, E c, simul maiores sunt, quam $1162\frac{1}{8}$. (quippe cum E d, maior sit, quam $591\frac{1}{8}$. & E c, maior, quam 571) & d c, posita est 153. *h* habebunt d E, E c, ad d c, maiorem proportionem, quam $1162\frac{1}{8}$. ad 153. ideoque & E c, ad c b, proportionem habebit maiorem, quam $1162\frac{1}{8}$. ad 153. ac proinde si ponatur c b,

g 3. *sexti.* & *componēdo permutādoque.* h 8. *quinti*

a 10. quinti 153. erit E c, maior, quam 1162$\frac{1}{8}$. *a* Igitur quadratum ipsius E c, maius erit quam 1350534$\frac{3}{6}\frac{3}{4}$. cui si addatur quadratum 23409. ipsius c b, erit



b 47. primi. quadratum ipsius E b, *b* quod quadratis rectarum E c, c b, æquale est, maius, quam 1373943$\frac{3}{6}\frac{3}{4}$. eiusque radix propterea, id est, recta E b, paulo maior, quam 1172$\frac{1}{8}$. quippè cum huius radicis quadratum sit tantum
c 8. quinti. 1373877$\frac{1}{6}\frac{}{4}$. *c* Habebit ergo E b, ad b c, maiorem proportionem, quam 1172$\frac{1}{8}$. ad 153.

d 3. sexti & componẽdo, permutãdo, quam. SECTO item angulo b E c, bifariam per rectam E a; *d* erunt b E, E c, simul ad b c, vt E c, ad c a. Quia verò b E, maior est, quam 1172$\frac{1}{8}$. & E c, maior, quam 1162$\frac{1}{8}$. erunt b E, E c, simul maiores, quam 2334$\frac{2}{8}$. vel 2334$\frac{1}{4}$. Cum ergo c b, posita sit 153. *e* habebunt b E, E c, simul ad c b,
e 8. quinti. maiorem proportionem, quam 2334$\frac{1}{4}$. ad 153. ideoque & E c, ad c a, proportionem habebit maiorem, quam 2334$\frac{1}{4}$. ad 153. ac proinde, si c a, pona
f 10. quinti tur 153. *f* erit E c, maior, quam 2334$\frac{1}{4}$. Igitur quadratum ipsius E c, maius erit, quam 5448723$\frac{}{1}\frac{1}{6}$. cui si addatur quadratum 23409. ipsius c a, erit qua
g 47. primi. dratum ipsius E a, *g* quod quadratis rectarum E c, c a, æquale est, maius quam
h 8. quinti. 5472132$\frac{}{1}\frac{1}{6}$. eiusque radix maior, quam 2339$\frac{1}{4}$. cum huius radicis qua-
i 3. sexti & componẽdo, permutãdoque. dratum sit tantum 5472090$\frac{}{1}\frac{0}{6}$. *h* Ergo E a, ad a c, maiorem proportionẽ habebit, quam 2339$\frac{1}{4}$. ad 153.

SECTO denique angulo quoque a E c, bifariam per rectam E o, *i* erunt a E, E c, simul ad a c, vt E c, ad c o. Quia vero a E, maior est, quã 2339$\frac{1}{4}$.

a & Ec,

a & E c, maior quã $2334\frac{1}{4}$. erunt aE, Ec, simul maiores, quam $4673\frac{1}{2}$. Cum
ergo c a, posita sit 153. *a* habebunt a E, Ec, simul ad c a, hoc est, E c, ad c o, a 8 *quinti.*
maiorem proportionem, quam $4673\frac{1}{2}$. ad 153. ac propterea si ponatur c o,
153. *b* erit E c, maior quam $4673\frac{1}{2}$. b 10. *quinti*
QVONIAM igitur angulus eEc, tertia pars est recti, erit eius semissis dEc,
sexta pars recti, & huius semissis b E c, $\frac{1}{12}$. recti, & huius semissis a E c,
$\frac{1}{24}$. recti, & deniq. huius semissis oEc, $\frac{1}{48}$. recti. *c* Qualiũ ergo partiũ 48. c 33. *sexti.*
est quadrãs A c, taliũ 1. erit arcus c o: & idcirco erit c o, $\frac{1}{192}$. totius circũ-
ferẽtiæ. Fiat angulus cEi, angulo cEo, æqualis; eritq. totus angulus oEi, $\frac{1}{96}$.
quatuor rectorũ: *d* ideoq. arcus o i, $\frac{1}{98}$. totius circumferentiæ. Per doctri- d 33. *sexti.*
nam ergo propos. 12. lib. 4. Euclid. recta o i, latus erit polygoni circulo cir-
cumscripti, quod lateribus æqualibus 96. continetur. Et quia ostensum est, Ec,
ad c o, maiorem habere proportionem, quã $4673\frac{1}{2}$. ad 153. *e* habebit quoq. e 15. *quinti*
diameter AB, ipsius Ec, dupla ad o i, ipsius c o, duplã maiorẽ proportionẽ, quã
$4673\frac{1}{2}$. ad 153. Si ergo o i, latus polygoni ponatur 153. *f* erit diameter AB, f 10. *quinti*
maior, quã $4673\frac{1}{2}$. Multiplicẽtur 153. per 96. vt totus ambitus polygoni pro
ducatur 14688. *g* habebitq. ambitus polygoni ad diametrũ AB, minorẽ propor g 8. *quinti*
tionẽ, quã 14688. ad $4673\frac{1}{2}$. *h* Est autẽ proportio 14688. ad $4673\frac{1}{2}$. minor, h 8. *quinti*
quam tripla sesquiseptima; quod 14688. ad $4673\frac{5}{11}$. (qui numerus paulo
minor est quam $4673\frac{1}{2}$. habeant proportionem triplam sesquiseptimam. *i*
Igitur & ambitus Polygoni ad diametrum A B, proportionem habet mi- i *schol.* 13. *quinti*
norem tripla sesquiseptima: *k* atque adeo circumferentia, quæ (vt lib. 8. K 8. *quinti*
propos. 1. probabimus) minor est ambitu polygoni, multo minorem propor
tionem tripla sesquiseptima ad diametrum habebit; ideoque circumferentia
tripla est diametri, & adhuc superat parte, quæ minor est $\frac{10}{70}$. hoc est,
$\frac{1}{7}$. diametri. Nam si contineret ter, & $\frac{1}{7}$. haberet circumferentia ad diame-
trum proportionem triplam sequiseptimam: si vero contineret ter, & plus
quam $\frac{1}{7}$. haberet maiorem proportionem, quam triplam sesquiseptimam,
cum tamen minorem habeat, vt demonstratum est.
IAM vero in eodem circulo sit latus hexagoni BG, semidiametro æqua-
le, per coroll. propos. 15. lib. 4. Eucl. iunganturque rectæ AG, EG. Et quia
triangulum EBG, est æquilaterum constans ex tribus semidiametris; *l* erit l *corol.* 3 *pro-*
angulus BEG, $\frac{2}{3}$. vnius recti, *m* ac proinde eius semissis B A G, erit $\frac{1}{3}$. *pos.* 32. *lib.* 1
vnius recti. Et quia diameter AB, dupla est semidiametri BG, si B G, po- m 20. *tertij.*
natur 780. erit AB, 1560. *n* Cum ergo quadratum ipsius AB, æquale sit qua- n 47. *primi*
dratis rectarum BG, GA; *o* quod angulus AGB, in semicirculo rectus sit: si o 31. *tertij.*
quadratum 608400. ipsius B G, dematur ex 2433600. quadrato ipsius AB,
reliquum fiet quadratum 1825200. ipsius AG, cuius radix paulo minor est,
quam 1351. cum huius quadratum 1825201. maius sit, quam 1825200. *p* p 8. *quinti.*
Igitur AG, ad GB, minorem habebit proportionem, quam 1351. ad 780.
ac proinde si BG, ponatur 780. *q* erit AG, minor, quam 1351. q 10. *quinti*
SECTO iam angulo BAG, bifariam per rectam AH, secantem BG, in
M, ductaque HB, erunt triangula BHM, AHB, æquiangula: *r* propterea quod r 21. *tertij.*
angulus HBM, æqualis est angulo HAG, ob eandem basem G H; ideoque
per constructionem angulo HAB; & angulus rectus H, in semicirculo com-
munis. *ſ* Igitur erit AH, ad HB, vt HB, ad H M. Item AB, ad BH, vt B M, ſ 4. *sexti.*
ad MH: & permutando AB, ad BM, vt B H, ad H M: ideoque erunt tres hæ
proportiones AH, ad HB; HB ad HM: & AB, ad BM, æquales. Sed vt AB, ad

BM,

a 3. ſexti. BM, ita eſt vtraque ſimul BA, A G, ad B G. a *Nam vt AG, ad A B, ita eſt GM, ad MB; & componendo vt AG, AB, ſimul ad AB, ita GM, MB, ſimul id eſt, tota GB, ad MB: Et permutando vt A G, AB, ſimul ad GB, ita A B, ad MB.* Igitur erit quoque, vt vtraque AG, A B, ſimul ad G B, ita AH, ad HB. Eſt autem AG, oſtenſa minor, quã 1351. & AB, poſita eſt 1560. & G B, 780. Igitur vtraque AG, AB, ſimul (cum minus efficiant, quam 2911.) *b* minorem habebit proportionem ad GB, quam 2911. ad 780. Quare etiam proportio AH, ad HB, minor erit, quã 2911. ad 780. ac proinde ſi HB, ponatur 780. *c* erit AH, minor, quam 2911. ideoque eius quadratum minus, quam 8473921. cui ſi addatur quadratum 608400. ipſius BH, fiet quadratũ ipſius AB, *d* (quod quadratis rectarum AH, HB, æquale eſt) minus, quam 9082321. ideoque eius radix, vel recta AB, minor, quam $3013\frac{3}{4}$. cum huius quadratum $9082689\frac{}{1}\frac{1}{6}$. maius ſit, quam 9082321. Igitur A B, ad BH, minorem proportionem habebit, quam $3013\frac{3}{4}$. ad 780. ac proinde ſi B H, ponatur 780. *e* erit AB, minor quam $3013\frac{3}{4}$.

b 8. quinti

c 10. quinti

d 47. primi.

e 10 quinti

SECTO rurſus angulo HAB, bifariam per rectam AI, ſecantem HB, in N; erunt vt prius, triangula BIN, AIB, æquiangula. Ergo vt ſupra, demonſtrabimus, vtramque BA, AH, ſimul ad HB, habere eandem proportionem quã AI, ad IB. Eſt autẽ BA, oſtenſa minor, quam $3013\frac{3}{4}$. & AH, minor, quã 2911. & ob id earum ſumma minor, quam $5924\frac{3}{4}$. ipſa autẽ HB, poſita eſt 780. *f* Igitur vtraque BA, AH, ſimul ad HB, hoc eſt, A I, ad I B, minorem habebit proportionem, quam $5924\frac{3}{4}$. ad 780. Si ergo I B, ponatur 780. *g* erit AI, minor, quam $5924\frac{3}{4}$. Et quoniam eſt, vt $5924\frac{3}{4}$. ad 780. ita 1823. ad 240. quod idem numerus fiat ex primo in quartum, qui ex ſecundo in tertium, quæ quidem proportio denominatur à $7\frac{1}{2}\frac{4}{4}\frac{3}{0}$. habebit quoque AI, ad IB, minorem proportionem, quam 1823. ad 240. ideoque poſita IB, 240. *h* erit AI, minor quam 1823. atque ob id quadratum ipſius A I, minus, quam 3323329. cui ſi addatur quadratum 57600. ipſius IB, fiet quadratum ipſius AB, *i* (quod quadratis rectarum A I, I B, æquale eſt) minus quam 3380929. eiuſque radix propterea, vel recta A B, minor quam $1838.\frac{}{1}\frac{9}{1}$. cum huius quadratum $3381252\frac{}{1}\frac{3}{2}\frac{7}{1}$. maius ſit, quam 3380929. *k* Igitur A B, ad B I, minorem proportionem habebit, quam $1838\frac{}{1}\frac{9}{1}$. ad 240. ac proinde poſita B I, 240. *l* erit A B, minor, quam $1838\frac{}{1}\frac{9}{1}$.

f 8. quinti.

g 10. quinti

h 10. quinti

i 47. primi.

k 8. quinti.

l 10 quinti

SECTO item angulo IAB, bifariam per rectam AK, oſtendemus eodem modo, vtramq. B A, A I, ſimul ad IB, habere eandem proportionem, quam A K, ad KB. Sunt autem B A, A I, ambæ ſimul minores, quam $3661\frac{}{1}\frac{9}{1}$ (quod B A, oſtenſa ſit minor, quam $1838\frac{}{1}\frac{9}{1}$. & AI, minor, quam 1823.) & IB, poſita eſt 240. *m* Vtraque ergo BA, AI, ſimul ad IB, hoc eſt, A K, ad KB, minorem habebit proportionem, quam $3661\frac{}{1}\frac{9}{1}$. ad 240. Vt autem $3661\frac{}{1}\frac{9}{1}$. ad 240. ita eſt 1007. ad 66. quod idem gignatur numerus ex primo in quartum, qui ex ſecundo in tertium, quæ quidẽ proportio denominatur à $15\frac{1}{6}\frac{7}{6}$. Igitur AK, ad KB, minorem quoque proportionem habebit, quam 1007. ad 66. ideoque poſita KB, 66. *n* erit AK, minor, quam 1007. ac propterea eius quadratum minus, quam 1014049. cui ſi addatur quadratum 4356. ipſius K B; fiet quadratum ipſius A B, *o* (quod illis duobus æquale eſt) minus quam 1018405. eiuſque radix propterea, id eſt, recta AB, minor, quam $1009\frac{1}{6}$. cum huius quadratum $1018417\frac{1}{3}\frac{3}{6}$. ſit maius, quam 1018405.

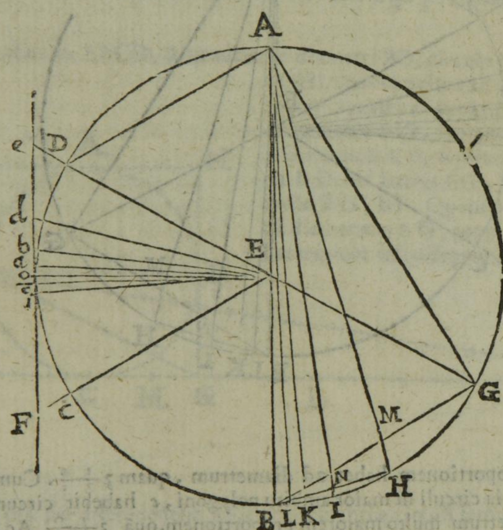
m 8. quinti.

n 10. quinti

o 47. primi

1018405. *a* Quocirca AB, ad BK, minorem proportionem habebit, quam. $1009\frac{1}{6}$. ad 66. atque idcirco posita B K, 66. *b* erit A B, minor, quam $1009\frac{1}{6}$. a 8. *quinti.* b 10. *quinti*

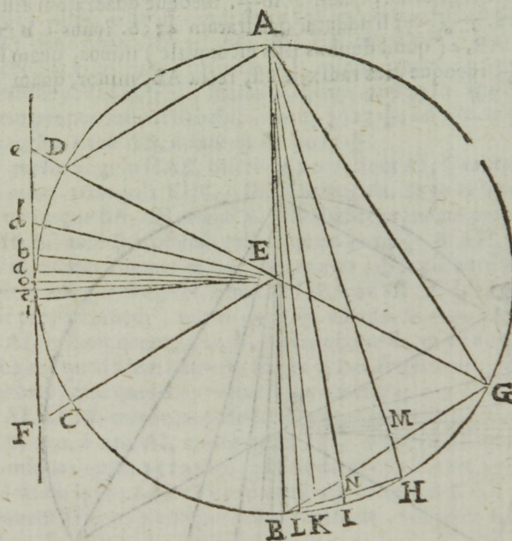
SECTO denique angulo KAB, bifariam, per rectam A L, demonstrabimus eadem ratione, vtramque B A, AK, simul ad C K, esse, vt A L, ad L B. Sunt autem ambæ B A, A K, simul minores, quam $2016\frac{1}{6}$. (quod B A, sit ostensa minor, quam $1009\frac{1}{6}$. & AK, minor, quam 1007.) & B K, posita est 66. *c* Igitur vtraque B A, AK, simul ad CK, hoc est, AL, ad L B, habebit proportionem minorem, quam $2016\frac{1}{6}$. ad 66. atque idcirco si LB, ponatur 66. *d* erit AL, minor, quam $2016\frac{1}{6}$. ideoque quadratum eius minus quam $4064928.\frac{1}{36}$. cui si addatur quadratum 4356. ipsius L B; fiet quadratum ipsius AB, *e* (quod duobus illis est æquale) minus, quam numerus $4069284\frac{1}{36}$, ideoque eius radix, id est, recta AB, minor, quam $2017\frac{1}{4}$ c 8. *quinti.* d 10. *quinti* e 47. *primi.*



cum huius quadratum $4069297\frac{9}{36}$. superet $4069284\frac{1}{36}$. *f* Quamobrem A B, ad B L, minorem proportionem habebit, quam $2017\frac{1}{4}$. ad 66 ideoque si BL, ponatur 66. *g* erit AB, minor, quam $2017\frac{1}{4}$. f 8. *quinti.*

QVONIAM igitur angulus GAH, angulo HAB, æqualis est; *h* erit arcus GH, arcui HB, æqualis: eademque ratione arcus H I, arcui I B, & I K, ipsi KB, & KL, ipsi LB, æqualis erit. Cum ergo GB, sit $\frac{1}{6}$. totius circumferentiæ, erit HB, $\frac{1}{12}$. & IB, $\frac{1}{24}$. & KB, $\frac{1}{48}$. & LB, $\frac{1}{96}$. ac proinde recta BL, latus erit Polygoni circulo inscripti, quod 96. lateribus æqualibus g 10. *quinti* h 26. *tertij.*

continetur. Quoniam vero BL, posita est 66. si 66. ducantur in 96. fiet ambitus Polygoni 6336. *a* Quapropter ambitus Polygoni ad diametrum A B,
a 8. *quinti*. maiorem proportionem habebit, quam 6336. ad $2017\frac{1}{4}$. cum diameter A B, ostensa sit minor, quam $2017\frac{1}{4}$. *b* Est autem proportio 6336. ad
b 8. *quinti* $2017\frac{1}{4}$. maior, quam tripla superdecupartiens septuagesimas primas, quod proportio 6336. ad $2017\frac{}{2}\frac{6}{2}\frac{5}{3}$. (qui numerus maior est, quam $2107\frac{1}{4}$.) sit tripla superdecupartiens septuagesimas primas. Ergo ambitus Polygoni



maiorem proportionem habet ad diametrum, quam $3\frac{1}{7}\frac{0}{1}$. Cum igitur
c 8. *quinti*. circumferentia circuli sit maior ambitu polygoni, *c* habebit circumferentia ad diametrum multo maiorem proportionem, quã $3\frac{1}{7}\frac{0}{1}$. Ac proinde circumferentia diametrum continebit ter, & insuper partem maiorem, quam $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$. Nam si contineret $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$. haberet circumferentia ad diametrum proportionem $3\frac{1}{7}\frac{0}{1}$. Si autem contineret maiorem partem, quam $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$. haberet proportionem minorem, quam $3\frac{1}{7}\frac{0}{1}$. cum tamen maiorem habere demonstratum sit. Et quoniam $\frac{1}{8}$. minor est, quam $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$. liquet ex hac secunda parte propositioni, circumferentiam continere diametrum ter, & plus, quam $\frac{1}{8}$. diametri. Cum ergo ex prima parte constet, circumferentiam continere diametrum ter, & minus, quam $\frac{1}{7}$. diametri: perspicuum est, veram proportionem circumferentiæ ad diametrum consistere inter triplam sesquiseptimam, & triplam sesquioctauam.

CO-

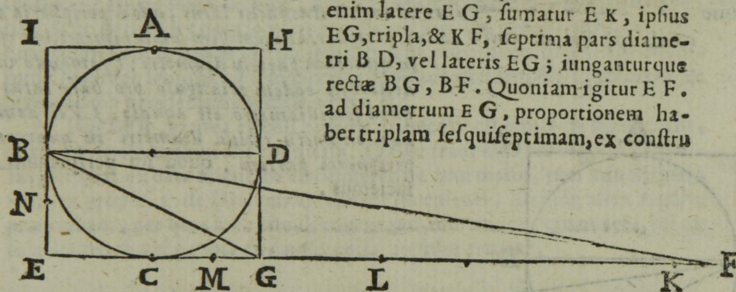
COROLLARIVM.

ITAQVE si diameter per $3\frac{1}{7}$. multiplicetur, gignetur numerus maior, quàm circumferentia: si verò multiplicetur per $3\frac{10}{71}$. procreabitur minor numerus, quam circumferentia. E contrario, si circumferentia diuidatur per $3\frac{1}{7}$. producetur numerus minor, quam diameter: si vero diuidatur per $3\frac{10}{71}$. prodibit numerus maior, quam diameter.

PROPOSITIO III.

CIRCVLVS quilibet ad quadratum diametri proportionem habet, quam 11. ad 14. proximè.

SIT circulus ABCD, & quadratum diametri BD, circulo circumscriptũ EGHI. Dico circulum ad quadratum esse, vt 11. ad 14. proximè. Producto enim latere E G, sumatur E K, ipsius EG, tripla, & K F, septima pars diametri B D, vel lateris EG; iunganturque rectæ B G, B F. Quoniam igitur E F. ad diametrum E G, proportionem habet triplam sesquiseptimam, ex constru



ctione; erit per præcedentem EF, circumferentiæ circuli fermè æqualis. Cũ ergo BE, æqualis sit semidiametro: erit per 1. propos. triangulum BEF, circulo æquale proximè: Triangulum autem BEG, quarta pars erit quadrati EH. Quia verò posito latere EG, 7. recta EF, est 22. *a* erit triangulum BEF, hoc est, circulus ABCD, ad triangulum BEG, vt 22. ad 7. Sed posito triangulo BEG, 7. quadratum E G H I, ipsius quadruplum, est 28. Igitur circulus ad quadratum, est fermè, vt 22. ad 28. hoc est, vt 11. ad 14. quod erat demonstrandum.

a 1. sexti.

DE AREA CIRCVLI, INVENTIOneque circumferentiæ ex diametro, & diametri ex circumferentia.

Caput VII.

1 QVONIAM triangulum rectangulum, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro circuli, & alterum peripheriæ eiusdem æquale est, *a* areæ circuli adæquatur: huius autem trianguli area ex ductu perpendicularis in semissem basis producitur, vt cap. 2. Num. 2. huius libri scripsimus: *Fit vt area circuli producatur ex multiplicatione semidiametri in semissem peripheriæ: (si nimirum basis illius trianguli statuatur latus, quod peripheriæ æquale est) Vel ex ductu totius peripheriæ in semissem semidiametri, hoc est, in quartam partem diametri: (sumendo videlicet in eodem triangulo pro base latus, quod semidiametro est æquale.) Vel denique ex ductu totius diametri in quartam peripheriæ partem*. quod ita perspicuum faciemus.

a 1. de Dimēs. circuli

Area circuli trib. uijs, ex cognita diametro, & circumferentia.

REPETATVR figura præcedentis propositionis, diuidaturq. E F, quæ peripheriæ circuli est æqualis, bifariam in L, ita vt E L, semiperipheriæ sit æqualis: Item EL, bifariam secetur in M, vt E M, æqualis sit quartæ parti peripheriæ. Et tandem BE, bifariam quoque secetur in N, vt EN, semissis sit semidiametri BE, hoc est, quarta pars totius diametri. *b* Et quia triangulum BEF, æquale est circulo ABCD; erit quoque rectangulum sub semidiametro BE, & semiperipheria EL, comprehensum (quod per propositionem

b 1. de Dimēs. circuli

1. lib. 7. huius, triangulo ęquale est.) eidem circulo æquale; quod est primum.

NON aliter rectangulum comprehensum sub tota peripheria EF, & EN, quarta parte diametri (quod per propos. 1. lib. 7. huius, eidē triangulo æquale est) eidem circulo erit æquale, quod est secundum.

DENIQVE quia quatuor lineæ EI, EB, EL, EM, proportionales sunt, quod tam priores duæ, quam posteriores duæ habeant proportionem duplam; *a* erit rectangulum sub EI, diametro, & EM, quarta parte peripheriæ comprehensum, rectangulo sub EB, semidiametro, & EL, semiperipheria comprehenso ęquale. Cum ergo hoc in prima parte ostensum sit æquale circulo, erit quoque illud eidem circulo æquale. quod est tertium. a 16. *sexti.*

VT fractiones interdum vitentur, ducenda erit tota diameter in totam circumferentiam. Quarta enim pars numeri producti area erit circuli: propterea quod numerus productus quadruplus est numeri producti ex semidiametro in semicircumferentiam, vt liquet.

SEQVITVR ex prima parte, aream semicirculi produci ex semidiametro in quartam partem circumferentiæ: quia nimirum producitur semissis eius, quod fit ex semidiametro in semissem peripheriæ. Item aream Quadrantis procreari ex semidiametro in octauam partem circumferentiæ: Et aream octauæ partis ex semidiametro in sextamdecimam partem circumferentiæ: Et aream sextædecimæ partis ex semidiametro in $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$. circumferentiæ, & sic deinceps: quia semper producitur semissis præcedentis producti; quemadmodum & partes circuli semisses sunt præcedentium partium: nimirum Quadrans semissis est semicirculi; & octaua pars semissis Quadrantis; & sextadecima pars semissis octauæ partis, &c. Area semicirculi, Quadrātis, octauæ partis, &c.

1 IGITVR vt area circuli reperiatur, necesse est tam eius diametrum, quam circumferentiam esse cognitam. Quare trademus hic regulas nonnullas, per quas ex data diametro circumferentia tum maior, tum minor, quam vera, ex propos. 2. de Dimensione circuli inueniatur. Deinde alias regulas præscribam, per quas area circuli tum maior, tum minor, quam vera, vel ex sola diametro, vel ex sola circumferentia cognita eruatur.

I.

Ex data diametro circuli circumferentiam vera maiorem reperire.

FIAT vt 7. ad 22. ita data diameter, verbi gratia, 28. ad aliud, procreabiturque circumferentia 88. *maior quam vera. b* Quoniam enim proportio circumferentiæ ad diametrum minor est, quam tripla sesquiseptima; proportio autem 88. ad 28. est tripla sesquiseptima, *c* eadem videlicet, quæ 22. ad 7. *c* erit numerus 88. maior, quam circumferentia circuli, cuius diameter est 28. b 2. *de Dimens. circuli.* c 10. *quinti*

I I.

EX data diametro circuli circumferentiam vera minorem elicere.

FIAT vt 71. ad 223. ita data diameter 28. ad aliud, produceturque
a 2. de Dimens. circuli. *circumferentia* $87\frac{67}{71}$. *minor quam vera. a* Quoniam enim proportio circumferentiæ ad diametrum maior eſt, quam tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas; proportio autem $87\frac{67}{71}$. ad 28. eſt tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas, nimirum eadem, quæ 223. ad 28. *b* erit circumferentia circuli, cuius diameter 28. maior, quam $87\frac{67}{71}$.
b 10. quinti

I I I.

Ex data circuli circumferentia, diametrum vera maiorem indagare.

Fiat vt 223. ad 71. ita data circumferentia, verbi gratia 88. ad aliud. Productus enim numerus $28\frac{4}{223}$. *dabit diametrum vera maiorem.* c
c 2. de Dimens. circuli. *Cum enim circumferentia ad diametrum habeat maiorem proportionem, quam triplam ſuperdecupartientem ſeptuageſimas primas, hoc eſt, maiorẽ quam 223. ad 71. habebit quoque data circumferentia 88. ad ſuam diametrum proportionem maiorem, quam ad* $28\frac{4}{223}$ d *ac proinde diameter circumferentiæ 88. minor erit, quam* $28\frac{4}{223}$.
d 10. quinti

I I I I.

Ex data circuli circumferentia diametrum inueſtigare vera minorem.

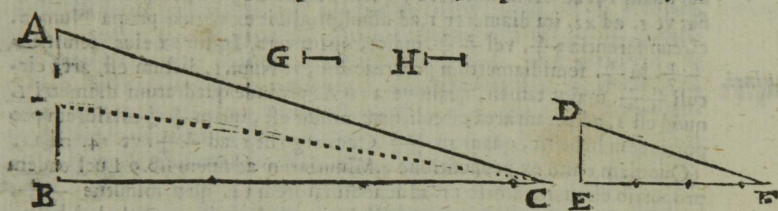
Fiat vt 22. ad 7. ita circumferentia data 88. ad aliud. Numerus enim procreatus 28. offeret diametrum vera minorem. e Cum enim circumferentia ad diametrum habeat minorem proporrionem, quam triplam ſeſquiſeptimam, hoc eſt, quam 22. ad 7. habebit quoque circumferentia data 88. ad ſuam diametrum proportionem minorem, quam ad 28. *f* atque idcirco diameter circumferentiæ 88. maior erit, quam 28.
e 2. de Dimens. circuli.
f 10. quinti

3 IAM vero vt doceamus, qua ratione area circuli vel ex ſola diametro cognita, vel ex ſola circumferentia cognoſcatur, ita vt neceſſe non ſit ex diametro circumferentiam, vel ex circumferentia diametrum inueſtigare, demonſtrandæ prius erunt ſequentes tres propoſitiones, quarum primam deinde lib. 8. propoſ. 2. ex Pappo Alexandrino aliter quoque demonſtrabimus.

PROPOSITIO I.

Circulorum diametri inter se sunt, vt circumferentiæ.

SINT diametri duorũ circulorũ AB, DE, & rectæ circũferẽtijs æquales BC, EF, quæ cũ diametris angulos rectos efficiant B, E, cõpleanturq. triangula ABC, DEF. Dico ita esse diametrũ AB, ad diametrũ DE, vt est circũferentia BC, ad circunferentiã EF. Diametris.n. AB, DE, inueniatur tertia proportionalis G: Et tribus rectis BC, EF, DE, quarta proportionales H. Et quia continuè proportionales sunt AB, DE, G; *a* erit quadratum ex AB, ad quadratum ex DE, vt AB, ad G. *b* Sed vt quadratum ex AB, ad quadratum ex D E, ita *a coroll. 20 sexti.* *b 2. duodec.*



est circulus diametri AB, ad circulum diametri DE. *c* Et vt circulus ad circulum, ita est triangulum A B C, ad triangulum DEF, quòd hæc triangula circulorum sint dupla. (Nam diuisa diametro AB, bifariam in I, ductaque recta I C, *d* erit triangulum I B C, circulo æquale: ac proinde cum *e* triangula AIC, IBC, æqualia sint; erit triangulum A B C, duplum trianguli IBC, hoc est, circuli, cuius diameter AB. Eademque ratione triangulum D E F, duplum erit circuli, cuius diameter D E.) Igitur erit quoque triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt AB, ad G. At vt triangulũ A B C, ad triangulum DEF, ita est AB, ad H. quod vtraque proportio composita sit ex ijsdem proportionibus. (*f* Nam proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, composita est ex proportione basis A B, ad basem D E, & ex proportione altitudinis BC, ad altitudinem EF, hoc est, ex proportione DE, ad H, quæ ex constructione eadem est, quæ B C, ad E F. Proportio autem A B, ad H, cõponitur quoq; ex proportionibus AB, ad DE, & DE, ad H, ex defin.) Igitur erit, vt AB, ad G, ita AB, ad H. *g* ideoq. G, & H, æquales erũt: *h* ac proinde erit DE, ad G, vt DE, ad H. Est autem per constructionem A B, diameter ad diametrum DE, vt DE, ad G, hoc est, vt DE, ad H. Et vt DE, ad H, ita per constructionem, circumferentia B C, ad circumferentiam E F. Igitur erit quoque diameter AB, ad diametrum DE, vt circumferentia B C, ad circumferentiam EF. quod erat demonstrandum.

c 15 quinti *d 1. de Dimens. circuli.* *e 38 primi.* *f schol. 23. sexti.* *g 9. quinti.* *h 7. quinti.*

PROPOSITIO II.

PROPORTIO quadrati ex diametro cuiuslibet cir-

culi descripti ad circuli aream maior est, quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223.

[a 2. duodec.] *a* QVONIAM enim quadratum diametri cuiusuis circuli ad quadratum diametri alterius circuli est, vt circulus ad circulum: erit permutando quadratum diametri ad circulum eiusdem diametri, vt quadratum alterius diametri ad circulum eiusdem diametri. Posita autem diametro alicuius circuli 1. proportio quadrati ipsius ad circulū maior est, quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223, Igitur proportio quadrati diametri cuiusuis alterius circuli ad ipsum circulum, maior quoque erit quam 14. ad 11. minor autem, quàm 284. ad 223.

QVOD autem proportio quadrati diametri 1. ad suum circulum maior sit, quam 14. ad 11. minor vero, quam 284. ad 223. ita perspicuum fiet. Si fiat vt 7. ad 22. ita diameter 1. ad aliud, prodibit ex regula prima Num. 2. circumferentia $3\frac{1}{7}$. vel $\frac{22}{7}$. maior, quam vera. Igitur ex eius semisse $\frac{11}{7}$. in $\frac{1}{2}$. semidiametrum procreabitur, vt Num. 1. dictum est, area circuli $\frac{11}{14}$. maior tamen, quam vera: *b* Ac proinde quadratum diametri 1.
[b 8. quinti.] quod est 1. ad ueram areā circuli, quæ minor est, quam $\frac{11}{14}$. maiorem proportionem habebit, quam ad $\frac{11}{14}$. Cum ergo sit 1. ad $\frac{11}{14}$. vt 14. ad 11. (Quoniam enim ex propositione 2. Minutiarum ad finem lib. 9 Eucl eadem proportio est numeratoris 11. ad denominatorem 14. quæ minutiæ $\frac{11}{14}$. ad suum integrum 1. erit conuertendo, vt 14. ad 11. ita 1. ad $\frac{11}{14}$.) habebit quoque quadratum diametri 1. ad aream circuli veram, minorem proportionem, quam 14. ad 11. quod est propositum. Constat ergo prima propositionis pars.

RVRSVS si fiat, vt 71. ad 223. ita diameter 1. ad aliud, reperietur per regulam 2. Num. 2. circumferentia circuli $3\frac{10}{71}$. vel $\frac{223}{71}$. minor, quam vera. Igitur, vt Num. 1. dictum est, ex eius semisse $\frac{223}{142}$. in $\frac{1}{2}$. semidia-
[c 8. quinti.] metrum producetur area circuli $\frac{223}{284}$. maior tamen, quam vera: *c* Ac proinde quadratum diametri 1. quod est 1. ad veram circuli aream, quæ maior est, quam $\frac{223}{284}$. minorem habebit proportionem, quam ad $\frac{223}{284}$. Cum ergo sit 1. ad $\frac{223}{284}$. vt 284. ad 223. (Nam quia ex propos. 2. Minutiarum, eadem est proportio Numeratoris 223. ad denominatorem 284. quæ minutiæ $\frac{223}{284}$. ad suum integrum 1. erit conuertendo, vt 284. ad 223. ita 1. ad $\frac{223}{284}$.) habebit quoque quadratum diametri 1. ad aream veram circuli minorem proportionem, quam 284. ad 223. quod est propositum. Constat ergo secunda etiam pars propositionis.

PROPOSITIO III.

PROPORTIO quadrati à circumferentia circuli cuiusuis descripti ad circuli aream maior est, quam 892. ad 71. minor autem, quam 88. ad 7.

[d 1. huius Num. 3.] *d* QVONIAM enim circumferentia cuiusuis circuli ad circumferentiam

tiam alterius circuli est, vt diameter ad diametrū: *a* erit quoq. quadratū circumferentiæ ad quadratum circūferentiæ, vt quadratū diametri, ad quadratū diametri. *b* Sed vt quadratū diametri ad quadratū diametri, ita est circulus ad circulum. Igitur erit quadratum quoque circumferentiæ ad quadratū circumferentiæ; vt circulus ad circulum: Et permutando quadratum circumferentiæ, ad suum circulus vt quadratum alterius circumferentiæ ad suum circulum. Posita autem circumferentia alicuius circuli 1. proportio quadrati circumferentiæ illius circuli ad circulum maior est, quam 892. ad 71. minor verò, quàm 88. ad 7. Igitur & proportio quadrati circumferentiæ cuiuslibet alterius circuli ad ipsum circulum maior erit, quam 892. ad 71. minor autem, quam 88. ad 7. a 22. *sexti.* b 2. *duodec.*

QVOD autem proportio quadrati ex circumferentia 1. descripti, ad suum circulum maior sit, quam 892. ad 71. minor verò, quam 88. ad 7. sic demonstrabimus. Quoniam si fiat, vt 223. ad 71. ita data circumferetia 1. ad aliud, diameter procreatur $\frac{}{2}\frac{7}{2}\frac{1}{3}$. maior, quam vera, vt ex 3. regula Num. 2. constat. fit vt $\frac{1}{2}$. semissis circumferentiæ ducta in $\frac{}{4}\frac{7}{4}\frac{1}{6}$. semissem diametri inuentæ producat aream circuli $\frac{}{8}\frac{7}{9}\frac{1}{2}$. vera maiorem, vt Num. 1. dictum est. *c* Igitur quadratum circumferentiæ 1. quod est 1. ad ueram aream circuli, quæ minor est, quam $\frac{}{8}\frac{7}{9}\frac{1}{2}$. maiorem proportionem habebit, quam ad $\frac{}{8}\frac{7}{9}\frac{1}{2}$. Vt autē 1. ad $\frac{}{8}\frac{7}{9}\frac{1}{2}$. ita [illegible] ex propos. 2. minutiarum, & conuertendo, 892. ad 71. Igitur & quadr[illegible]m circumferentiæ 1. ad veram circuli aream maiorem proportionem habebit, quam 892. ad 71. quod est propositum. Vera ergo est prior propositionis pars. c 8. *quinti.*

RVRSVS, quia si fiat, vt 22. ad 7. ita data circumferentia 1. ad aliud, diameter producitur $\frac{}{2}\frac{7}{2}$. minor quam vera: fit vt $\frac{1}{2}$. semissis circumferentiæ ducta in $\frac{}{4}\frac{7}{4}$. semissem diametri inuentæ producat aream circuli $\frac{}{8}\frac{7}{8}$. vera minorem, vt ex ijs, constat, quæ Num. 1. diximus. *d* Igitur quadratum circumferentiæ 1. quod est 1. ad aream veram circuli, quæ maior est, quam $\frac{}{8}\frac{7}{8}$. minorem habebit proportione, quam ad $\frac{}{8}\frac{7}{8}$. Vt autem 1. ad $\frac{}{8}\frac{7}{8}$. ita est, ex propositione 2. Minutiarum, & conuertendo, 88. ad 7. Ergo etiam quadratum circumferentiæ 1. ad aream circuli minorem proportionem habebit, quam 88. ad 7, quod est propositum. Vera igitur etiā est posterior pars propositionis. d 8. *quinti*

4 HIS ita demonstratis, sequuntur iam quatuor regulæ, per quas areā circuli propositi siue maiorem, siue minorem vera, vel ex sola diametro, vel ex sola circumferentia cognita conijcere licebit.

I.

EX diametro aream circuli vera maiorem inuestigare.

Fiat vt 14. ad 11. ita quadratum data diametri ad aliud. Productus enim numerus dabit aream circuli vera maiorem. *e* Cum enim maior sit proportio quadrati diametri ad aream circuli, quam 14. ad 11. Sit autē quadratum diametri datæ ad aream inuentam, vt 14. ad 11. erit quoque maior e 2. *Num.* 3.

proportio quadrati diametri datæ ad veram aream circuli, quam ad aream
a 10. quinti inuentam. *a* Ac proinde vera circuli area erit minor, quam inuenta: hoc est, area inuenta maior erit, quam vera.

I I.

EX diametro aream circuli vera minorem inuestigare.

Fiat vt 284. ad 223. ita quadratum datę diametri ad aliud. Numerus enim procreatus aream circuli vera minorem offeret. b Cum enim minor
b 2. Nu. 3. sit proportio quadrati diametri datæ ad aream circuli, quã 284. ad 223. sit autem quadratum diametri datæ ad aream inuentam, vt 284. ad 223. erit quoque minor proportio quadrati diametri datæ ad veram aream circuli,
c 10. quinti quam ad aream inuentam: *c* Atque idcirco vera area circuli maior erit, quam inuenta, hoc est, inuenta area erit minor, quam vera.

I I I.

Ex circumferentia aream circuli vera maiorem colligere.

Fiat vt 892. ad 71. ita quadratum datæ circumferentiæ ad aliud. Procreatus namque numerus aream circuli vera maiorem indicabit. d Cum,
d 3. Nu. 3. enim maior sit proportio quadrati circumferentiæ ad aream circuli, quam 892. ad 71. Sit autem quadratum datæ circumferentiæ ad aream inuentam vt 892. ad 71. erit quoque maior proportio quadrati datæ circumferentiæ ad veram aream circuli, quã ad aream inuentam: *e* ideoque vera circuli area
e 10 quinti minor erit, quam inuenta; hoc est, inuenta area maior erit, quam vera.

I I I I.

Ex circumferentia aream circuli vera minorem concludere.

Fiat vt 88. ad 7. ita quadratum circumferentiæ datæ ad aliud. Numerus namque, qui gignitur, erit area circuli minor, quam vera. f Cum
f 3. Nu. 3. enim minor sit proportio quadrati circumferentiæ datæ ad aream circuli, quam 88. ad 7. sit autem quadratum circumferentiæ datæ ad aream inuentam, vt 88. ad 7. erit quoque minor proportio quadrati datæ circumferen-
g 10. quinti tię ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam: *g* Ac proinde area circuli vera erit maior, quam inuenta: hoc est, area inuenta minor erit, quam vera.

5 OMNES hæ viæ, quibus area circuli inquiritur, pendent ex proportione circumferentiæ circuli ad diametrum, quam Archimedes inuenit esse

esse quidem minorem tripla sesquiseptima, maiorem vero tripla superdecupartiente septuagesimas primas: ac proinde cum hæ proportiones accuratæ non sint, necesse est, aream inuentam vel veram magnitudinem circuli superare, vel ab ea deficere, vt ex superioribus regulis liquet. Et quamuis differentia inter veram aream, atque inuentam in paruis circulis perexigua sit, in magnis tamen circulis negligenda non videtur. Quamobrem qui magis accuratam circuli aream desiderat, assumat proportionem diametri ad circumferentiam vero propinquiorem, quam posteriores Geometræ, præsertim Ludolphus à Collen, & Christophorus Gruenbergerus inuenerunt, vt sequitur.

Accuratior proportio diametri ad circumferētiam.

Diameter	Circumferentia maior quam vera
100000000000000000000.	314159265358979323847.

Diameter	Circumferentia minor quam vera
100000000000000000000.	314159265358979323846.

Ita vt proportio circūferētiæ ad diametrū maior, quā vera, denominetur ab hoc primo numero, quæ minor est, quam tripla sesquiseptima. Proportio vero minor, quā vera, denominetur ab hoc secūdo numero quæ maior est, quā tripla superdecupartiens septuagesimasprimas: qui denominatores habentur, si vtraque circumferentia per diametrum diuidatur.

$$3\frac{14159265358979323847}{100000000000000000000}.$$

$$3\frac{14159265358979323846}{100000000000000000000}.$$

ITAQVE si fiat, vt diameter prædicta ad circumferentiam vera maiorem, ita diameter alicuius circuli data ad aliud, reperietur circumferentia maior, quam vera, minus tamen differens à vera, quam illa Archimedis, quæ Num. 2. ex regula 1. inuenta fuit. Si autem fiat, vt eadem diameter prædicta ad circumferentiam vera minorem, ita data diameter alicuius circuli ad aliud, reperietur circumferentia minor, quam vera, magis tamen ad verā accedens, quā illa Archimedis, quę Nu. 2. ex reg. 2. inuenitur. E contrario verò, si fiat vt prædicta circumferentia minor, quam vera, ad diametrū, ita circumferentia alicuius circuli data ad aliud, prodibit diameter maior quam vera: Si autem fiat, vt circumferentia prædicta maior, quam vera, ad diametrum, ita circumferentia alicuius circuli data ad aliud, proueniet diameter minor, quam vera. Vtraque tamen diameter inuenta magis ad veram accedet, quam illa Archimedis, quæ Num. 2. per reg. 3, & 4. inuenta fuit.

Accuratior inuentio circumferētiæ ex data diametro: & diametri ex data circumferentia.

INVENTA circumferentia ex diametro, vel diametro ex circumferentia, reperietur area circuli, vt Num. 1. traditum est: si nimirum semidiameter in semicircumferentiam ducatur: vel tota circumferentia in semissem semidiametri: vel denique tota diameter in quartam partem circumferentiæ. quæ quidem area minus à vera distabit, quā illa, quæ ex proportione Ar

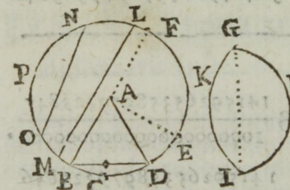
Accuratior inuētio areæ circuli.

chimedis inuenitur. Sed quia difficilius est per magnos numeros calculum instituere, quam per minores, vsus artificum obtinuit, vt proportio Archimedis ad calculũ adhibeatur. Quando tamẽ desideratur accuratior calculus, vtendum erit posteriori hac proportione Ludolphi, præsertim in maioribus circulis.

DE AREA SEGMENTORVM CIRCVLI.

Caput VIII.

1 IT primum propositus sector circuli ABCD, comprehensus duabus semidiametris AB, A D, & arcu BCD. Huius areã ita explorabimus. Si tã semidiameter AB, nota sit, nimirũ palmorũ 7. quã arcus B C D, palmorum videlicet $3\frac{2}{3}$. ducatur semidiametrum 7. in $1\frac{5}{6}$. id est, in semissem arcus, Productus enim numerus $12\frac{5}{6}$. palm. erit area sectoris ABCD, vt demonstrabimus. Si autem neque semidiameter AB, neque peripheria BCD, data sit, mensuranda erit semidiameter aliqua mensura nota, & secundum eandem mensuram inuenienda circumferentia circuli per regulas antecedentis cap. nec non recta BD. Deinde fiat, vt A B, nota in assumpta mensura ad sinum totum 100000. ita BD, nota in eadem mensura assumpta ad aliud. Numerus enim procreatus dabit



rectamBD, cognitam in partibus sinus totius. Huius autem medietas sinus erit semissis arcus BD:ac proinde ex tabula sinuum semissis B C, in gradibus nota erit, ideoque totus arcus BD, non ignorabitur. Et quia tota circuli circumferentia nota facta est in assumpta mensura: si fiat vt grad. 360. ad totã circumferentia in assumpta mensura cognitam, ita arcus BD, in gradibus cognitus ad aliud, cognoscetur idem arcus BD, in mensura assumpta. Quare, vt prius, area sectoris ABCD, reperietur. Possent quoque gradus in arcu BD, contenti inuestigari beneficio quadrãtis alicuius in gradus diuisi, adhibita doctrina cap. 2. lib. 1. Num. 10 tradita, vt minuta etiam cognoscantur, quando in arcu BD, vltra gradus aliqua particula superest.

AREAM porro sectoris produci ex semidiametro in semissem arcus sectoris, sic demonstro. Sit quadrans BE, & semicirculus B E F. *a* Et quoniam est, vt arcus BD, ad quadrantem B E, ita sector ABCD, ad sectorem ABDE: erit quoque ex scholio propos. 22. lib. 5. Euclid. vt arcus B D, ad quadruplum quadrantis BE, hoc est, ad totam circumferentiam, ita sector ABCD, ad quadruplum sectoris A B D E, hoc est, ad totum circulum. *b* Vt autem arcus BD, ad totam circumferentiam, ita est BC, semissis arcus BD, ad BEF, semissem totius circumferentiæ. Igitur erit quoque vt BC, ad BEF, ita sector A B C D, ad totum circulum. *c* Sed vt BC, ad BE F, ita est rectangulũ sub AB, BC, ad rectangulũ sub AB, BEF. Ergo erit quoq. sector A B C D, ad totum circulũ, vt rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub AB, BEF. Cum ergo vt cap. 7. Num. 1. tradidimus, circulus æqualis sit rectangulo sub

a 33. *sexti.*
b 15. *quin.*
c 1. *sexti.*
d 14. *quinti*

AB,

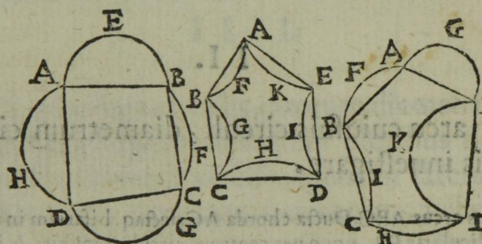
A B, B E F, *d* erit quoque ſector A B C D, rectangulo ſub A B, B C, æqualis. quod erat demonſtrandum.

EADEM ratione procreabitur ſector ABFDA, ex ſemidiametro AB, in ſemiſſem arcus BFD.

2 SIT deinde ſegmentum BCD. *a* Inuento centro A, arcus B C D, & cognitis per aliquam menſuram lateribus trianguli ABD, & arcu B C D, in eadem menſura, vt Num. 1. diximus, inueſtigetur tam area ſectoris A B-C D, quam trianguli ABD. Hæc enim detracta ex illa relinquet aream ſegmenti propoſiti BCD. *a 25. tertij*

3 SIT præterea figura lenticularis duobus arcubus GHI, GKI. contenta. Ducta recta G I, inquiratur, vt Num. 2. docuimus, vtriuſque ſegmenti GHI, GKI, area. Summa enim ex duabus hiſce areis conflata, erit area propoſitæ figuræ GHIK. Quod ſi ſegmenta GHI, GKI, ſint æqualia, ſatis erit vnius aream inueſtigare. Hæc namque duplicata dabit propoſitæ figuræ GHIK, aream.

4 NON aliter metiemur figuras ex variis circulorum ſegmentis coagmentatas, ſiue omnes circumferentiæ extrorſus vergant, ſiue introrſum, ſiue partim introrſum, & partim extrorſum. Vt in tribus his figuris, ſi arcubus ſubtendantur chordæ, metiemur in prima quadrilaterum ABCD, vt cap. 1. vel 3. docuimus: & ſegmenta AEB, BFC, CGD, DHA, vt hoc cap. Num. 2. traditum eſt. Si enim hæc ſegmenta quadrilatero adijciantur, quod omnia



extrorſum tendant, conflabitur area figuræ AEBFCGDH, ex quatuor arcubus compoſitæ.

IN ſecunda autem metiemur pentagonum A B C D E, per ea, quæ cap. 4. ſcripta ſunt: Ex quo ſi dememus quinque ſegmenta introrſum vergentia, quæ quidem ex ijs, quæ Num. 2. huius cap. ſcripſimus, cognoſcentur, reliqua fiet area figuræ AFBGCHDIEK, ex quinque arcubus conflatæ.

IN tertia denique pentagono ABCDE, adijciemus tria ſegmenta, AFB, AGE, C H D, extrorſum vergentia, & ex compoſito numero duo ſegmenta B I C, D K E, introrſum vergentia tollemus, vt area relinquatur figuræ AFBICHDKEG, ex quinque arcubus compoſitæ. Atque hoc modo agrum quantumuis irregularem metiri licebit.

5 SIT denique in prima figura huius cap. ſegmentum circuli LMON, comprehenſum duabus rectis LM, NO, & duobus arcubus LN, MO. Exploretur, vt Num. 2. declaratum eſt, area vtriuſque ſegmenti PLM, PNO. Minor enim area PNO detracta ex maiori PLM, reliquam faciet aream propoſiti ſegmenti LMON.

6 VT

6 VT quartus hic liber concludatur, lubet hic appendicis loco regulas quasdam alias à nostro instituto non alienas subiungere.

I.

DATA circuli area, circumferentiam, ac diametrum cognoscere.

FIAT vt 7. ad 88. ita data area ad aliud. Productus enim numerus erit quadratum circumferentiæ vero maius, vt ex 4. reg. Num. 4. cap. 7. liquet. Radix ergo quadrata numeri producti dabit crrcumferentiam vera maiorem. Quod si fiat, vt 71. ad 892. ita data area ad aliud, gignetur quadratum circumferentiæ vero minus, vt constat ex 3. reg. Num. 4. cap. 7. Ac proinde eius radix quadrata circumferentiam vera minorem indicabit.

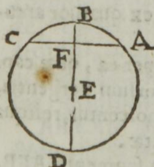
FIAT rursus, vt 223. ad 284. ita area proposita ad aliud. Procreatus namque numerus erit quadratum diametri vero maius, vt ex 2. reg. Num. 4. cap. 7. perspicuum est. Radix ergo quadrata numeri producti diametrum exhibebit vera maiorem. Quod si fiat, vt 11. ad 14. ita area data ad aliud, reperietur quadratum diametri vero minus, vt ex reg. 1. Num. 4. cap. 7. colligitur. Ac proinde radix eius quadrata diametrum offeret vera minorem.

II.

DATO arcu cuiusuis circuli, diametrum circuli in numeris inuestigare.

SIT datus arcus ABC. Ducta chorda AC, sectaq. bifariam in F, ducatur per F, perpẽdicularis FB, *a* quę per centrum circuli transibit, *b* ideoque rectangulum sub CF, AF, hoc est, quadratum ex AF, æquale erit rectangulo sub BF, & reliqua portione diametri. Si igitur AF, FB, per aliquam mensuram fiant notæ, & quadratus numerus rectæ AF, diuidatur per FB, prodibit reliqua portio diametri FD, quæ addita perpendiculari FB, conficiet totam diametrum BD, notam in eadem mensura, in qua AF, FB, cognitæ sunt.

a corol. 1. tertij.
b 35. tertij.



GEOMETRICE eadem portio FD, reperietur, si duabus FB, AF, inueniatur tertia proportionalis FD: propterea quod ex scholio propos. 13. lib. 6. Eucl. AF, media proportionalis est inter diametri segmenta.

III.

DATIS diametris duorum circulorum, vel circum-

cumferentijs: Aut duobus lateribus homologis duarum figurarum similium, similiterque positarum: quam proportionem circuli, vel figuræ inter se habeant, cognoscere.

QVONIAM circuli, & figuræ similes, similiterque positæ, habent duplicatam proportionem diametrorum, vel circumferentiarum, & laterum homologorum: si maior diameter, vel circumferentia per minorem, & maius latus homologum per minus diuidatur, prodibit denominator proportionis, quam maior diameter, circumferentiaue ad minorem, vel maius latus homologum ad minus habet. Si igitur hic denominator in se ducatur, producetur denominator duplicatæ proportionis, quam videlicet circulus, vel figura ad minorem habet. Vt si diameter vnius circuli sit 56. & circumferentia 176. Alterius autem circuli diametrum 14. & circumferentia 44. Diuisis 56. per 14. vel 176. per 44. fit Quotiens 4. qui ductus in se producit 16. denominatorem proportionis maioris circuli ad minorem. Eandemque proportionem habebit figura ad minorem similem, similiterque positam, si latera homologa sint 56. & 14. vel 176. & 44.

IIII.

DATIS pluribus circulis, quorum diametri, vel circumferentiæ cognitæ sint: Item pluribus figuris similibus similiterque positis, quarum latera homologa sint nota: Inuenire diametrum, vel circumferentiam, cuius circulus omnibus circulis propositis æqualis sit. Item latus reperire, cuius figura similis, similiterque posita æqualis sit omnibus propositis figuris.

MVLTIPLICENTVR diametri, vel circumferentiæ, aut latera homologa in se, & numeri producti in vnam summam colligantur. Radix enim quadrata huius summæ erit diameter, circumferentiaue, aut latus homologum quæsitum. Verbi gratia, si sint quatuor diametri, circumferentiæue circulorum, aut latera homologa similium figurarum, similiterque positarum, 84.3.4.12. atq. in se multiplicentur, gignētur numeri 7056.9.16.144. quorum summa 7225. Radix ergo quadrata huius summæ 85. erit diameter, circumferentiaue circuli, aut latus homologum, quod quæritur: ita vt circulus, cuius diameter, vel circumferentia est 85. aut figura supra rectam 85. similis, similiterque posita figuris datis, æqualis sit quatuor circulis

culis, aut figuris propositis. Nam cum quadratum 7225. radicis 85. æquale sit quatuor quadratis 7056.9.16.144. radicum 84. 3.4.12. *a* Circuli autem eandem habeant proportioné, quã quadrata diametrorum: ac proinde quã quadrata circumferentiarum; quod circumferentiæ diametris sint proportionales: Item figuræ similes, similiterque positæ inter se sint, vt quadrata laterum homologorum, *b* propterea quod tam quadrata, quam figuræ habent duplicatam proportionem laterum: erit quoque tam circulus, cuius diameter, circumferentiaue 85. æqualis quatuor circulis, quorum diametri, circumferentiæue 84. 3.4.12. quam figura supra latus 85. similis similiterque posita, quatuor figuris, quarum latera 84. 3. 4. 12. æqualis, quod est propositum.

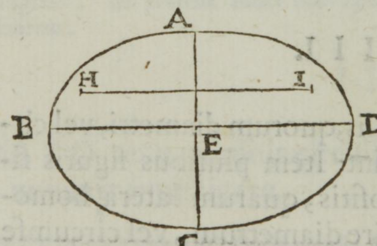
a 2. duodec.

b 20. sexti.

V.

Aream propositæ Ellipsis indagare.

LVBET denique librum hunc quartum duobus problematibus terminare, quæ ab Archimede Syracusano acutissime inuenta sunt, ac demonstrata. Vnũ est de area Ellipsis; alterum de area Parabolæ. Sit ergo Ellipsis ABCD, cuius maior diameter B D, & minor AC, secans maiorem in E, bifariam. *c* Inueniatur H I, media proportionalis inter B D, & AC: & circuli circa diametrum H I, descripti area inquiratur, per ea, quæ cap. 7. huius lib. scripsimus. Dico hanc aream areæ Ellipsis ABCD, esse æqualem. *d* Quoniam enim est, vt B D, ad A C. ita quadratum ex B D, ad quadratum ex H I. *e* Vt autem quadratum ex BD, ad quadratũ ex HI, ita est circulus diametri BD, ad circulum diametri H I. Igitur erit quoque, vt BD, ad AC, ita circulus diametri B D, ad circulum diametri HI. Cum ergo per propositionem 5. Archimedis de Conoidibus, & sphæroidibus, sit quoque, vt maior diameter B D, ad minorem A C, ita circulus diametri BD, ad Ellipsim ABCD; *f* habebit circulus diametri B D, eandem proportionem ad circulum diametri HI, & ad Ellipsim A B C D. *g* Ideoque area circuli diametri HI, areæ ellipsis ABCD, æqualis erit. quod erat demonstrandum.



c 13. sexti.

d corol. 20. sexti.

e 2. duodec.

f 11. quinti

g 9. quinti.

VI.

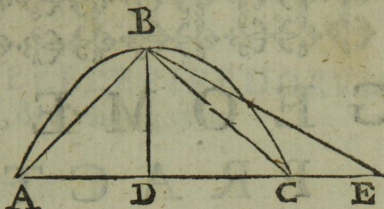
AREAM propositæ parabolæ inuestigare.

SIT data parabola ABC, cuius basis AC, & axis BD, diuidens basem bifariam in D, & vertex B. Inscribatur parabolæ triangulum ABC, eandem habens basem, ac verticem cum parabola. Producta autem base AC, sumatur C E,

tur CE, tertia pars ipsius AC: ita vt AE, ipsius AC, sit sesquitertia. Iungaturque recta EB. Inquiratur denique per cap. 2. huius lib. areæ trianguli ABE. quam dico esse æqualem areæ parabolæ ABC. *a* Quoniam enim est, vt AE, ad AC, ita triangulum ABE, ad triangulum ABC: Est autem AE, ipsius AC, sesquitertia, ex constructione; erit quoque triangulum ABE, trianguli ABC, sesquitertium. Cum ergo, vt Archimedes in lib. de Quadratura paraboles demonstrauit, parabola quoque ABC, trianguli ABC, sit sesquitertia: *b* habebunt triangulum ABE, & parabola ABC, ad triangulum ABC, eandem proportionem. *c* Ideoque area trianguli ABE, areæ paraboles ABC, æqualis erit. quod erat ostendendum.

a 1. *sexti.*

b 11. *quinti.*
c 9. *quinti.*



FINIS LIBRI QVARTI.



GEOMETRIAE PRACTICAE LIBER QVINTVS.



AREAS

Solidorum, corporumue perſcrutans.



VPEREST tertia magnitudinis ſpecies, quæ corpora, ſolidaue complectitur. Et quia initio lib. 4. diximus, corpora metienda eſſe per corpuſcula cubica: ita vt quando dicitur corpus aliquod continere 1000. palmos, intelligendum ſit, 1000. cubos æquales, quorum ſinguli latera habent vni palmo æqualia, aream illius corporis explere: docendum iam erit hoc lib. qua ratione cuiuſcunque corporis area inueſtigetur, hoc eſt, numerus corpuſculorum cubicorum in eo contentorum. Præcipua autem corpora, de quibus acturi ſumus, ſunt Parallelepipeda, Priſmata, cubi, Pyramides, Fruſta pyramidum, Cylindri, Coni, Fruſta Conorum, ſphæræ, ſphærarum portiones, quinque corpora regularia, videlicet Tetraedrum, Hexaedrum ſiue cubus, Octaedrum, Icoſaedrum,

Dode-

Dodecaedrum, quæ omnia lib. 11. ab Euclid. definita sunt. His adiungemus nonnulla corpora vacua, & alia quædam irregularia.

DE AREA PARALLELEPIPEDORVM, Prismatum, & Cylindrorum.

Caput I.



ARALLELEPIPEDVM *a* est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelæ sunt, contenta. Huiusmodi figuram solidam exprimit columna aliqua quadrilatera vniformis crassitiei. Vt figura solida ABCDEFGH, in qua tam duo plana opposita A B C D, E F G H, quam duo A D E H, B C F G, & duo A B G H, D C F E, parallelogramma sunt inter se parallela, & æqualia, dicitur parallelepipedum. Huius area ita inuestigabitur. Sit primo propositum parallelepipedum rectangulũ habens omnia sex parallelogramma rectangula, ac proinde omnes eius angulos solidos rectos: sitque longitudo basis A B, palm. 3. latitudo A D, palm. 2. & altitudo AH, palm. 4. Ducatur ergo latitudo 2. in longitudinem 3. vt producatur basis palmorum 6. quadratorum, vt lib. 4. cap. 1. traditum est. Deinde basis hæc 6. palmorum ducatur in altitudinem 4. Numerus enim productus 24. indicabit in parallelepipedo contineri 24. cubos, quorum singula latera singulos palmos complectuntur, quod ita planum faciemus. Exponatur seorsum rectangulum I K L M, æquale basi ABCD, intelligaturque altitudo perpendicularis L N, 4. palm. Si igitur ducatur latus IM, palm. 2. in IK, palm. 3. producetur area basis palmorum quadratorum 6. supra quæ si concipiantur extructi 6. cubi æquales, implebunt ij parallelepipedũ vsque ad primum palmum LQ, altitudinis. Si deinde alij 6. cubi æquales prioribus superimponantur, implebitur parallelepipedum vsque ad secundum palmum altitudinis QP. Et alij 6. cubi æquales parallelepipedum vsque tertium palmum PO, altitudinis implebunt. Denique alij 6. cubi appositi totum parallelepipedum explebunt vsque ad quartum altitudinis palmum ON. Constat ergo in toto parallelepipedo existere toties 6. cubos palmares, quoties palmus in altitudine continetur, hoc est, cubos 24.

a 30. defin. vndec.

Area parallelepipedi rectanguli.

2 INTELLIGATVR deinde parallelepipedum A B C E, cuius bases A B C D, E F G H, sint Rhombi, vel Rhomboides, ac latera AH, DE, DE, BG, CF, ad basem ABCD, recta, ita vt altitudo sit A H. Primum er-

Area parallelepipedi nõ rectãguli

go inquiratur area basis ABCD, vt lib. 4. cap. 3. Num. 1. docuimus. Hæc deinde in altitudinem AH, ducatur. Productus namque numerus erit parallelepipedi area. Nam si fiat rectangulum IL, basi A C, æquale, & supra illud concipiatur parallelepipedum rectangulum, cuius altitudo L N, altitudini AH, sit æqualis: *a* erit hoc parallelepipedum parallelepipedo ACE, æquale. Cum ergo parallelepipedum, cuius basis rectangulum IL, & altitudo L N, producatur ex altitudine L N, in basem I L, vt ostensum est, producetur quoque parallelepipedum A C E, ex altitudine A H, in basem AC, basi IL, æqualem.

a 31. duode.

SI nullum latus parallelepipedi rectũ est ad basem, demittenda erit ex aliquo angulo supremi parallelogrammi ad planum, in quo basis, linea perpendicularis, pro altitudine parallelepipedi, eaque diligenter metienda. Si namque area basis inuestigetur vel per cap. 1. lib. 4. quando est rectangula, vel per cap. 3, eiusdem lib. quando non est rectangula, eaque in altitudinem inuentam ducatur, producetur area popositi parallelepipedi. Nam si supra basem intelligatur parallelepipedum rectum eiusdem altitudinis cum proposito parallelepipedo, *b* erunt duo hæc parallelepipeda inter se æqualia. Constat autem ex Num. 1. & 2. parallelepipedum rectum gigni ex ductu basis in altitudinem.

b 29. vel 30. vndec.

Area cubi.

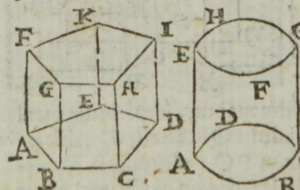
3 CVBVS, qui etiam parallelepipedum quoddam est rectangulum, eodem modo producitur, nimirum ex latere in se, & iterum in productum. Vt si latus cubi sit 10. erit eius area 1000. quod decies decem decies procreent 1000.

c 13. defin. vndec.

4 *c* PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela; alia vero parallelogramma. Vt est solidum ADF, cuius bases sunt pentagona ABCDE, FGHIK, parallela, & æqualia. Hanc figuram solidam repræsentat columna aliqua laterata æqualis crassitudinis, cuius bases oppositæ sunt æquales, similes, ac parallelæ, siue hæ triangula sint, siue quadrangula, siue pentagona, &c. Ex quo fit, vt prisma quodcumque ambiant tot parallelogramma, quot latera, vel anguli in vnoquoque oppositorum planorum reperiuntur. Vt propositum prisma ambiunt quinque parallelogramma ABGF, BCHG, CDIH, DEKI, EAFK. Area porro cuiuslibet prismatis inuenietur, si area basis inquiratur, atque in altitudinem ducatur. Nam si concipiatur parallelepipedum eiusdem altitudinis cum prismate, habens basem, rectangulum basi prismatis æquale; *d* erit hoc parallelepipedum prismati æquale. Cum ergo parallelepipedum producatur ex sua base in altitudinem, procreabitur quoque prisma ex multiplicatione suæ basis in altitudinem. Area porro basis cognoscetur ex ijs, quæ lib. 4. scripsimus, & altitudo prismatis, si eius latera recta nõ sint ad basẽ, exploranda erit, vt cap. præcedente Num. 2. altitudinem parallelepipedi inuestigandam esse præcepimus.

Area prismatis tam recti, quã obliqui.

d 2. coroll. 7. duodec.



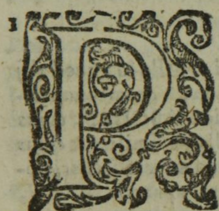
5 CYLINDRVS est figura solida æqualis crassitiei, quæ duobus circulis æqualibus, & æquidistantibus, & rotunda superficie inter ipsos intercepta continetur, instar columnæ cuiuspiam rotũdæ. Vt est solidum A C H, cuius

cuius bases sunt duo circuli ABCD, EFGH, paralleli, & æquales. Huius quoque area procreabitur ex multiplicatione basis, ex cap. 7. lib. 4. inuentæ in altitudinẽ. quod in Cylindro recto explicabitur, vt Num. 1. in parallelepipedo recto factum est. Nam si verbi gratia basis Cylindri circularis A B C D, continet 10. palmos quadratos, explebunt 10. cubi palmares supra illos 10. palmos quadratos extructi, Cylindrum vsque ad primum palmum altitudinis; at 20. cubi eundem explebunt vsque ad secundum palmum, &c. Quod si Cylindrus obliquus sit, exquirenda erit eius altitudo per lineam perpendicularem ex superiore base demissam ad planum, in quo inferior basis existit, atque in hanc altitudinem area basis ex cap. 7. lib. 4. inuenta multiplicanda. Productus enim numerus dabit aream Cylindri propositi, *a* cum æqualis sit Cylindro recto eandem cum illo basem, & altitudinem habenti.

a *coroll.* 11. *duodec.*

DE AREA PYRAMIDVM & Conorum.

Caput II.

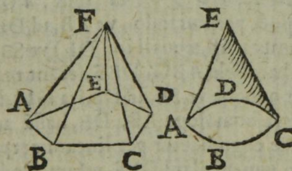
1 YRAMIS *b* est figura solida, quæ planis continetur ab vno plano ad vnum punctum constituta. Vt figura solida ABCDEF, ad punctum F, constituta supra basem pentagonam ABCDE, & quam ambiunt quinque triangula ABF, BCF, CDF, DEF, AEF, tot nimirum, quot in base sunt latera, dicitur pyramis.

b *defin.* 12. *vndec.*

CONVS autem est figura solida rotunda ad vnum punctum constituta, supra basem circularem, instar pyramidis rotundæ, qualis est figura ABCDE.

Area pyramidis, & coni.

TAM autem pyramidis, quam Coni area producitur ex multiplicatione basis in tertiam partem altitudinis. Cum enim, vt in præcedenti cap. ostendimus, ex base in totam altitudinem gignatur prisma, vel Cylindrus eandem habens cum pyramide, & cono altitudinem: *c* producetur ex eadem base in tertiam partem altitudinis tertia pars illius prismatis, vel Cylindri. *d* Cum ergo pyramis, sit tertia pars illius prismatis, *e* & Conus tertia pars Cylindri, liquet tam pyramidem, quam Conum produci ex base in tertiam partem altitudinis. Ex quo fit, si basis ducatur in totam altitudinem, tertiam partem numeri producti, esse quoque aream pyramidis, vel Coni. Item eandem produci ex tota altitudine in tertiam partem basis: *f* quod hac ratione tertia pars prismatis, vel Coni gignatur.



c *schol.* 14. *duodec.*
d *corol.* 7. *duodec.*
e 10. *duode.*

Area pyramidis, & coni aliter.

f 1. *schol.* 7. *duode* & 11. *duodec.*

2 BASIS porro pyramidis, si triangularis est, cognoscetur, vt lib. 4.

2. tra-

cap. 2. traditum est: si multilatera, reperietur, per ea, quæ eodem lib. cap. 3. 4. & 5. scripsimus. Basis autem Coni inuestigabitur ex cap. 7. eiusdem lib. At vero altitudo tam pyramidis, quam Coni, obtinebitur, si in verrice statuatur planum basi æquidistans, ab eoque ad planum, in quo basis, perpendicularis demittatur, eaque exquisitè mensuretur. Quamuis enim eadem hæc altitudo indagari possit Geometrice, si inclinatio vnius lateris ad basem, & magnitudo quoque eiusdem lateris cognoscatur: quia tamen hæc ipsa exploranda sunt materialiter per aliquod instrumentum, præstat ipsam quoque altitudinem statim per instrumentum exquirere, præsertim per instrumentum partium, quod lib. 1, cap. 1. descripsimus: cum inuentio illa Geometrica difficilior sit, procedatque ex inclinatione, ac latere per instrumentum cognitis.

Altitudo pyramidis, & coni.

3 ATQVE hæc, quæ diximus, intelligi volumus tam de pyramidibus, Conisque rectis, quam de obliquis, & Scalenis.

DE AREA FRVSTI PYRAmidis, & Coni.

Caput III.

1 RVSTVM pyramidis, & Coni appello id, quod a'ij pyramidem decurtatam, & Conum decurtatum dicunt. Sit ergo frustum pyramidis ABCDEF, cuius bases ABC, DEF, sint parallellæ, & similes, & cuius area inuestiganda sit. Quod duobus modis fieri potest. Primum cogitetur integra pyramis ABCH, cuius altitudinem HG, perpendicularem ad basem (licet pyramis actu non sit integrata) ita inuenie-mus. *a* Quoniam est, vt ab AB, ad AH, ita DE, ad DH, & permutando, vt AB, ad DE, ita AH, ad DH; erit quoque diuidendo, (sumpta AS, æquali ipsi DE) vt SB, ad DE, ita AD, ad DH. *b* Quia vero plana parallela ABC, DEF, secant rectas AH, GH, proportionaliter in I, G; erit quoque vt SB, ad DE, ita GI ad IH. Si igitur fiat, vt SB, differentia inter latera homologa AB, DE, basiũ ad DE, ita GI, altitudo Frusti pyramidis (quæ cognoscetur per lineam perpendicularem demissam ad basem ex aliquo puncto plani DEF, etiam producti, si opus est.) ad aliud, prodibit recta IH, altitudo nimirum pyramidis DEFH: qua addita ad GI, tota altitudo GH, cognita erit. Quocirca si per caput præcedens inueniatur area tam integræ pyramidis ABCH, quam abscissæ pyramidis DEFH, & hæc ab illa dematur, reliquum fiet Frustum ABCDEF.

a 4. *sexti.*

b 17. *vnde.*

Area frusti pyramidis.

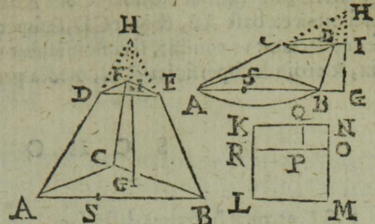
2 NON aliter frustum Coni ABCD, inuestigabitur, vt patet, si integer Conus intelligatur ABH, &c.

Area frusti coni.

3 ALIO modo idem frustum tam Pyramidis, quam Coni cognoscemus, etiamsi neque pyramis, neque conus integretur. *c* Fiant quadrata KLMN, NOPQ, basibus ABC, DEF, notis æqualia, inueniaturque inter quadrata

c 14. *secũdi*

drata KM, NP, superficies media proportionalis, qualis est rectangula figura OK, producto latere OP, ad R. *a* Quoniam enim est, vt MN, ad NO, ita KM, ad NR. Item vt KN, ad NQ, ita NR, ad NP. *b* estque MN, ad NO, vt KN, ad NQ: erit quadratum KM, ad rectangulum NR, vt rectangulum NR, ad quadratum NP: ideoque NR, medio loco proportionale est inter quadrata KM, NP. Quamobrem, si radix quadrata basis ABC, notæ, id est, latus KN, quadrati KM, ducatur in radicem quadratam basis DEF, notæ, hoc est, in latus NO, quadrati NP, producetur area rectanguli NR. a 1. *sexti.* b 7. *quinti.*



IAM vero ducatur GI, altitudo frusti in summam ex quadrato KM, hoc est, ex base ABC, & quadrato NP, siue base DEF, & superficie NR, media proportionali inter bases, vel dicta quadrata collectam. Productus enim numerus triplus erit frusti pyramidis ABCDEF; ideoque tertia producti pars area erit prædicti frusti. *c* Quoniam enim prisma, quod fit ex GH, altitudine pyramidis in basem ABC, siue quadratum KM, triplum est pyramidis ABCDEFH: erit quoque parallelepipedum factum ex GI, in quadratum KM, vna cum parallelepipedo facto ex IH, in idem quadratum KM, triplum pyramidis eiusdem. *d* Est autem & ablatum parallelepipedum factum ex IH, in basem DEF, hoc est, in quadratum NP, triplum ablatę pyramidis DEFH. *e* Igitur & reliquum, quod fit ex GI, in quadratum KM, vna cum ijs, quæ fiunt ex IH, in KP, & in RM, triplum erit frusti reliqui ABCDEF. c 7. *duodec.* d 7. *duodec.* e 5. *quinti*

4 *f* QVIA vero æquales superficies ABC, KM, ad superficies ęquales DEF, NP, eandem habent proportionem; erit permutando ABC, ad DEF, vt KM, ad NP. *g* ideoque latus AB, ad latus DE, erit, vt latus KN, ad latus NQ. & diuidendo (subtracta recta AS, ęquali ipsi DE, ex AB,) SB, ad DE, vt KQ, ad QN. Est autem, vt Num. 1. demonstrauimus, vt SB, ad DE, ita GI, ad IH. Igitur erit etiam vt KQ, ad QN, ideoque vt MO, ad ON, ita GI, ad IH. *h* Sed vt KQ, ad QN, ita est KP, ad PN: Et vt MO, ad ON, ita MR, ad RN. Igitur erit quoque, vt GI, ad IH, ita tam KP, ad PN, quam MR, ad RN. Contractis ergo hisce magnitudinibus ad numeros, *i* erit numerus factus ex GI, primo in PN, quartum, æqualis ei, qui fit ex IH, secundo in KP, tertium. Item numerus factus ex GI, primo in RN, quartum æqualis ei, qui fit ex IH, secundo in MR, tertium: k Ac propterea duo, qui fiunt ex GI, in PN, & ex GI, in RN, æquales erunt duobus, qui fiunt ex IH, in KP, & IH, in MR. Adiecto ergo communi, qui fit ex GI, in KM, erunt tres, qui fiunt ex GI, in KM, & in PN, & in RN, æquales tribus, qui fiunt ex GI, in KM, & ex IH, in KP, & in MR. Sed hi posteriores tres tripli sunt frusti pyramidis ABCDEF, vt ad finem Num. 3. demonstrauimus. Ergo & priores tres, qui nimirum fiunt ex GI, altitudine frusti in KM, & in PN, & in RN, hoc est, in summam ex KM, basi ABC, æquali, & ex PN, basi DEF, æquali, & ex RN, media proportionali inter bases collectam, tripli erunt eiusdem frusti; ideoque tertia eorum pars æqualis erit f 7. *quinti.* g 22. *sexti.* h 1. *sexti.* i 19. *sept.* k 2. *pronũc.*

areæ

areæ frusti. quod erat demonstrandum.

5 EADEM ratione frustum Coni ABDC, producetur ex altitudine GI, in summã ex base AB, & baseCD,&superficie media proportionali inter bases collectam: vt constat, si concipiantur quadrata KM, N P, basibus æqualia, & proinde superficies R N, media proportionalis inter bases, &c.

SCHOLIVM.

Soliditas muri.

1 SI ea,quæ hactenus dicta sunt, rebus materialibus accommodentur, licebit nobis per cap. 1. metiri murum quemcunque vniformis crassitiei, tamquam parallelepipedum quoddam, cuius longitudo eadem sit, quæ longitudo muri: latitudo vero eadem quę muri latitudo: altitudo denique, siue profunditas eadem,quæ altitudo muri.

EADEMQVE ratione metiemur frustum alicuius marmoris,vel alterius saxi, tanquam prisma quodpiam, si vniformem habeat crassitiem,lateraque ad bases sint recta.

Soliditas alicuius frustimarmoris

NON aliter saccum tritici, tanquam Cylindrum quendam, dimetiemur,plus minus.Nam cum saccus non sit accuratus Cylindrus,vera eius mensura haberi non potest.

Capacitas sacci tritici.

Capacitas acerui tritici.

2 RVRSVS per caput 2. aceruum tritici, tamquam conum aliquem, eodem modo,plus minus, metiri licebit. Itaque si cognoscemus,quot grana,vel libræ tritici in cubo,verbi gratia,vnius palmi contineantur,multiplicenturque grana,vel libræ vnius cubi in numerum cuborum,qui in toto sacco, vel aceruo reperti sunt, producetur numerus granorum, vel librarum in eodem sacco,vel aceruo existentium.

3 SIC etiam,si detur vas aliquod excauatum in modum parallelepipedi, aut Cylindri,sciemus eius capacitatẽ, si eius parallelepipedum interius aut Cylindrum, non secus, ac si solida figura esset,metiemur: ita vt si cognitum fuerit,quot mensurę aquæ alterius ve liquoris in cubo, verbi gratia, vnius palmi contineantur, ignorari non possit,quot mensuræ in cubis in toto vase contentis comprehendantur,si nimirum mensuræ vnius cubi ducantur in numerum cuborum, quos in vase comprehendi inuenimus.

Capacitas vasis excauati.

Soliditas vasis excauati

4 DENIQVE si desideretur soliditas alicuius vasis, quod tam interius, quam exterius formam habeat parallelepipedi, seu prismatis, Cylindriue, metienda erit vtraque figura tum interior, tum exterior. Si namque illa ex hac detrahetur,reliqua fiet soliditas vasis excauati.

DE

DE AREA QVINQVE CORporum regularium.

Caput IIII.

1 

VINQVE tantum sunt corpora regularia, Tetraedrum, Hexaedrum, Octaedrum, Dodecaedrum, & Icosaedrum, vt in scholio propos. 18. lib. 13. Euclid. demonstrauimus: quæ sic ab Euclide lib. 11. definiuntur.

TETRAEDRVM est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta. qualem figuram exprimit pyramis triangularis æquilatera.

HEXAEDRVM est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta. qualem refert cubus, seu parallelepipedum basium quadratarum, in quo omnes tres dimensiones sunt æquales.

OCTAEDRVM est figura solida sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

ICOSAEDRVM est figura solida sub 20. triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

2 CVBI siue Hexaedri aream gigni ex multiplicatione lateris in se, & iterum in productum, cap. 1. Num. 3. docuimus. Item pyramidem, seu Tetraedrum produci ex eius altitudine (quæ mechanice cognoscetur, vt cap. 2. Num. 2. traditum est) in tertiam basis partem: vel ex eius base in tertiam partem altitudinis, declarauimus cap. 2. Num. 1. Quod si Geometricè inuenire lubeat altitudinem Tetraedri, ita faciemus. Quoniam quadratum diametri sphæræ Tetraedrum ambientis est, vt 2. ad 3. *a* quod diameter sit potentia sesquialtera lateris pyramidis: Si fiat, vt 2. ad 3. ita quadratum lateris Tetraedri ad aliud, prodibit quadratum diametri sphæræ, eiusque quadrati quadrata radix diametrum ipsam exhibebit, *b* cuius duæ tertiæ partes altitudinem Tetraedri offerent.

Area cubi, et Tetraedri.

Altitudo Tetraedri.

a 13. *tertij decimi.*

b 2. *coroll. 13. tertijde.*

3 *c* QVONIAM vero Octaedrum diuiditur in duas pyramides similes, & æquales, quarum basis communis est quadratum à latere descriptum: si vtriusque pyramidis inuestigetur area, ignorari non poterit area Octaedri, cum ex areis illarum pyramidum conflata sit. Producetur autem area illarum duarum pyramidum, si quadratum lateris Octaedri ducatur in diametrum Octaedri, & producti numeri tertia pars capiatur. quia productus ille numerus ex quadrato lateris Octaedri in eiusdem diametrum, est parallelepipedum duarum illarum pyramidum triplum: *d* propterea quod semissis illius parallelepipedi eandem habens basem, & altitudinem, cum vtralibet pyramidum, tripla est vnius pyramidis. Diameter porro Octaedri, quæ à diametro sphæræ, vel quadrati lateris Octaedri non differt, inuenietur, si ex duplo quadrati lateris radix quadrata eruatur; *e* quod

c 2. *coroll. 14. tertijde.*

Area octaedri.

d *coroll. 7. duodec.*

Diameter octaedri.

e *schol. 47. primi.*

tam quadratum ex diametro quadrati descriptum duplum sit quadrati lateris, *a* quam quadratum diametri sphæræ quadrati lateris Octaedri. Semissis vero huius diametri, altitudo erit vtriusuis Pyramidis. Quare si hæc altitudo ducatur in tertiam partem quadrati lateris, producetur area vnius pyramidis, id est, semissis Octaedri: ac proinde duplum huius pyramidis aream totius Octaedri indicabit.

a 14. *tertij-dec.*

Area dodecaedri.

4 DEINDE quia ductis ex centro Dodecaedri ad omnes eius angulos rectis lineis, Dodecaedrum in 12. pyramides pentagonas æquales diuiditur; si area vnius pyramidis per cap. 2. inuenta multiplicetur per 12. procreabitur area totius Dodecaedri. Vt autem vnius pyramidis area habeatur, necesse est, & aream basis pentagonæ inuestigare ex latere dato, per ea, quæ lib. 4. cap. 5. scripsimus, & pyramidis altitudinem, vt iam docebo. Ex superiori plano producto demittatur ad planum basis oppositæ linea perpendicularis: Huius enim semissis diligenter inquisita in partibus lateris Dodecaedri, per instrumentum partium lib. 1. cap. 1. constructum, dabit pyramidis altitudinem quæsitam, quemadmodum & tota perpendicularis altitudinem Dodecaedri exhibet. Quam tamen Geometrice ita quoque deprehendemus. *b* Quia cubus in Dodecaedro descriptus eadem sphæra, qua Dodecaedrum, comprehenditur, eiusque latus vnum angulum Pentagoni Dodecaedri subtendit; ideoq; eadem diameter est sphæræ, Dodecaedri, & cubi: *c* Si recta subtendens angulum pentagoni inuestigetur, habebitur latus cubi. *d* Et quia diameter sphæræ potentia est tripla lateris cubi, si quadratum lateris cubi inuenti triplicetur, habebitur quadratum diametri, sphæræ, vel cubi, cuius radix quadrata ipsam diametrum dabit. Cum ergo diameter Dodecaedri, & altitudo eiusdem centra basium oppositarum coniungens se in centro secent bifariam, venabimur semissem huius altitudinis, nimirum altitudinem pyramidis quæsitam, hac ratione. Concipiatur triangulum rectangulum, cuius basis est semidiameter Dodecaedri nota, cum tota diameter proxime cognita sit, latera vero circa angulum rectum, altitudo pyramidis, & semidiameter circuli basem Dodecaedri circumscribentis. Cum ergo semidiameter hæc cognosci possit, ex ijs, quæ lib. 4. cap. 5. docuimus, *e* cognoscetur quoque reliquum latus, altitudo videlicet pyramidis, quam quærimus. Porrò semidiameter prædicti circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis ita quoque redditur nota. Quoniam latus pentagoni subtendit in eo circulo grad. 72. & latus Decagoni grad. 36. cognita erunt hæc latera in partibus sinus totius. Si ergo fiat, vt latus pẽtagoni in partibus sinus totius cognitũ ad idẽ latus notũ ex hypothesi, ita latus Decagoni in ijsdẽ partibus sinus totius cogniti ad aliud, prodibit Decagoni latus in mẽsura lateris pentagoni, cognitũ. *f* Et quia latus pẽtagoni potest latera decagoni, & Hexagoni eiusdẽ circuli, si quadratũ lateris Decagoni proxime cogniti detrahatur ex quadrato lateris pentagoni, reliquum fiet quadratum lateris Hexagoni, id est, semediametri, ideoque eius radix quadrata semidiametrum exhibebit notam.

b 8. *quinti dec.*

c 12. trian. rectil.

d 15. *tertij dec.*

Perpendicularis e centro spæræ ad basem Dodecaedri.

e 3. triang. rectil.

Semidiameter circuli pentagonũ Dodecaedri circumscribentis.

f 10. *tertij-dec.*

Area Icosaedri.

5 POSTREMO quia ductis ex centro Icosaedri ad omnes eius angulos rectis lineis, Icosaedrum in 20. pyramides triangulares æquales diuiditur; si area vnius pyramidis per cap. 2. inuenta multiplicetur per 20. gignetur totius Icosaedri area ex illis 20. pyramidibus conflata. Vt autem vnius pyramidis area obtineatur, inuestiganda primum erit area basis triangularis, ex ijs, quæ lib. 4. cap. 2. Num. 4. & 5. scripsimus. Deinde altitudo pyrami-

pyramidis mechanice, hoc pacto. Ex superiori plano producto, hoc est, ex inferiori superficie alicuius plani, quod corporis supremæ basi imponeretur, ad planum basis oppositæ perpendicularis demittatur. Hæc enim accuratè dimensa altitudinem Icosaedri dabit, eiusque semissis altitudinem pyramidis, quæ quæritur. Quam Geometrice ita etiam explorabimus. Fiat pentagonum ex 5. lateribus Icosaedri, inuestigeturque eius semidiameter, & latus Decagoni in circulo illud pentagonum circumscribente, in partibus, in quibus latus Icosaedri datum est, hac scilicet ratione. Concipiatur triangulum rectangulum, cuius basis semidiameter dicti circuli, latera vero semissis lateris pentagoni, hoc est, Icosaedri, & perpendicularis e centro ad punctum medium dicti lateris demissa. Ita namque cognoscetur semidiameter, ex ijs, quæ lib. 4. cap. 5. Num. 2. tradita sunt. Latus vero Decagoni in eodem circulo descripti reperietur, vt paulo ante circa finem Num. 4. dictum est. *a* Et quia diameter sphæræ, siue Icosaedri potentia est quintupla inuentæ semidiametri; si quadratum semidiametri inuentæ quintupletur, procreabitur quadratum diametri Icosaedri, cuius radix quadrata diametrum offeret, ideoque & semidiameter Icosaedri nota erit. Vel aliter. *b* Quoniam diameter sphæræ, id est, Icosaedri, componitur ex latere Hexagoni, & duobus lateribus decagoni in circulo pentagonum ex quinque lateribus Icosaedri compositum circumscribente: erit summa collecta ex semidiametro illius circuli, & duobus lateribus decagoni, diametro Icosaedri æqualis: ideoque rursus semidiameter Icosaedri nota erit.

a 1. corol. 16. tertijdec.

b 2. corol. 16. tertijdec.

HINC patet, Orontium cum illis, qui ipsum sequuntur, decipi, qui putat, ex semisse semidiametri illius circuli, & ex latere decagoni componi semiaxem Icosaedri, hoc est, axem, vel altitudinem pyramidis, cuius basis triangulum Icosaedri, & vertex centrum sphæræ. Nam vt ex ijs constat, quæ proxime scripsimus, eo modo componitur semidiameter sphæræ, vel Icosaedri, quæ maior est prædicto axe. Semidiameter porro circuli prædictum pentagonum circumscribentis reperiri quoque poterit, vt ad finem Num. 4. diximus, si nimirum quadratum lateris decagoni ex quadrato lateris dicti pentagoni, quod à latere Icosaedri non differt, tollatur, & reliqui numeri radix quadrata extrahatur: *c* propterea quod latus pentagoni potest latera decagoni, & hexagoni eiusdem circuli.

Error Orontij.

c 10. tertijdec.

IAM vero cognita semidiametro Icosaedri, inueniemus altitudinem pyramidis, cuius basis est triangulum Icosaedri, & vertex eiusdem centrum, hoc modo. Quoniam diameter Icosaedri, eiusdemque altitudo se se in centro secant bifariam, concipiatur triangulum rectangulum, cuius basis est semidiameter Icosaedri proxime cognita, latera vero circa angulum rectum, altitudo pyramidis, & semidiameter circuli basem Icosaedri circũscribentis. Cum ergo hæc semidiameter cognosci possit ex ijs, quæ lib. 4. cap. 5. docuimus, *d* cognoscetur quoque latus reliquum pyramidis, videlicet altitudo, quæ inquiritur. Semidiameter porro circuli basem triangularem Icosaedri circumscribentis efficietur hoc etiam pacto cognita. *e* Quoniam trianguli æquilateri latus potentia triplum est semidiametri illius circuli; si quadratum lateris Icosaedri diuidatur per 3. erit Quotientis radix quadrata, semidiameter quæsita.

Perpẽdicularis è centro sphæræ ad basẽ Icosaedri.

d 3. triang. rectil.

e 12. tertijdec.

Semidiameter circuli triangulum Icosaedri circumscribentis.

6 EADEM hac arte, quæ in Dodecaedro, & Icosaedro exposita est, areas Tetraedri, cubi, & Octaedri inuestigare licebit, si, lineis ex eorũ centris ad om-

Areæ Tetraedri, cubi, & Octaedri aliter inuentæ.

nes angulos ductis, in pyramides æquales distribuantur. Tetraedrum nimirum in 4. pyramides triangulares; cubus in 6. quadrangulares; & Octaedrum in 8. triangulares. Inuenta namque per cap. 2. in quolibet area vnius pyramidis, si ea in numerum basium corporis regularis ducatur, insurget totius corporis area. Vt autem area vnius pyramidis habeatur, inquirenda prius erit altitudo ipsius, vt ducta in tertiam basis partem pyramidis aream producat. Altitudo ergo hæc in Tetraedro sic reperietur. *a* Quoniam diameter sphæræ Tetraedrum ambientis potentia est sesquialtera lateris Tetraedri: si Fiat, vt 2. ad 3. ita quadratum lateris Tetraedri dati ad aliud, prodibit quadratum diametri sphæræ, cuius radix quadrata ipsam diametrum ostendet. *b* Huius autem diametri sexta pars, altitudo erit pyramidis quæsita, recta videlicet perpendicularis è centro sphæræ in basem Tetraedri demissa.

a 13. *tertij dec.*
b 2. *corol. 13. tertij dec.*
Perpendicularis è centro sphæræ ad basẽ Tetraedri, cubi, & Octaedri.
c 14. *tertij dec.*

IN cubo vero dicta altitudo semissi lateris cubi æqualis est, quod perpendicularis è centro sphæræ in basem cubi demissa æqualis sit semissi lateris cubi, vt liquet.

IN Octaedro denique eadem altitudo sic deprehendetur. *c* Quoniam diameter sphæræ est potentia dupla lateris Octaedri: si fiat, vt 1. ad 2. ita quadratum lateris Octaedri dati ad aliud, procreabitur quadratum diametri sphæræ, vel Octaedri. Huius ergo radix quadrata dabit diametrum, ideoque semidiameter non ignorabitur. Hinc altitudo pyramidis quæsita, hoc est, perpendicularis è centro sphæræ in basem Octaedri demissa, elicietur ea ratione, quam in Icosaedro ad finem Num. 5. explicauimus.

In quot triãgula diuidãtur omnes bases cuiusuis corporis regularis ex earũ cẽtris.

7 NON videtur autem omittenda alia ratio dimetiendi omnia quinque corpora regularia, quæ quidem in lib. 14. Euclid. demonstrata est, & est eiusmodi. Primum quæratur superficies conuexa cuiusque corporis, ex eius latere cognito, etiamsi nullius basis area inuestigetur: hoc videlicet pacto. Quoniam quælibet basis cuiusuis corporis diuiditur per rectas ex centro basis ad omnes angulos ductas in tot triangula æqualia, quot anguli, vel latera in base continentur: si ducatur hic numerus triangulorum in numerum basium corpus regulare, quod propositum est, ambientium, habebitur numerus omnium huiusmodi triangulorum in tota superficie conuexa contentorum. Vt quia basis quadrata cubi ABCD, diuisa est in quatuor triãgula ex centro E, continebuntur 24. eiusmodi triangula in 6. basibus. Item quia basis triangularis Tetraedri, Octaedri, & Icosaedri A B C, ex centro D, distributa est in 3. triangula, existent in 4. basibus Tetraedri 12. eiusmodi triangula, & 24. in 8. basibus Octaedri, & 60. in 20. basibus Icosaedri. Denique quia basis pentagona Dodecaedri ABCDE, resoluta est ex centro F, in 5. triangula, complectentur 12. bases Dodecaedri 60. eiusmodi triangula.



DEIN-

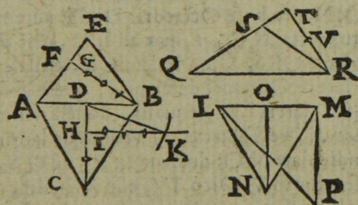
DEINDE quia rectangulum contentum sub perpendiculari è centro basis in latus demissa, & sub vno latere, æqualem est duobus eiusmodi triangulis, *a* propterea quod vnius duplũ est: erit in cubo rectangulum illud duodecies sumptum toti superficiei cubi æquale: In Tetraedro vero sexies sumptum totam Tetraedri superficiem conficiet: In Octaedro deinde duodecies acceptum toti superficiei Octaedri adæquabitur: At in Dodecaedro, & Icosaedro tricies sumptum superficiei toti tam Dodecaedri, quam Icosaedri æquale erit. Dicta autem perpendicularis E F, in base cubi æqualis est semissi lateris cubi A B. *b* Quoniam enim perpendicularis E F, secat latus A B, bifariam, *c* estque ipsi A F, æqualis, quod anguli FAE, FEA, semirecti sint; constat EF, semissi lateris cubi esse æqualem. Perpendicularis autem DE, in base Tetraedri; Octaedri, & Icosaedri, *d* semissis est semidiameri CD. *e* Cum ergo latus A C, sit potentia triplum semidiametri CD: Si fiat, vt 3. ad 1. ita quadratum lateris dati AC, ad aliud, prodibit quadratum semidiametri CD, cuius radix quadrata ipsam CD, indicabit, eiusque semissis perpẽdicularem DE, exhibebit. Perpendicularis denique FG, in base Dodecaedri *f* semissis est summæ ex semidiametro AF, & latere decagoni circuli A B D, collectæ. quod latus decagoni cognoscetur, vt ad finem Num. 4. traditum est.

a 41. *primi.*
Superficies regularium corporũ & perpendiculares basiũ.
b *schol.* 26. *primi.*
c 6. *primi.*
d 2. *corol.* 12. *tertijdec.*
e 12. *tertij-dec.*
f 1. *quarti-dec.*

g QVIA vero solidum, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuscumque corporis regularis ad aliquam eius basem ducta in tertiam partem superficiei ipsius corporis, ipsi corpori æquale est; si inuestigetur superficies conuexa dati corporis regularis, vt proxime docuimus, atque in tertiam eius partem ducatur altitudo vnius pyramidum, in quas corpus ipsum per rectas è centro ipsius ductas diuiditur, (quæ altitudo reperietur, vt supra tradidimus) hoc est, perpendicularis è centro corporis in eius basem demissa, procreabitur area, siue soliditas ipsius corporis. Quę etiam obtinebitur, si dicta altitudo ducatur in totam superficiem conuexam, & producti tertia pars capiatur.

g *schol.* 20. *tertijdec.*
Areæ corporum regularium aliter inuentæ.

8 ITAQVE vt vides, tota difficultas in corporibus regularibus dimetiendis consistit fermè tota in altitudine pyramidis basem habentis eandem cum corpore, verticem autem in centro sphæræ, exquirenda: cuius quidem inuentio Geometrica per numeros molestissima est, propter radi-



ces surdas, & numeros fractos, quorum numeratores, denominatoresque nimis magni sunt, adeo vt operæ pretium videatur esse eandem mechanice explorare, vt ad initium Num 2. 4. & 5. diximus, præsertim si exquisita diligentia in ea per instrumentum partium dimetienda adhibeatur. Sed quia non semper in promptu habemus corpora regularia, vt mechanice eam

eam altitudinem consequi possimus, libet rationem quandam nouam, eamque facillimam hic præscribere, qua sine molestia illa numerorum, eadem illa altitudo per lineas inueniatur, etiamsi corpus regulare non adsit, sed solum eius latus datum sit, ac cognitum. Sit ergo primo datũ latus Tetraedri A B, quotcunque palmorum, construaturque triangulum æquilaterum ABC, pro basе Tetraedri: Diuiso autem latere A B, bifariam in D, iungatur recta CD, *a* quæ ad A B, perpendicularis erit. Constructo quoque Isoscele ABE, cuius vtrumq. latus rectæ CD, æquale sit, demittatur ad AE, perpendicularis B F, cuius quarta pars sit FG. Dico FG, altitudinem esse vnius pyramidis, hoc est, æqualem esse perpendiculari ex centro sphærę Tetraedro circumscriptæ ad vnam basem deductæ. Quoniam enim, vt ad finem Euclidis ex Hypsicle demonstrauimus, E, angulus est inclinationis vnius basis Tetraedri ad alteram, estque EB, perpendiculari C D, æqualis: si triangulum B E F, concipiatur circa EF, moueri, donec rectum sit ad basem Tetraedri, cadet punctum B, in verticem Tetraedri; ac proinde perpendicularis BF, altitudo erit Tetraedri. *b* Et quia altitudo Tetraedri duas partes tertias diametri sphæræ continet: si semidiameter ponatur 6. erit altitudo B F, 4. & semidiameter 3. *c* Cum ergo altitudo vnius pyramidis sit tertia pars semidiametri, erit BG, semidiameter, & G F, altitudo vnius pyramidis. Quam etiam inueniemus, licet Isosceles AEB, non extruatur, hoc modo. Sumpta D H, tertia parte perpẽdicularis CD, excitetur ad CD, perpendicularis HK, quæ ex D, ad interuallum CD, secetur in K. Dico HI, quartam partem ipsius HK, esse altitudinem vnius pyramidis. Erecto enim triangulo D H K, supra basem Tetraedri ABC, cadet punctum K, in verticem Tetraedri, quod D K, ducta æqualis sit perpendiculari ex medio latere ad angulum basis oppositum ductæ. Ergo vt prius, HK, altitudo erit Tetraedri, & HI, perpendicularis ex centro sphæræ in H, centrum basis cadens. *d* Nam D H, tertia pars perpendicularis CD, in centrum trianguli cadit.

a schol. 26. primi.

Altitudo pyramidis Tetraedri.

b 2. corol. 13. tertijdec.

c 2. corol. 13. tertijdec.

d 2. corol. 13. tertijdec.

SIT deinde datum latus Octaedri LM, supra quod construatur triangulum æquilaterum LMN, pro base Octaedri. Diuiso autem latere L M, bifariam in O, iungatur recta N O, *e* quæ ad L M, erit perpendicularis. Constructo iam Isoscele QRS, supra basem QR, æqualem diametro sphæræ, vel quadrati ex latere Octaedri descripti, (quæ habebitur, si educatur perpendicularis MP, lateri LM, ęqualis. Iuncta enim recta LP, diameter erit illius quadrati, vel sphæræ.) vtrumque laterum QS, R S, æquale habens perpendiculari N O; ducatur ex R, ad Q S, perpendicularis RT, quæ bifariam secetur in V. Dico TV, esse altitudinem pyramidis quæsitam, hoc est, æqualem esse perpendiculari ex centro sphæræ ad vnam basem Octaedri cadenti. Quoniam enim, vt ad finem Euclidis ex Hypsicle demonstrauimus, angulus QSR, inclinationem vnius basis ad alteram indicat, estque obtusus, erit perpendicularis R T, cadens ad partes anguli acuti RST, æqualis altitudini Octaedri, id est, perpendiculari basium O-

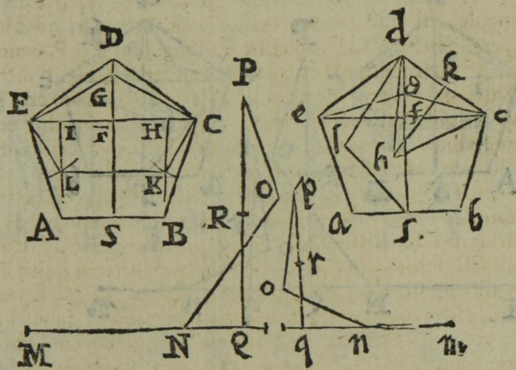
e schol. 26. primi.

Altitudo pyramidis Octaedri.

ctaedri oppositarum centra connectenti, vt ex Octaedro materiali perspicuum est: Ac propterea eius semissis TV, altitudo erit pyramidis quæsita, quod altitudo Octaedri bifariam secetur in centro.

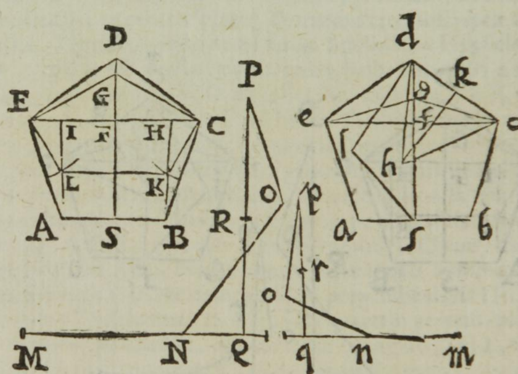
SI detur latus cubi, siue hexaedri, erit eius semissis altitudo pyramidis quæsita: propterea quod cubi altitudo eiusdem lateri sit æqualis. Altitudo pyramidis cubi.

DATVM iā sit AB, latus Dodecaedri, supra quod extruatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum A B C D E, pro base Dodecaedri. Iuncta autem recta CE, *a* quæ latus erit cubi in Dodecaedro, & in eadem cum ipso sphæra descripti, *b* atque lateri AB, parallela: secetur A B, bifariam in S, connectaturque recta S D. *c* quæ angulum CDE, bifariam secabit: *d* ac proinde & rectam CE, bifariam, & ad angulos rectos diuidet: ideoque & anguli ad S, recti erunt. Fiat supra CE, Isosceles C G E, cuius vtrumque laterum CG, EG, perpendiculari SF, sit æquale. Sumptis quoque FH, a 2. corol. 17. tertijdec. b coroll. 8. quintidec. c schol. 12. quarti. d 4. primi



FI, semissi lateris AB, æqualibus, erigantur ad EC, perpendiculares HK, IL, quæ ex C, E, ad interuallum FD, secentur in K, L, iungaturque rectæ EL, CK. His paratis, fiat angulo CGE, æqualis angulus MNO, ponaturque NO, ipsi SD, æqualis: Item angulo ELK, fiat æqualis angulus NOP, ponaturq. OP, lateri AB, æqualis: ac tādē demittatur ex P. ad MN, perpendicularis PQ, quæ bifariam secetur in R. Dico R Q, altitudinem esse pyramidis vnius in Dodecaedro. Nam quia, vt ad finem Euclidis ex Hypsicle demonstrauimus, angulus CGE, inclinationem vnius basis ad alteram metitur, si MN, concipiatur esse perpendicularis, quæ in base infima ex angulo pentagoni ad medium punctum lateris oppositi ducitur, respondebit N O, perpendiculari, quæ in pentagono ad illam basem inclinato ex eodem medio puncto ad oppositum angulum ducitur: propterea quod angulum M N O, angulo inclinationis C G E, & rectam N O, perpendiculari S D, æqualem po-

posuimus. Recta autem OP, referet latus Dodecaedri inter angulum dicti pentagoni inclinati, & angulum supremæ basis positum: propterea quod recta O P, posita est æqualis lateri Dodecaedri, & angulus N O P, angulo ELK, qui quidem æqualis est illi, quem dictum latus efficit cum perpendiculari ex angulo supradicti pentagoni inclinati ad basem in medium punctum lateris oppositi ductę, vt constat, si vna basis cubi Dodecaedro inscripti intelligatur dicto lateri dodecaedri substrata, ita vt duo latera basis cubi subtendant duos angulos duorum pentagonorum, quorum vnum ad basem Dodecaedri inclinatum est, alterum vero supremum in Dodecaedro. Erit enim tunc recta C E, æqualis rectæ duo puncta media duorum laterum dictorum basis cubi connectenti. Rectæ autem EL, CK, respondebunt rectis ex eisdem punctis medijs laterum illorum basis cubi, ad angulos prædi-

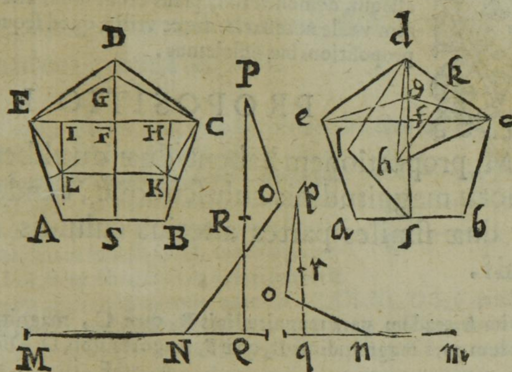


ctorum pentagonorum ductis: Ac proinde angulus E L K, æqualis erit ei, quem perpendicularis in pentagono inclinato cum prædicto latere Dodecaedri efficit. Ex quo fit punctum P, in plano supremæ basis existere, atque idcirco perpendicularem PQ, ad planum basis per M N, ductum demissam, æqualem esse altitudini Dodecaedri; eiusque semissem R Q, altitudini vnius pyramidis pentagonæ esse æqualem. Quæ omnia facile intelligentur, si Dodecaedrum aliquod materiale adhibeatur.

DENIQVE datum sit Icosaedri latus a b, supra quod extruatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum a b c d e, pro base pyramidis ex quinque basibus Icosaedri conflatæ. Iuncta autem recta c e, secetur latus a b, in f, bifariam, & recta ducatur f d, quæ vt in Dodecaedro ostendimus proxime, perpendicularis erit ad vtramque a b, c e. Fiat supra latus Icosaedri c d, triangulum æquilaterum c d h, pro base vna Icosaedri; & diuiso latere c d, bifariam in k, iungatur recta h k, *a* quæ ad c d, erit perpendicularis. Præ-

a schol. 26. primi.

s. Præterea ſupra c e, fiat Iſoſceles c g e, cuius vtrumque laterum c g, e g, perpendiculari h k, ſit æquale. Poſt hæc ſupra ſ d, conſtituatur triangulum ſ d l, cuius latus ſ l, perpendiculari h k, & latus d l, lateri Icoſaedri a b, ſit æquale. Denique angulo c g e, fiat æqualis angulus m n o, & recta n o, perpendiculari h k, æqualis: Item angulus n o p, angulo d l s, rectaque o p, lateri Icoſaedri a b, æqualis. Dico perpendicularem p q, ad m n, demiſſam, eſſe altitudinem Icoſaedri, eiuſque ſemiſſem r q, altitudinem vnius pyramidis in Icoſaedro. Quia enim, vt ex Hypſicle ad finem Euclidis demonſtrauimus, angulus c g e, metitur inclinationem vnius baſis ad alteram, ſi m n, concipiatur eſſe perpendicularis, quæ in baſe infima Icoſaedri ex angulo trianguli ad medium punctum lateris oppoſiti ducitur, reſpondebit n o, perpendiculari, quæ in triangulo ad illam baſem inclinato ex eodem medio puncto ad angulum oppoſitum ducitur: propterea quod angulum Altitudo pyramidis Icoſaedri.



m n o, angulo inclinationis c g e, & rectam n o, perpendiculari h k, æqualem fecimus: Recta vero o p, referet latus Icoſaedri inter angulum dicti trianguli inclinati, & angulum ſupremæ baſis poſitum; propterea quod recta o p, poſita eſt æqualis lateri Icoſaedri, & angulus n o p, angulo d l s: *a* qui quidem æqualis eſt illi, quem dictum latus efficit cum perpendiculari ex angulo ſupradicti trianguli inclinati ad baſem, in medium punctum lateris oppoſiti ducitur. Eſt enim recta d s, æqualis perpendiculari ex angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, & latera s l, d l, æqualia perpendiculari in triangulo inclinato, & lateri Icoſaedri inter angulum ſupremum pentagoni prædicti, & angulum trianguli inclinati. Ex quo fit, punctum p, in plano ſupremæ baſis exiſtere: ac proinde perpendicularem p q, ad planum baſis per m n, ductum demiſſam, æqualem eſſe altitudini Icoſaedri, eiuſ- a 8. *primi.*

Hh que

que ſemiſſem r q, altitudini vnius pyramidis trigoni eſſe æqualem. Quæ omnia facile percipientur, ſi adhibeatur materiale aliquod Icoſaedrum. Inuenta porrò hoc modo altitudine pyramidis, cognoſcenda eadem ſumma diligentia erit, beneficio inſtrumenti partium, in partibus lateris corporis regularis propoſiti.

DE AREA SPHAERAE, INVENTIONEque ſuperficiei conuexæ eiuſdem ſphæræ.

Caput V.

1 T ſphæræ aream, ſoliditatemue pluribus poſſimus vijs aſſequi, demonſtranda prius erunt nonnulla ad eam rem valde neceſſaria, atque vtilia. quod ſequentibus 7. propoſitionibus efficiemus.

PROPOSITIO I.

QVAM proportionem habent duæ quælibet partes aliquotæ magnitudinis cuiuſcunque, eandem habent duæ ſimiles partes alterius cuiuſuis magnitudinis.

SIT enim A, eadem pars magnitudinis B, quæ C, magnitudinis D: Item E, eadem pars magnitudinis B, quæ F, magnitudinis D. Dico eſſe, vt A, ad E, ita C, ad F. Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita C, ad D, quod vtrobique eadem proportio ſubmultiplex poſita ſit. Item vt B, ad E, ita D, ad F; quod vtrobique poſita ſit eadem proportio multiplex: erit ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. quod eſt propoſitum.

A E B | C F D

IDEM ſequitur, ſi A, & C, ſint ipſarum B, D, eædem partes plures non facientes vnam: Item, ſi E, & F, earundem B, D, ſint eædem partes plures non facientes vnam, vt $\frac{2}{3}$. vel $\frac{3}{5}$. &c. Nam ſi verbi gratia A, C, ſint $\frac{3}{4}$, ipſarum B, D, erit $\frac{1}{4}$. ipſius B, ad B, vt $\frac{1}{4}$. ipſius D, ad D. a Igitur erunt quoque, vt $\frac{3}{4}$. ipſius B, hoc eſt, ipſa A, ad B, ita $\frac{3}{4}$. ipſius D, hoc eſt, ipſa C, ad D. Rurſus ſi verbi gratia E, F, ſint $\frac{2}{3}$. ipſarum B, D, erit, vt B, ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem B, ita D, ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem D. b Ac proinde vt B, ad $\frac{2}{3}$. id eſt, ad E, ita D, ad $\frac{2}{3}$. id eſt, ad F. Quare, vt prius, erit ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F.

a *ſchol. 22. quinti.*
b *ſchol. 22. quinti.*

CORO-

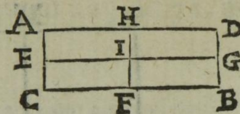
COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, ita esse $\frac{1}{4}$. cuiusuis magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiusdem, vt est $\frac{1}{2}$. cuiusuis alterius magnitudinis ad $\frac{2}{3}$. eiusdem. Quoniam enim, vt ostendimus, ita est $\frac{1}{4}$. prioris magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiusdem, vt $\frac{1}{4}$. posterioris ad $\frac{1}{3}$. eiusdem. *a* Vt autem $\frac{1}{4}$. posterioris ad $\frac{1}{3}$. ita sunt $\frac{2}{4}$. ad $\frac{2}{3}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. ad $\frac{2}{3}$. Igitur erit vt $\frac{1}{4}$. prioris magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiusdem, ita $\frac{1}{2}$. posterioris magnitudinis ad $\frac{2}{3}$. eiusdem. *a 1. quinti.*

PROPOSITIO II.

RECTANGVLVM sub diametro, & circumferentia maximi circuli in sphæra comprehensum, quadruplum est circuli maximi, & superficiei conuexæ eiusdem sphæræ æquale.

SIT rectangulum A B, comprehensum sub diametro AC, & circumferentia CB, maximi in sphæra circuli. Dico rectangulum AB, quadruplũ esse circuli maximi in sphæra, & superficiei conuexę eiusdem sphærę æquale. Sectis enim omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, iunctisque rectis EG, FH, secantibus se se in I, diuisum erit totum rectangulum in quatuor ęqualia AI, CI, BI, DI, *b* quod rectæ E G, FH, rectis AD, AC, parallelæ sint. Ac proinde rectangulum A B, rectanguli CI, quadruplum erit. Est autem rectangulum CI, contentum sub C E, semidiametro, & semicircumferentia C F, circulo maximo, cuius nimirum diameter A C, æquale, vt lib. 4. cap. 7. Num. 1. demonstratum est. Igitur rectangulum A B, circuli maximi quadruplum est. Et quia eiusdem circuli maximi quadrupla est superficies conuexa sphæræ, per propos. 31. lib. 1. Archimedis de sphæra, & Cylindro: *c* æquale erit rectangulum AB, conuexæ superficiei, quod erat demonstrandum. *b 33. primi* *c 9. quinti.*



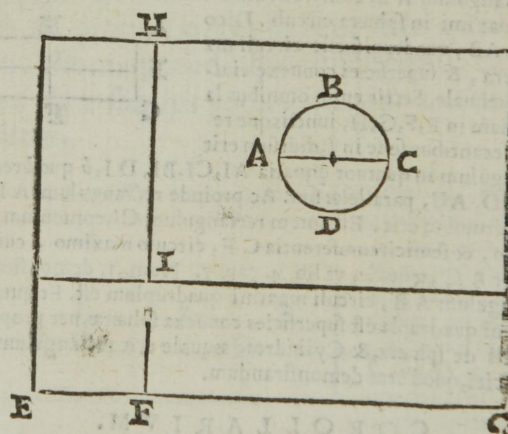
COROLLARIVM.

EX demonstratione liquet, rectangulum sub diametro cuiusuis circuli, (etiamsi non sit maximus in sphæra,) & circumferentia eiusdem, quadruplum esse ipsius circuli. Eadem enim semper demonstratio adhibebitur.

PROPOSITIO III.

EADEM est proportio quadrati circũferentiæ circuli maximi in sphæra ad superficiem sphæræ, quæ circumferentiæ circuli maximi ad diametrum. Item eadem est proportio quadrati diametri maximi circuli in sphæra ad superficiem sphærę, quæ diametri ad circumferentiam eiusdem circuli maximi.

SIT circulus sphæræ maximus ABCD, eiusque diameter AC. Dico ita esse quadratum ex circumferentia ABCD, descriptum ad superficiem sphæræ, cuius diameter A C, vt est circumferentia ABCD, ad diametrum AC. Item ita esse quadratum diametri A C, circuli maximi in sphæra, ad superficiem sphærę, vt est diameter AC, ad circumferentiam A B C D. Sit enim EF, diametro A C, & recta F G, circumferentiæ A B C D, æqualis, & super FG, construatur quadratum GH, capiaturque FI, ipsi EF, ęqualis; eritque



EI, quadratum diametri EF, vel A C. Perfecta autem figura, vt vides, erit tam rectangulum GI, sub semidiametro FI, maximi circuli, & circumferentia FG, quam rectangulum EH, sub diametro E F, eiusdem circuli maximi, & circumferentia FH, ęquale, per præcedentẽ, superficiei conuexæ sphæræ.

a 1. *sexti.* a Cum ergo sit, vt GH, quadratum ex circumferentia F G, descriptum ad rectangulum EH, superficiei conuexæ sphæræ æquale, ita GF, circumferentia ad EF, diametrum circuli maximi, constat primum.

a ITEM

a ITEM cum sit, vt E I, quadratum diametri EF, maximi circuli, ad IG, rectangulum superficiei conuexæ sphæræ æquale, ita EF, diameter maximi circuli ad FG, circumferentiam, patet id, quod secundo loco proponitur. *a 1. sexti.*

COROLLARIVM.

HINC manifestum est (id quod lib. 4. cap. 7. Num. 1. etiam demonstrauimus) circuli aream gigni tam ex $\frac{1}{4}$. diametri in totam circumferentiam, quam ex $\frac{1}{4}$. circumferentiæ in totam diametrum. Cum enim circulus A B C D, sit quarta pars rectanguli GI, quòd hoc illius quadruplum sit ostensum propos. 2. *b* Contineatur autem quarta pars rectanguli G I, tam sub $\frac{1}{4}$. diametri F I, & circumferentia F G, quam sub $\frac{1}{4}$. circumferentiæ FG, & diametro FI; liquido constat, quod proponitur. Area circuli. *b 1. sexti.*

PROPOSITIO IIII.

QVADRATVM circumferentiæ circuli maximi in sphæra ad superficiem sphæræ conuexam, maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem vero, quam 22. ad 7.

CVM enim per præcedentem sit, vt quadratum circumferentiæ maximi circuli ad superficiem conuexam sphæræ, ita circumferentia eiusdem circuli ad diametrum: *c* sit autem maior proportio circumferentiæ ad diametrum, quam $3\frac{10}{71}$. ad 1. hoc est, quam 223. ad 71. minor vero, quam $3\frac{1}{7}$. ad 1. hoc est, quam 22. ad 7. liquet id, quod propositum est. *c 2. de Dimens. circuli lib. 4.*

PROPOSITIO V.

QVADRATVM diametri circuli in sphæra maximi ad superficiem sphæræ conuexam, maiorem proportionem habet, quam 7. ad 22. minorem vero, quam 71. ad 223.

CVM enim per propos. 3. sit, vt quadratum diametri ad superficiem sphæræ, ita diameter ad circumferentiam: *d* Sit autem maior proportio diametri ad circumferentiam, quam 7. ad 22. (*e* quod minor sit proportio circumferentiæ ad diametrum, quam 22. ad 7.) minor verò, quam 71. ad 223. (*e* quod maior sit proportio circumferentiæ ad diametrum, quam 223. ad 71.) patet verum esse, quod proponitur. *d 26. quinti* *e 2. de Dimens. circuli lib. 4.*

PRO-

PROPOSITIO VI.

PROPORTIO cubi ex circumferentia maximi in sphæra circuli descripti, ad sphæram maior est, quā 298374. ad 5041. minor autem, quam 2904. ad 49.

CVM enim sit per propos. 1. cap. 7. lib. 4. vt circumferentia maximi circuli in quauis sphæra, ad circumferentiam maximi circuli in quauis alia sphæra, ita diameter ad diametrum: *a* habeat autem cubus circumferentiæ prioris sphæræ ad cubum circumferentiæ sphæræ posterioris, proportionem triplicatam circumferentiæ ad circumferentiam; *b* Item sphæra prior ad posteriorem sphæram, proportionem triplicatam diametri ad diametrum: erit vt cubus ex circumferentia prioris sphęræ descriptus ad cubum ex posterioris sphæræ circumferentia descriptum, ita sphęra prior ad posteriorem sphæram; Et permutando, vt cubus circumferentiæ sphæræ prioris ad priorem sphæram, ita cubus circumferentię posterioris sphæræ ad sphæram posteriorem.

a 33. vndec.
b 18. duode.

IAM vero, si circumferentia circuli maximi alicuius sphęræ sit 1. diuidaturq. per $3\frac{10}{71}$. producetur diameter $\frac{71}{223}$. maior quam vera, ex coroll. propos. 2. de dimensione circuli. Si igitur eius semissis $\frac{71}{446}$. in $\frac{1}{2}$. semissem circumferentiæ ducatur, procreabitur area circuli maximi $\frac{71}{892}$. maior, quam vera: quæ rursus ducta in $\frac{2}{3}$. diametri inuentæ, (quæ etiam maior est, quam vera) nimirum in $\frac{142}{669}$. gignet, vt infra in regula 2. ostendam, soliditatē sphæræ $\frac{10082}{596748}$. hoc est $\frac{5041}{298374}$. maiorem tamen, quam veram. *c* Maior ergo erit proportio cubi ex circumferentia 1. descripti, qui cubus est 1. ad spheram, quam ad $\frac{5041}{298374}$. Cum ergo sit 1. ad $\frac{5041}{298374}$ vt 298374. ad 5041. (Quoniam enim ex propositione 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Euclid. eadem est proportio Numeratoris 5041. ad denominatorē 298374. quæ minutiæ $\frac{5041}{298374}$ ad suum integrum 1. erit conuertendo, vt 298374. ad 5041. ita 1. ad $\frac{5041}{298374}$) maior erit proportio cubi ex circumferentia 1. descripti, qui cubus est 1. ad sphæram, quam 298374. ad 5041. Cum igitur ita se habeat cubus ex circumferentia maximi circuli in sphæra qualibet descriptus ad sphæram, vt cubus circumferentiæ 1. ad suam sphæram, vt initio huius propos. ostendimus; Constat id, quod primo loco proponitur.

c 8. quinti.

RVRSVS si circumferentia 1. diuidatur per $3\frac{1}{7}$. producetur diameter $\frac{7}{22}$. minor quam vera, ex coroll. propos. 2. de dimensione circuli. Si igitur eius semissis $\frac{7}{44}$. ducatur in $\frac{1}{2}$. semissem circumferentiæ, procreabitur area circuli maximi $\frac{7}{88}$. minor, quam vera: quæ rursus ducta in $\frac{2}{3}$. diametri inuentæ (quæ etiam minor est, quam vera) nimirum in $\frac{14}{66}$. hoc est in $\frac{7}{33}$. producet, vt infra in regula 2. docebo, soliditatem sphæræ $\frac{49}{2904}$. minorem tamē, quam veram. *d* Minor ergo erit proportio cubi ex circumferentia 1. descripti, qui cubus est 1. ad sphæram, quam ad $\frac{49}{2904}$. Cum ergo sit 1. ad $\frac{49}{2904}$ vt 2904. ad 49. (Quoniam enim ex propos. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Eucl. eadem proportio est Numeratoris 49. ad denominatorem

d 8. quinti.

2904. quæ minutiæ $\frac{}{2}\frac{4}{9}\frac{9}{0}\frac{}{4}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 2904. ad 49. ita 1. ad $\frac{}{2}\frac{4}{9}\frac{9}{0}\frac{}{4}$.) minor erit proportio cubi deſcripti ex circumferentia 1. qui cubus eſt 1. ad ſphæram, quam 2904. ad 49. Cum igitur ita ſe habeat cubus ex circumferentia maximi circuli ſphæræ cuiuslibet deſcriptus, ad ſphæram, vt cubus circumferentiæ 1. ad ſuam ſphæram, vt initio huius propoſitionis demonſtrauimus, patet etiam id, quod ſecundo loco propoſitum erat.

PROPOSITIO VII.

CVBVS diametri ſphæræ ad ſphæram, maiorem proportionem habet, quam 21. ad 11. minorem vero, quam 426. ad 223.

CVM enim ſit, vt cubus diametri cuiuslibet ſphęræ ad cubum diametri alterius ſphæræ, ita ſphæra ad ſphæram *a*; quod vtraque proportio ſit tripli- *a 33. vndec.*
cata proportionis diametrorum: erit permutando, vt cubus diametri cuiuſ- *& 18. duo-*
libet ſphæræ ad ipſam ſphęram, ita cubus diametri alterius ſphæræ ad ip- *dec.*
ſam ſphæram.

QVOD ſi diameter alicuius ſphæræ ponatur 1, multipliceturque per
$3\frac{1}{7}$. *b* proueniet circuli maximi circumferentia $\frac{2}{}\frac{2}{7}$. maior quam vera. *b corol. 2. de*
Eius ergo ſemiſſis $\frac{1}{}\frac{1}{7}$. in $\frac{1}{2}$. ſemiſſem diametri ducta efficiet $\frac{1}{1}\frac{1}{4}$. aream *Dimẽs. cir*
ipſius maximi circuli vera maiorem: ac proinde ſi hæc area maior, quam *culi.*
vera, ducatur in $\frac{2}{3}$. diametri, gignetur, vt infra in regula 2. dicetur, ſolidi-
tas ſphæræ $\frac{2}{4}\frac{2}{2}$. hoc eſt, $\frac{1}{2}\frac{1}{1}$. maior quam vera. *c* Igitur cubus diametri *c 8, quinti.*
1. qui eſt 1. ad ſphęram, proportionem habebit maiorem, quam ad $\frac{1}{2}\frac{1}{1}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{1}{2}\frac{1}{1}$. vt 21. ad 11. (Quia enim ex propoſ. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Eucl. eadem eſt proportio Numeratoris 11. ad Denominatorem 21. quæ Minutiæ $\frac{1}{2}\frac{1}{1}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo vt 21. ad 11. ita 1. ad $\frac{1}{2}\frac{1}{1}$.) maior erit proportio cubi 1. ex diametro 1. deſcripti ad ſphæram, quam 21. ad 11. Et quia, vt initio huius propoſitionis oſtendimus, ita eſt cubus diametri cuiuſuis alterius ſphæræ ad ipſam ſphæram, vt cubus diametri 1. ad ſuam ſphæram, verum eſt, quod primo loco eſt propoſitum.

d ITEM ſi diameter 1. ducatur in $3\frac{1}{7}\frac{0}{1}$. producetur circumferentia *d corol. 2. de*
maximi circuli $\frac{2}{}\frac{2}{7}\frac{3}{1}$. minor quam vera. Eius ergo ſemiſſis $\frac{2}{1}\frac{2}{4}\frac{3}{2}$. du- *Dimẽs. cir-*
cta in $\frac{1}{2}$. ſemiſſem diametri 1. faciet $\frac{2}{2}\frac{2}{8}\frac{3}{4}$. aream circuli maximi vera *culi.*
minorem; ideoque ſi ea ducatur in $\frac{2}{3}$. diametri 1. procreabitur, vt infra
in regula 2. dicetur, ſoliditas ſphæræ $\frac{4}{8}\frac{4}{5}\frac{6}{2}$. hoc eſt, $\frac{2}{4}\frac{2}{2}\frac{3}{6}$. minor,
quam vera. *e* Igitur cubus 1. diametri 1. ad ſphæram habebit proportionẽ *e 8. quinti.*
minorẽ, quam ad $\frac{2}{4}\frac{2}{2}\frac{3}{6}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{2}{4}\frac{2}{2}\frac{3}{6}$. vt 426. ad 223. (Quia enim ex propoſ. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Euclid. eadem proportio eſt Numeratoris 223. ad denominatorem 426. quæ Minutiæ $\frac{2}{4}\frac{2}{2}\frac{3}{6}$, ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 426. ad 223. ita 1. ad $\frac{2}{4}\frac{2}{2}\frac{3}{6}$.) minor erit proportio cubi diametri 1. ad ſuam ſphæram, quam 426. ad 223. Quoniam

vero

vero, vt ad initium huius propositionis ostendimus, ita est cubus diametri cuiuslibet sphæræ alterius ad ipsam sphæram, vt cubus diametri 1. ad suam sphæram, liquet etiam id, quod secundo loco propositum est.

2 HIS præmissis, sequuntur regulæ ad inuestigandam tam superficiem conuexam cuiuslibet sphæræ, quam eiusdem soliditatem.

I.

SVPERFICIEM conuexam propositæ sphæræ adinuenire.

Superficies conuexa sphæræ.

AREA maximi circuli datæ sphæræ quadruplicetur. Productus enim numerus conuexam sphæræ superficiem exhibebit: propterea quod per propos. 31. lib. 1. Archimedis de sphæra, & Cylindro, superficies sphæræ quadrupla est circuli maximi.

EADEM superficies procreabitur, si diameter sphæræ in circumferentiam circuli maximi ducatur: propterea quod per propos. 2. Num. 2. huius cap. rectangulum sub diametro, & circumferentia maximi circuli comprehensum superficiei conuexæ sphæræ est æquale.

II.

SOLIDITATEM propositæ sphæræ exquirere.

Soliditas sphæræ.

1 *SPHAERAE soliditas producitur ex eius semidiametro in tertiam partem superficiei conuexæ. Vel ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{2}{3}$. conuexæ superficiei.*

2 *ITEM ex duabus tertijs partibus diametri in aream circuli maximi.*

3 *VEL ex duabus tertijs partibus areæ circuli maximi in totam diametrum.*

4 *VEL ex semidiametro in quatuor tertias partes areæ circuli maximi.*

5 *VEL ex semisse areæ circuli maximi in quatuor tertias partes diametri.*

6 *VEL ex dupla diametro in tertiam partem areæ circuli maximi,*

7 *VEL ex diametro in sextam partem superficiei sphæræ.*

8 *VEL denique ex tertia parte diametri in semissem superficiei conuexæ sphæræ.*

Demonstratio primæ partis.

PRIMVM demonstratum à nobis est in commentarijs in sphæram, quam demonstrationem repetemus lib. 7. de Isoperimetris. Idem tamen aliter hac ratione demonstrabimus. Concipiatur conus, cuius basis maximus circulus sphæræ, & altitudo semidiameter eiusdem. Item alius conus, cuius basis quadrupla sit maximi circuli, & altitudo semidiameter eadem.

Et quia prioris coni tam ſphæra, per propoſ. 32. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro, quadrupla eſt, *a* quam poſterior conus: *b* erunt poſterior conus, & ſphæra inter ſe æquales. a 11. *duode.* b 9. *quinti.*

RVRSVS quia circulus, cuius ſemidiameter æqualis eſt toti diametro ſphæræ, quadruplus eſt circuli maximi. *b* (cum enim ſit circulus ad circulum, vt quadratum diametri ad quadratum diametri: quadratum autem prioris diametri quadruplum ſit quadrati diametri poſterioris, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Eucl. quòd illa diameter ſit huius dupla; quandoquidem ſemiſsis prioris diametri ſumpta eſt poſteriori diametro æqualis; erit quoque circulus circuli quadruplus.) erit idem circulus, cuius ſemidiameter diametro ſphæræ æqualis eſt, æqualis baſi poſterioris coni, cum huius baſis quadrupla etiam poſita ſit maximi circuli. Quia vero etiam ſuperficies ſphęræ quadrupla eſt circuli maximi, ex propoſ. 31. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro: *c* Erunt ſuperficies ſphæræ, baſis poſterioris coni, & circulus ſemidiametrum habens æqualem diametro ſphæræ, inter ſe æquales. b 2. *duodec.* c 9. *quinti.*

POSTREMO concipiatur cylindrus, cuius baſis ſit prædictus circulus ſemidiametrum diametro ſphærę habens æqualem, altitudo vero ſemidiameter ſphæræ. *d* Erit hic cylindrus triplus poſterioris coni prędicti: ac proinde & ſphæræ, quæ ei cono eſt oſtenſa æqualis. *e* Idem autem cylindrus triplus quoque eſt cylindri, qui eandem habeat altitudinem, & baſem tertiæ parti illius cylindri, hoc eſt, tertiæ parti ſuperficiei ſphæræ, æqualem. *f* Ergo poſterior cylindrus, (baſem habens tertiæ parti ſuperficiei ſphęræ æqualem, altitudinem vero ſemidiametro eiuſdem ſphæræ æqualem.) & ſphæra æquales ſunt. Cum ergo cylindrus hic poſterior contineatur ſub ſemidiametro ſphęræ, & tertia parte ſuperficiei ſphæricæ: liquido conſtat, ſphæræ ſoliditatem gigni, ex ſemidiametro in partem tertiam ſuperficiei ſphæræ. Vel ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{2}{3}$. ſuperficiei ſphæræ: cum hic numerus illi ſit æqualis, quod eſt primum. d 10 *duode.* e 11. *duode.* f 9. *quinti.*

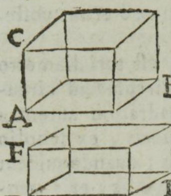
CONCIPIATVR rurſum cylindrus, cuius baſis maximus circulus ſphæræ, & altitudo diameter ſphęræ. Erit hic cylindrus ſeſquialter ſphæræ, ex coroll. propoſ. 32. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro. Quod ſi ex parte ſuperiori per tertiam partem diametri ſphæræ, vel axis cylindri, ducatur baſibus cylindri planum parallelum: *g* erit totus cylindrus ad cylindrum abſciſſum, cuius axis duæ tertiæ partes ſunt totius axis, ſeſquialter; *h* Ac proinde poſterior hic cylindrus abſciſſus, qui quidem continetur ſub maximo circulo, nempe ſub ſua baſi, & duabus tertijs partibus diametri ſphæræ, ſphæræ æqualis erit. Patet igitur etiam ſecundum. Demonſtratio ſecundæ partis. g 13. *duode.* h 9. *quinti.*

ALITER.

SIT parallelepipedum ABC, comprehenſum ſub AC, duabus tertijs partibus diametri ſphæræ, & ſub baſi AB, quæ circulo maximo eiuſdem ſphæræ ſit æqualis. Dico parallelepipedum ABC, ſphæræ æquale eſſe. Sit enim aliud parallelepipedum DEF, contentum ſub DF, ſemidiametro ſphæræ, & ſub baſe DE, quæ tertiæ parti ſuperficiei ſphæræ ſit æqualis. quod vt in prima parte huius 2. regulæ demonſtrauimus, æquale erit ſphæræ propoſitæ. Quia ergo baſis AB, circulo maximo ſphæræ æqualis, eſt $\frac{1}{4}$. ſuperficiei ſphæræ; erit ex coroll. propoſ. 1. huius cap. vt AB, hoc eſt, vt $\frac{1}{4}$. ſuperficiei ſphæræ ad DE, id eſt, ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem ſuperficiei, ita DF, hoc eſt,

ita $\frac{1}{2}$. diametri sphæræ, ad A C, id est, ad $\frac{2}{3}$. eiusdem diametri. Ac proinde cum bases AB, DE, cum altitudinibus DF, AC, reciprocentur, *a* parallelepipeda ABC, DEF, æqualia inter se erunt. Cum ergo DEF, sphæræ æquale sit, vt dictum est, erit quoque A B C, eidem sphæræ æquale. quod est propositum.

a 34. *vnde.*



ALITER.

b 19. *sept.*

Quoniam ex coroll. propos. 1. huius cap. est, vt $\frac{1}{4}$. superficiei sphæræ ad $\frac{1}{3}$. eiusdem superficiei, ita $\frac{1}{2}$. diametri ad $\frac{2}{3}$. eiusdem diametri: *b* idem numerus efficietur ex primo numero, nimirum ex $\frac{1}{4}$. superficiei, id est, ex circulo maximo sphæræ, in quartum, nimirum in $\frac{2}{3}$. diametri, qui ex secundo, id est, ex $\frac{1}{3}$. superficiei in tertiũ, hoc est, in $\frac{1}{2}$. diametri. Sed ex $\frac{1}{3}$. superficiei in $\frac{1}{2}$. diametri soliditas sphæræ procreatur, vt in prima parte huius 2. regulæ ostensum est. Igitur eadem soliditas ex circulo maximo in $\frac{2}{3}$. diametri gignetur. quod est propositum.

Demonstratio tertiæ partis.
c 11. *duode.*
d 9. *quinti.*

RVRSVS quia cylindrus, cuius basis circulus maximus sphæræ, & altitudo diameter eiusdem, sesquialter est ipsius sphæræ, ex coroll. propos. 32. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro: *c* Idemque cylindrus sesquialter etiam est cylindri, cuius basis æqualis sit duabus tertijs partibus circuli maximi, & altitudo eadem diameter; *d* erũt posterior hic cylindrus, & sphæra æquales: hoc est, sphæra producetur ex $\frac{2}{3}$. areæ maximi circuli in diametrum sphæræ. quod est tertium.

Demonstratio quartæ partis.
e 34. *vndec.*

CONCIPIANTVR quoque duo parallelepipeda, quorum vnius basis sit $\frac{2}{3}$. areæ maximi circuli in sphæra æqualis, & altitudo toti diametro: alterius vero basis æqualis sit $\frac{4}{3}$. areæ circuli maximi, & altitudo semidiametro. Et quia horum parallelepipedorum bases cum altitudinibus reciprocantur: quod tam prioris basis subdupla sit basis posterioris, quam altitudo posterioris altitudinis prioris: *e* erunt ipsa parallelepipeda æqualia. Sed prius, per tertiam partem huius 2. regulæ, æquale est soliditati sphæræ. Igitur & posterius. Ideoque sphæra producetur ex semidiametro in $\frac{4}{3}$. areæ circuli maximi. quod quarto loco proponitur.

Demonstratio quintæ partis.
f 34. *vndec.*

PRAETEREA concipiantur duo parallelepipeda, quorum vnius basis æqualis sit areæ circuli in sphæra maximi, & altitudo æqualis $\frac{2}{3}$. diametri: alterius vero basis æqualis sit $\frac{1}{2}$. areæ circuli maximi, & altitudo $\frac{4}{3}$. diametri. Et quia horum parallelepipedorum bases reciprocantur cum altitudinibus; quod tam basis in priori dupla sit basis in posteriori, quam altitudo in posteriori altitudinis in priori: *f* æqualia erunt ipsa parallelepipeda: Sed prius est, per 2. partem huius 2. regulæ, æquale sphæræ. Igitur, & posterius: atque idcirco sphæra gignetur ex $\frac{1}{2}$. areæ circuli maximi in $\frac{4}{3}$. diametri. quod est quintum.

Demonstratio sextæ partis.
g 34. *vndec.*

ITEM intelligantur duo parallelepipeda, quorum vnius basis æqualis sit $\frac{2}{3}$. areæ circuli maximi in sphæra, & altitudo diametro: alterius vero basis æqualis sit $\frac{1}{3}$. areæ maximi circuli, & altitudo duplæ diametro. Et quia horum parallelepipedorum bases cum altitudinibus reciprocantur: quòd tam basis in priori sit dupla basis in posteriori, quam altitudo in posteriori altitudinis in priori: *g* erunt ipsa parallelepipeda æqualia: Sed prius per 3. partem huius 2. regulæ, æquale est ipsi sphæræ. Igitur & posterius;

Ac proinde ſphæra ex dupla diametro in $\frac{1}{3}$. areæ circuli maximi procreabitur. quod ſexto loco eſt propoſitum.

INTELLIGANTVR quoque duo parallelepipeda, quorum vnius baſis contineat $\frac{1}{3}$, ſuperficiei ſphæræ, & altitudo $\frac{1}{2}$. diametri: alterius vero baſis comprehendat $\frac{1}{6}$; ſuperficiei, & altitudo æqualis ſit diametro. Et quoniam baſes cum altitudinibus ſunt reciprocæ, quod ita ſit $\frac{1}{3}$. ſuperficiei, baſis videlicet prioris parallelepipedi, ad $\frac{1}{6}$. ſuperficiei, id eſt, ad baſem poſterioris, vt altitudo poſterioris, nempe diameter, ad prioris altitudinem, nimirum ad $\frac{1}{2}$. diametri, cum vtraque proportio ſit dupla: *a* ipſa parallelepipeda æqualia erunt: Sed prius ipſi ſphæræ, per 1. partem huius 2. regulæ æquale eſt. Igitur, & poſterius: hoc eſt, ſphæræ ſoliditas producetur ex diametro in ſextam partem ſuperficiei. quod eſt ſeptimum.

Demonſtratio ſeptimæ partis.

a 34. *vndec.*

DENIQVE concipiantur duo parallelepipeda, quorum vnius baſis ſit $\frac{1}{3}$. ſuperficiei ſphęræ, & altitudo ſemidiameter: alterius autem baſis ſit $\frac{1}{2}$. ſuperficiei, & altitudo $\frac{1}{3}$. diametri. Quia vero baſes, & altitudines reciprocantur, quod ita ſit $\frac{1}{3}$. ſuperficiei ad $\frac{1}{2}$. ſuperficiei, nimirum baſis prioris parallelepipedi ad baſem poſterioris, vt $\frac{1}{3}$. diametri ad $\frac{1}{2}$. diametri, altitudo videlicet poſterioris parallelepipedi ad altitudinem prioris; *b* æqualia erunt ipſa parallelepipeda. Cum ergo, per 1. partem huius 2. regulæ, prius ſit ſphæræ æquale, eidem quoque poſterius æquale erit: Ac propterea ſphæræ ſoliditas producetur ex tertia parte diametri in ſemiſſem conuexæ ſuperficiei. quod eſt octauum.

Demonſtratio octauæ partis.

b 34. *vnde.*

3 IAM vero ex propoſ. 4. & 5. huius cap. Num. 1. colliguntur quatuor ſequentes regulæ, per quas ſuperficies ſphærę conuexa inuenitur tum maior quam vera, tum minor, tam ex circumferentia, quam ex diametro circuli maximi.

I.

EX circumferentia circuli in ſphęra maximi ſuperficiem conuexam ſphæræ procreare vera maiorem.

FIAT vt 223. ad 71. ita quadratum ex circumferentia maximi circuli data deſcriptum ad aliud, prodibitque ſphæræ ſuperficies maior quam vera. Cum enim per propoſ. 4. huius cap. Num. 1. maior ſit proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi ad ſuperficiem ſphæræ, quam 223. ad 71. ſit autem quadratum datæ circumferentiæ ad numerum procreatum, vt 223. ad 71. habebit quoque quadratum circumferentiæ datæ ad ſuperficiem ſphæræ veram, maiorem proportionem, quàm idem quadratum ad numerum productum: *c* ideoque productus numerus maior erit ſuperficie vera.

Superficies ſphæræ maior, quam vera.

c 10. *quinti*

II.

EX circumferentia circuli in sphęra maximi superficiem sphæræ conuexam vera minorem eruere.

Superficies sphæræ minor, quam vera.

FIAT vt 22. ad 7. ita quadratum ex circumferentia maximi circuli data descriptum ad aliud. Numerus enim genitus minor erit vera superficie sphæræ. Cum enim per propos. 4. huius cap. Num. 1. minor sit proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi ad superficiem sphæræ, quam 22. ad 7. Sit autem quadratum datæ circumferentiæ ad numerum genitum, vt 22. ad 7. habebit quoque quadratum datæ circumferentiæ ad superficiem veram sphæræ, minorem proportionem, quàm idem quadratum ad numerum productum. *a* Quam ob rem numerus productus vera superficie sphæræ minor erit.

a 10. *quinti*

III.

EX diametro circuli in sphæra maximi superficiem sphæræ vera maiorem elicere.

Superficies sphæræ maior, quam vera.

FIAT vt 7. ad 22. ita quadratum diametri datæ circuli maximi ad aliud, gigneturque superficies sphæræ maior, quam vera. Nam cum, per propos. 5. huius cap. Num. 1. maior sit proportio quadrati diametri circuli maximi ad superficiem sphæræ veram, quam 7. ad 22. Sit autem quadratum diametri datæ ad productum numerum, vt 7. ad 22. habebit quoque quadratum datæ diametri ad superficiem veram sphæræ, maiorem proportionem, quam idem quadratum ad productum numerum. *b* Quocirca procreatus numerus maior erit, quam vera superficies sphæræ.

b 10. *quinti*

IIII.

EX diametro circuli in sphæra maximi superficiem sphæræ vera minorem colligere.

Superficies sphæræ minor, quam vara.

FIAT vt 71. ad 223. ita quadratum datæ diametri circuli maximi ad aliud. Numerus namque genitus superficiem sphæræ vera minorem exhibebit. Quoniam enim per propos. 5. huius cap. Num. 1. minor est proportio quadrati diametri ad superficiem sphæræ, quam 71. ad 223. Est autem quadratum datæ diametri ad productum numerum, vt 71. ad 223. Erit quoque minor proportio quadrati datæ diametri ad veram superficiem sphæræ quam eiusdem quadrati ad numerum productum. *c* Quapropter minor erit produ-

c 10. *quinti*

productus numerus, quam vera superficies sphæræ.

4 PARI ratione ex propos. 6. & 7. huius c. Num. 1. eliciuntur quatuor aliæ sequentes regulæ, per quas tam ex circumferentia, quam ex diametro maximi circuli in sphæra, eruitur soliditas sphæræ tum maior, quam vera, tum minor.

I.

EX circumferentia circuli maximi in sphæra soliditatem sphæræ producere vera maiorem.

FIAT vt 298374. ad 5041. ita cubus ex data circumferentia maximi circuli descriptus ad aliud. Numerus enim genitus dabit sphæræ soliditatem vera maiorem. Nam cum, per propos. 6. huius cap. Num. 1. maior sit proportio cubi datæ circumferentiæ ad sphæram, quam 298374. ad 5041. Sit autem cubus datæ circumferentiæ ad numerum procreatum, vt 298374. ad 5041. habebit quoque cubus datæ circumferentiæ ad sphæræ soliditatem veram, maiorem proportionem, quam idem cubus ad productum numerum: *a* Ideoque productus numerus maior erit, quam vera soliditas sphæræ.

Soliditas sphæræ maior, quam vera.

a 10. *quinti*

II.

EX circumferentia circuli maximi in sphæra soliditatem spheræ vera minorem procreare.

FIAT, vt 2904. ad 49. ita cubus datæ circumferentiæ ad aliud. Nam productus numerus offeret sphæræ soliditatem vera minorem. Cum enim, per propos. 6. huius cap. Num. 1. minor sit proportio cubi circumferentiæ datæ ad sphæram, quam 2904. ad 49. sit autem cubus datæ circumferentiæ ad numerum procreatum, vt 2904. ad 49. habebit quoque cubus datæ circumferentiæ ad veram soliditatem sphæræ, minorem proportionem, quam idem cubus ad numerum productum. *b* Ideoq. numerus productus minor erit vera soliditate sphæræ.

Soliditas sphæræ minor, quam vera.

b 10. *quinti*

III.

EX diametro maximi circuli in sphæra soliditatem sphæræ colligere vera maiorem.

Soliditas sphæræ maior, quam vera.

FIAT vt 21. ad 11. ita cubus diametri datæ ad aliud. Procreatus namque numerus soliditatem sphæræ dabit vera maiorem. Cum enim per propos.

pos. 7. huius cap. Num. 1. maior sit proportio cubi diametri sphæræ ad sphæram, quàm 21. ad 11. Sit autem cubus datæ diametri ad numerum productum, vt 21. ad 11. habebit quoque maiorem proportionem cubus datæ diametri ad veram soliditatem sphæræ, quàm idem cubus ad numerum genitũ.
a 10. quinti — *a* Qua propter numerus procreatus maior erit vera soliditate sphæræ.

IIII.

EX diametro maximi circuli in sphæra soliditatem sphæræ concludere vera minorem.

Soliditas sphæræ minor, quam vera.

FIAT vt 426. ad 223. ita cubus datæ diametri ad aliud. Numerus enim proueniens minor erit, quàm vera soliditas sphæræ. Nam cũ per propos. 7. huius cap. Num. 1. minor sit proportio cubi datæ diametri ad sphæram, quàm 426. ad 223. Sit autem cubus diametri datæ ad procreatum numerum, vt 426. ad 223. habebit quoque cubus datæ diametri ad sphæram, proportionem minorem, quàm idem cubus ad numerum genitum. *b.* Quare minor erit numerus productus, quàm vera soliditas spheræ.
b 10. quinti

DE AREA SEGMENTORUM sphæræ.

Caput VI.

Superficies cõuexa hemisphærij.



1 HEMISPHERII *superficies conuexa, exclusa base, gignitur ex area maximi circuli per 2. multiplicata. Vel ex semidiametro in circumferentiam maximi circuli. Vel deniq. ex tota diametro in semissem circumferentiæ maximi circuli.* Quæ omnia perspicua sunt ex 1. regula Num. 2. capitis 5. propterea quod hi numeri producti sunt semisses illorum, qui superficiem conuexam totius sphæræ in ea regula exhibuerunt.

Superficies cõuexę portionis sphæræ.

2 SVPERFICIES *conuexa cuiuslibet portionis sphæræ hemisphærio minoris, vel maioris, dempta base, æqualis est circulo, cuius semidiameter æqualis est rectæ lineæ, quæ à vertice portionis ad circumferentiam basis ducitur. ex propos. 40. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro.* Sit enim maximus in sphæra circulus ABCD, cuius diameter AC, quam in E, ad angulos rectos secet BD, recta, per quam intelligatur duci planum diametro ad angulos rectos, secans sphæram in duas portiones, quarum basis communis circulus diametri BD, & A, vertex minoris portionis, maioris autem vertex C. Iunctis autem rectis AB, CB; erit circulus semidiametri AB,

super-

ſuperficiei conuexæ minoris portionis, & circulus ſemidiametri CB, cõuexæ ſuperficiei maioris portionis æqualis, ex dicta propoſ. Archimedis. Quare ſi vtraq. AB, CB, in partibus diametri AC, fiat nota, præſertim ope inſtrumenti partium cap. 1. lib. 1. conſtructi, & areæ circulorum ad interualla ſemidiametrorum AB, CB, deſcriptorum inueſtigentur, per ea, quæ lib. 4. cap. 7. ſcripſimus; notæ erunt ſuperficies conuexæ dictarum portionum ſphæræ.



EADEM ſuperficies conuexa portionis ſphæræ hemiſpherio minoris, vel maioris, ita quoque cognoſcetur. Ex demonſtratis ab Archimede propoſ. 3. lib. 2. de ſphæra, & cylindro, eandẽ proportionem habet EC, ad EA, quam ſuperficies conuexa portionis ſphæræ baſem habentis circulum diametri BD, & verticem C, ad ſuperficiem conuexam portionis baſem habentis eundem circulum diametri BD, & verticem A. Igitur componendo quoque erit, vt tota diameter AC, ad AE, ita ſuperficies conuexa totius ſphæræ ad ſuperficiem conuexam portionis BAD. Eademq. ratione erit, vt tota diameter AC, ad EC, ita conuexa ſuperficies totius ſphæræ ad ſuperficiem conuexam portionis BCD. Quocirca, inueſtigata proportione diametri AC, ad ſegmenta AE, EC, per inſtrumentum partium cap. 1. lib. 1. conſtructum; ſi fiat, vt diameter AC, ad AE, ita ſuperficies conuexa totius ſphæræ, (quæ ex regula 1. Num. 2. cap. 5. huius lib. cognita fiet) ad aliud, proueniet conuexa ſuperficies portionis minoris BAD. Similiq. modo ſuperficies conuexa maioris portionis BCD, cognoſcetur; ſi fiat, vt diameter AC, ad EC, ita ſuperficies conuexa totius ſphæræ ad aliud.

ET quia, vt ex Archimede oſtendimus, ita eſt diameter AC, ad AE, vel ad EC, vt tota ſuperficies ſphæræ ad ſuperficiem portionis BAD, vel BCD: erit quoque ita AF, ſemiſſis diametri ad AE, vel EC, vt hemiſpherij ſuperficies GAH, ad ſuperficiem portionis BAD, vel BCD. quod oſtendetur eodem modo, quo ſcholium propoſ. 22. lib. 5. Euclid. eſt demonſtratum: Si fiat, vt ſemidiameter ſphæræ AF, ad AE, vel EC, altitudinem portionis, ita hemiſphærij GAH, ſuperficies ad aliud; producetur rurſus conuexa ſuperficies portionis minoris BAD, vel maioris BCD.

IMMO cum ſit vt AF, ſemidiameter ad AE, ita hemiſphærij GAH, ſuperficies ad ſuperficiem portionis BAD, *a* erit per conuerſionem rationis, vt AF, ſemidiameter ad EF, ita ſuperficies hemiſphærij GAH, ad ſuperficiẽ fruſti GBDH, dẽptis baſibus. Ergo EF, eadẽ pars erit, vel partes diametri AC, vel ſemidiametri AF, quæ pars eſt, vel partes ſuperficies fruſti GBDH, demptis baſibus, ſuperficiei totius ſphæræ, vel hemiſphærij GAH. Quam ob rem cognito, quæ pars ſit EF, vel partes ſemidiametri AF, ſi ex ſuperficie hemiſphærij GAH, eadem pars auferatur, vel partes, reliqua fiet ſuperficies conuexa minoris portionis BAD. Et ſi ad hemiſphærij GCH, ſuperficiem adijciatur eadem pars, vel partes, conflabitur conuexa ſuperficies portionis maioris BCD. Verbi gratia, ſi EF, contineat $\frac{3}{5}$. ſemidiametri AF, & ex ſuperficie hemiſphærij GAH, tollantur $\frac{3}{5}$. reliqua fiet ſuperficies conuexa portionis minoris BAD: Et ſi $\frac{3}{5}$. ſuperficiei hemiſphærij adijciantur

a corol. 19. quinti.

tur

tur ad superficiem hemispherij GCH, conficietur superficies conuexa maioris portionis BCD. Sic si EF, esset semissis semidiametri, auferenda esset ex hemisphærij superficie semissis ipsius, vel adijcienda: Et sic de cæteris.

Soliditas hemisphærij.

3 HEMISPHAERII soliditas producitur ex semidiametro in tertiam partem superficiei hemisphærij: Vel in sextam partem superficiei totius sphæræ. Vel ex $\frac{1}{4}$ totius diametri in $\frac{2}{3}$ superficiei hemisphærij.

ITEM ex duabus tertijs partibus diametri in semissem areæ circuli maximi.

VEL ex duabus tertijs partibus areæ circuli maximi in semidiametrum: Aut ex tertia parte areæ circuli maximi in totam diametrum.

VEL ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{4}{3}$. areæ circuli maximi.

VEL ex semisse areæ circuli maximi in $\frac{2}{3}$. diametri.

VEL ex dupla diametro in $\frac{1}{6}$. areæ circuli maximi.

VEL ex semidiametro in sextam partem superficiei sphæræ.

VEL denique ex $\frac{1}{6}$. diametri in superficiem hemisphærij conuexam: quæ omnia ex 2. regula Num. 2. c. 5, colliguntur: cũ omnes hi numeri producti sint semisses illorum, qui soliditatẽ totius sphæræ in ea regula indicant.

Soliditas sectoris sphæræ.

4 SOLIDITAS sectoris sphæræ (qui nimirum componitur ex minore portione sphæræ, & cono basem habente eandem cum portione, & altitudinem æqualem perpendiculari ex centro in basem portionis deductæ; Vel qui relinquitur, si idem conus ex portione maiore subtrahitur. Vt in proxima figura, solidum compositum ex portione sphæræ BAD, basem habente circulum diametri BD, & ex cono habente eandem basem, & verticem in centro F: Item solidum, quod relinquitur, si conus idem ex portione maiore BCD, dematur, appellamus sectorem sphæræ.) hac ratione inuestigabitur. Quoniam per propos. 42. lib. 1. Archimedis de sphæra & cylindro, sectori sphæræ æqualis est conus basem habens circulum æqualem superficiei conuexæ portionis sphæræ, altitudinem vero semidiametro sphæræ æqualem: Conus autẽ producitur, vt cap. 2. huius lib. Num. 1. declarauimus, vel ex base in $\frac{1}{3}$. altitudinis: Vel ex tota altitudine in $\frac{1}{3}$. basis; fit vt sector sphæræ gignatur vel ex superficie conuexa portionis sphæræ in $\frac{1}{3}$. semidiametri, hoc est, in $\frac{1}{6}$. totius diametri: Vel ex semidiametro in $\frac{1}{3}$. superficiei conuexæ portionis sphæræ.

Soliditas cuiuslibet portionis sphæræ.

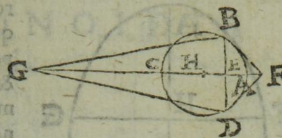
5 SOLIDITAS vero cuiuscunque portionis sphæræ hoc modo procreabitur. Inuestigetur soliditas sectoris sphæræ, vt proxime traditum est. Nam si, quando portio proposita minor est hemisphærio, ex hoc sectore dematur conus eandem habens cum portione basem, altitudinem vero perpendicularem ex centro sphæræ in basem portionis cadentem, reliqua fiet soliditas portionis minoris: At vero si, quando portio proposita hemisphærio maior est, idem conus ad sectorem adijciatur, conflabitur soliditas portionis maioris. Id quod perspicuum est in superiori figura, cum conus BFD, ablatus ex sectore ABFDA, reliquam faciat portionem minorem BAD: Idem vero conus BFD, additus sectori CBFDC, constituat maiorem portionem BCD. Conus porrò prædictus BFD, cognitus fiet ex base, nimirũ ex circulo diametri BD, & altitudine EF, cognitis, vt cap. 2. huius lib. Num. 1. docuimus.

ALITER.

SIT in sphæra circulus maximus ABCD, & portiones sphæræ, quarum basis communis circulus diametri BD, & vertices A, C, quarũ soliditates exquiren-

quirendæ sunt. Ex centro H, ducatur ad BD, perpendicularis HE, *a* quæ rectam BD, secabit bifariam, *b* ac proinde & vtrumque arcum BAD, BCD, bifariam, hoc est, per uertices A, C, transibit. *c* Fiat, vt CE, ad summam rectarum CH, CE, ita AE, ad EF: Item, vt AE, ad summam rectarum AH, AE, ita EC, ad EG. Intelliganturque duo coni, quorum basis communis circulus diametri BD, & vertices F, G. Erit per propos. 2. lib. 2. Archimedis de sphæra, & cylindro, conus BFD, portioni minori BAD, & conus BGD, portioni maiori BCD, æqualis. Quocirca, inuentis horum conorum soliditatibus, vt cap. 2. huius lib. Num. 1. traditum est, inuentæ quoque erunt soliditates portionum BAD, BCD. quod est propositum.

a 3. *tertij.*
b *schol.* 27. *tertij.*
c 12. *sexti.*

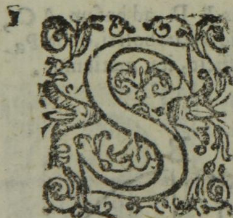


6 SOLIDITAS denique cuiuscunque frusti sphæræ, siue bases sint parallelæ, cuiusmodi est in 1. figura huius cap. frustum BDHG, inter circulos diametrorum BD, GH, inclusum, siue non parallelæ, quale est frustum BDLK, hoc pacto inuenietur. Inuestigetur, vt Num. 5. diximus, vtriusque portionis ABD, AGH, soliditas. Minori enim detracta ex maiore, reliqua erit soliditas frusti BDHG. Sic etiam, inuento I, vertice portionis KIL, si inueniatur soliditas vtriusque portionis BCD, KLI, minorque ex maiore tollatur, remanebit soliditas frusti BDLK, nota.

Soliditas cuiuslibet frusti sphæræ.

DE AREA SPHAEROIDIS, EIVSDEMque portionum.

Caput VII.

1 

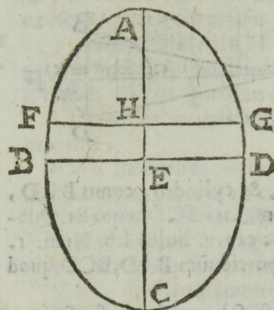
IT Ellipsis ABCD, cuius maior axis AC, minor BD, priorem ad angulos rectos secans. Soliditatem ergo Sphæroidis, id est, solidi ex circumuolutione Ellipsis circa axem effecti, ita nanciscemur. Quoniam planum per BD, ductum, & rectum ad axem AC, circulum facit, vt à Federico Commandino ad propos. 12. libri Archimedis de Conoidibus, & Sphæroidibus demonstratur, cuius diameter BD, & centrum E; erit per propos. 29. libri Archimedis de Conoid. & Sphæroid. semissis Sphæroidis ABD, dupla coni eandem basem cum illa semisse, circulum videlicet diametri BD, habentis, & altitudinem eandem EA. Igitur si huius coni soliditas per cap. 2. huius lib. inuestigetur, & duplicetur, exurget soliditas semissis Sphæroidis: quæ duplicata soliditatem totius Sphæroidis exhibebit.

Soliditas sphæroidis.

2 DVCATVR minori axi BD, parallela FG, secans maiorem axem in H, ad rectos angulos. Si igitur per FG, ducatur planum rectum ad axem, fiet circulus in Sphæroide diametrum habens FG, & centrum H, vt Federi-

cus Commandinus ad propoſ. 12. lib. Archim. de Conoid. & Sphæroid. demonſtrauit; abſcindenturq. portiones Sphęroidis FAG, minor & FCG, maior. Vtriuſque ſoliditas ita fiet cognita. Quoniam per propoſ. 31. libri Archimedis de Conoid. & Sphæroid. Conus, cuius baſis circulus diametri FG, & axis HA, ad minorem portionem ſphæroidis FAG, proportionem habet, quam maioris portionis axis H C, ad ſummam rectarum EC, HC: Si fiat, vt HC, maioris portionis axis ad ſummam rectarum EC, HC, ita conus prædictus ad aliud, (qui quidem conus ex cap. 2. huius lib. cognitus erit.) prodibit ſoliditas minoris portionis ſphæroidis FAG.

Soliditas portionum ſphæroidis.



RVRSVS quia per propoſ. 33. libri Archim. de Conoid. & Sphæroid. conus, cuius baſis circulus diametri FG, & axis HC, ad maiorem portionem Sphæroidis FCG, proportionem habet, quam minoris portionis axis H A, ad ſummam rectarum EA, HA: ſi fiat, vt HA, minoris portionis axis ad ſummam rectarum EA, HA, ita prædictus conus (quem per cap. 2. huius lib. metieris) ad aliud, procreabitur ſoliditas maioris portionis ſphæroidis F C G.

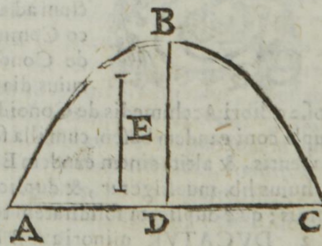
DE AREA CONOIDIS parabolici.

Caput VIII.



SIT Parabola A B C, cuius axis B D, ad baſem A C, rectus. Soliditatem igitur Conoidis parabolici, quod Parabola circa axem circumducta efficit, ita metiemur. Quoniam per ea, quę ad propoſ. 12. libri Archim. de Conoid. & Sphæroid. Federicus Commandinus demonſtrauit, planum per AC, ductum, & rectum ad axē BD, circulum facit, cuius diameter AC, & centrum D: erit per propoſ. 23. libri Archim. de Conoid. & Sphæroid. Parabolicum Conoides ABC, ſeſquialterū coni, cuius baſis circulus diametri A C, & axis BD. Igitur ſi fiat, vt 2. ad 3. ita prædictus conus (quem ex cap. 2. huius libri metiemur) ad aliud; proſiliet ſoliditas Conoidis Parabolici ABC.

Soliditas conoidis Parabolici.



DE

DE AREA CONOIDIS Hyperbolici.

Caput IX.

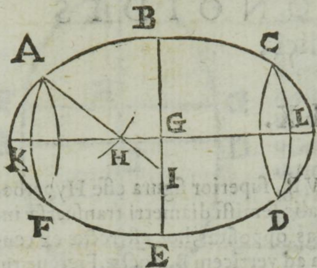

ONCIPIATVR superior figura esse Hyperbola,& recta E, æqualis semissi diametri transuersæ inter duas hyperbolas oppositas,hoc est,rectæ ex centro hyperbolarum ad verticem B, ductæ. Fietque rursus circulus,cuius diameter A C, à plano per A C, ducto, & ad axem recto, vt Federicus Commandinus ad propos. 12.libri. Archim. de conoid.& sphæroid. demonstrauit. Soliditatem igitur Conoidis Hyperbolici, quod ab hyperbola ABC, circa axem B D, circumuoluta efficitur, ita venabimur. Quoniam per propos. 27. lib. Archimedis de Conoid.& Sphæroid. Conoides Hyperbolicum ABC,ad conum, cuius basis eadem cum base Conoidis, circulus videlicet diametri AC,& axis idem BD, proportionem habet eandem, quam linea conflata ex axe BD, & tripla ipsius E,ad lineam conflatam ex axe B D, & dupla ipsius E. Si fiat,vt linea conflata ex axe BD,& dupla ipsius E,ad lineam conflatam ex axe BD, & tripla ipsius E,ita prædictus conus (quem ex cap. 2. huius libri dimetiemur) ad aliud;gignetur soliditas Conoidis Hyperbolici ABC. Soliditas Conoidis Hyperbolici.

DE AREA DOLIORVM

Caput X.


Voniam dolia non eandem formam vbique seruant, vix præscribi potest ratio, qua dolij propositi capacitas accurate inueniaaur. Argumento est, quod scriptores varie de eius Dimensione scripserunt. Dicam ergo etiam ego id, quod mihi verisimile videtur. Sit dolium ABCDEF, in extremitatibus habens circulos AF,CD,orificium B,per quod cogitetur planum ductum rectum ad lineam K L, centra circulorum AF, CD, coniungentem, secans dolium bifariam. Si igitur asseres dolij in B, & E,curuentur, & deinde secundum lineas quasi rectas extendantur, cuiusmodi dolia non pauca Romæ vidi:referent semisses dolij ABEF,CDEB, conos decurtatos : quos si per ea, quæ cap. 3.huius libri scripta sunt,metieris,dabit eorum summa dolij propositi capacitatem. Memor tamen esto, profunditatem dolij B E, & diametrum Capacitas dolij.

circuli AF, mensurandam esse intra asseres, ita, vt eorum crassities excludantur; vt habeatur decurtatus conus, cuius bases sint circuli BE, AF, &c.



2 SI vero asseres dolij verè sint aliquo modo circulares, quod nonnulli asserunt, concipiendum erit dolium, tanquam frustum quoddam Sphæroidis. Nam curuitas asserum sensibiliter a curuitate Sphæroidis, cuius axes sunt rectæ KL, BE, non different. Sed quia solum axis minor, nimirum profunditas dolij, data est, reperiemus ex puncto A, in Ellipsi dato, maiorem axem KL, hoc modo. Interuallo semissis minoris axis B G, describatur ex A, arcus secans in H, rectam G H, ad angulos rectos ipsi minori axi per eius punctum medium G, ductam: & ex A, per H, recta emittatur secans minorem axem in I. Recta enim AI, dabit semisses GK, GL, maioris axis, vt lib. 1. nostri Astrolabij in scholio Lemmatis 50. demonstrauimus. Itaque si tam semissis sphæroidis BKE, quam portio minor AKF, mensuretur, vt cap. 7. traditum est, & soliditas portionis AKF, ex soliditate semissis BKE, detrahatur, remanebit capacitas semissis dolij ABEF, quæ duplicata totius dolij capacitatem exhibebit. Vtramque hanc rationem dolij dimetiendi à vera dolij capacitate non longe abesse arbitror. Paratus tamen interim sum, si quis accuratiorem inuenerit, eam libenti animo, & grato acceptare.

Capacitas dolij alio modo.

DE AREA CORPORVM OMNINO irregularium.

Caput XI.

1 TRADVNT scriptores nonnulli regulam quandam mechanicam ad corpora dimetienda, quę omnino sunt irregularia, ita vt sub regulas Geometricas, quæ hactenus explicatæ sunt, cadere non possint: cuiusmodi sunt statuæ, vrnæ, amphoræ, frusta saxorum, quæ neque vniformis sunt crassitiei, neque latera habent prorsus recta, aut ad bases perpendicularia, &c. Hæc ergo regula, quæ nullo modo videtur aspernanda, ita se habet.

Soliditas cuiuslibet corporis irregularis.

PARETVR arca lignea ex asseribus leuigatis, instar parallelepipedi cuiusdam, quæ pice ita oblinatur, vt aquam continere possit. Arca hæc tantę debet esse longitudinis, latitudinis, atque altitudinis, vt corpus metiendum intra ipsam positum, aqua totum possit operiri. Posita autem hac arca Horizonti æquidistante, beneficio libellæ, aut perpendiculi, infundatur in

in eam tantum aquæ, quantum satis est, vt corpus impositum omnino tegat, notenturque diligenter suprema latera aquæ in asseribus arcæ, vt habeatur altitudo aquæ vsque ad arcæ fundum. Extracto deinde corpore, ita tamen, vt nihil aquæ extra arcam cadat, notentur rursum latera aquæ, postquam quieuerit. Quod si per cap. 1. huius lib. metiamur duo parallelepipeda, quorum basis communis est arcæ fundus, siue basis, altitudines vero rectæ à lateribus aquæ notatis vsque ad basem, & minus à maiore subtrahamus, relinquetur parallelepipedum soliditati corporis propositi omnino æquale. quod parallelepipedum etiam consequeris, si altitudinem inter latera aquæ bis notata duces in basem arcæ. Sunt, qui infusa aqua in arcam, latera eius in asseribus primo loco notent. Deinde imposito corpore, eiusdem aquæ latera signent. Si enim altitudo inter posteriora latera, ac priora ducatur in basem arcæ, producetur soliditas corporis impositi.

2 PRO vrnis, atque amphoris, siue eæ lapideæ sint, siue cretaceæ, ita faciemus. Impleatur vas arena, & eius orificium ita obturetur, vt aqua ingredi nullomodo possit. Imposito deinde vase in aqua intra arcam contenta, ac si esset corpus quodpiã irregulare, inuestigetur eius soliditas, vt Num. 1. diximus. Deinde extracta arena, notentur latera aquæ, antequã uas vacuũ imponatur. Imposito denique vase vacuo, signentur iterum latera aquæ. Si namque altitudo inter posteriora, ac priora latera multiplicetur per basem arcæ: procreabitur soliditas solius vasis: quæ detracta ex priori soliditate, notam relinquet vasis capacitatem.

DE SVPERFICIE CONVEXA CONI & cylindri recti.

Caput XII.

1 
VONIAM ex Archimede demonstrauimus, qua ratione superficies conuexa, sphæræ, eiusque portionum inuestiganda sit: non deerit fortasse, qui idem desideret in cono, ac cylindro recto. quod ex ijs, quæ ab eodem Archimede in lib. 1. de sphæra, & cylindro demonstrata sunt, obtinebit hoc modo. Proposito cono recto quocunque, erit eius superficies conuexa conica, seclusa base, æqualis circulo, cuius semidiameter est linea media proportionalis inter latus coni, & semidiametrum basis eiusdem coni, ex propos. 14. lib. 1 Archimedis de sphæra, & cylindro.

Superficies conica, dempta base, cui circulo sit æqualis.

2 QVOD si conus rectus secetur plano, quod basi æquidistet, erit superficies conuexa frusti coni, demptis basibus, æqualis circulo, cuius semidiameter est linea media proportionalis inter latus conicum frusti, & rectam

Superficies frusti coni, demptis basibus, cui circulo æqualis sit.

Proportio conicę superficiei ad suã basem. ctam ex semidiametris duarum basium conflatam, ex propos. 16. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro.

ITEM superficies conica coni recti ad suam basem, proportionem habet eandem, quam latus coni ad semidiametrum basis coni eiusdem, ex propos. 15. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro.

Superficies cylindrica, demptis basibus, cui circulo sit ęqualis. 4 DENIQVE superficies conuexa cylindri recti, demptis basibus, æqualis est circulo, cuius semidiameter est linea media proportionalis inter latus cylindri, & diametrum basis cylindri eiusdem, ex propos. 13. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro.

FINIS LIBRI QVINTI.

GEOME-

GEOMETRIAE PRACTICAE LIBER SEXTVS.



In quo de Geodæſia, & de figuris augendis, minuendiſque in data proportione: Item de duarum mediarum proportionalium inter duas datas rectas inuentione: Ac denique de radicum extractione agitur.



EXPEDITIS ijs, quæ de magnitudinum dimenſionibus initio propoſuimus, reſtat vt de rectilinearum ſuperficierum etiam diuiſione agamus: quæ Geometriæ practicæ pars proprio nomine Geodæſia vocatur. Nam δαίω idem ſignificat, quod partior, vel diuido. Scio pleroſque partem etiã illã, quæ magnitudines, & terrã metitur, appellare Geodæſiam; Sed hi, auctore Pediaſimo de menſuratione & partitione terræ, longè à veritate aberrant. *Nam, inquit,*

quit, terræ mensuratio duas in partes diuiditur, Geometriam scilicet, & Geodaesiam. Areæ namque secundum artem mensuratio, & terræ mensuratio est, & merito Geometria vocatur. vnius vero, & eiusdem areæ, seu loci diuisio inter diuersas personas, partitio quædam est terræ, & iure optimo Geodaesia appellatur. Hæc Pediasimus.

Geometria & Geodesia quid.

EDIDIT quidem Federicus Commandinus anno 1570. libellum de superficierum diuisionibus Machometo cuidam Bagdedino Arabi adscriptum: ipseque eadem de re alium breuiorem, & magis vniuersalem conscripsit: estque sane libellus vterque acutissimus, & eruditione refertissimus. Idem vero postea argumentum alia via aggressus est, & meo certe iudicio, faciliori & magis generali, Simon Steuinius Brugensis: sed in qua aliquid desiderari videatur, vt omnibus supeficiebus rectilineis (quod ipse velle videtur) conuenire possit. quod facile iudicabunt, qui illius problemata Geometrica attente perlegerint. Res enim proposita nulla ratione confici potest, nisi prius duæ propositiones demonstrentur, quarum priorem ipse sine demõstratione assumit pro principio, posterioris vero ne meminit quidem, cum tamen admodum sit necessaria, & quam Machometus Bagdedinus demonstrauit paulo aliter, quam nos. Has ergo duas propositiones ad initium huius lib. demonstrabimus, & posteriorem quidem longe generalius, quam à Machometo factum est. quod beneuolo Lectori iudicandum relinquo. Deinde superficierum rectilinearum diuisionem aggrediemur, insistentes eiusdem Steuinij vestigijs, nisi quando generalius rem oportebit demonstrare. Nihil autem de ratione Machometi, & Federici Commandini dicemus: tum quia libellus ipsorum in

mani-

manibus omnium eſt, ac propterea eum, quicunque volet, legere poterit: tum quia propoſita aliqua figura multorum angulorum, non ſine difficultate, ac labore eam ſtudioſus diuidet, niſi diuiſionis omnium præcedentium figurarum memor ſit, quod in noſtra ratione non accidit: tum denique quia illorum ratio ſolum figuris ordinarijs conuenit, quæ videlicet omnes angulos habent introrſum, tot nimirum, quot latera figura ipſa continet, noſtra autem via figuras etiam illas complectitur, quæ angulos habent partim introrſum, & partim extrorſum vergentes.

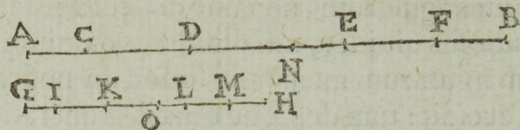
THEOREMA 1. PROPOSITIO 1.

SI magnitudo in quotuis partes ſecetur vtcunque, & alia quæpiam magnitudo in totidem partes ordine illis proportionales: habebunt quotlibet partes prioris magnitudinis ſimul ad reliquas omnes partes ſimul eandem proportionem, quam totidem partes poſterioris magnitudinis ſimul ad reliquas omnes partes ſimul. Et ſi quælibet pars prioris magnitudinis ſecetur in duas partes vtcunque, ſecetur autem & pars poſterioris magnitudinis illi parti reſpondens in alias duas partes duabus illis proportionales: erunt quoque ibidē totæ magnitudines ſectæ proportionaliter.

SIT magnitudo AB, ſecta in quotuis partes vtcunque AC, CD, DE, EF, FB: & alia magnitudo qualiſcunque GH, etiamſi diuerſi ſit generis, ſecta in totidem partes GI, IK, KL, LM, MH, illis ordine proportionales. Dico ita eſſe, verbi gratia, duas partes AC, CD, ſimul ad reliquas tres DE, EF, FB, ſimul, vt ſunt duæ GI, IK, ſimul ad reliquas tres KL, LM, MH, ſimul, &c. Quoniam enim eſt, vt AC, ad CD, ita GI, ad IK, erit componendo etiam, vt AD, ad CD, ita GK, ad IK: Vt autem CD, ad DE, ita eſt IK, ad KL. Igitur ex æqualitate erit, vt AD, ad DE, ita GK, ad KL.

RVRSVS quia conuertendo eſt, vt BF, ad FE, ita HM, ad ML; erit quoque componendo, vt BE, ad FE, ita HL, ad ML: Vt autem FE, ad ED, ita eſt

ML, ad LK. Igitur ex æqualitate erit, vt BE, ad ED, ita HL, ad LK; & com-



ponendo, vt BD, ad ED, ita HK, ad LK: & conuertendo, vt DE, ad DB, ita KL, ad KH. Itaque cum ostensum sit, esse vt AD, ad DE, ita GK, ad KL, & vt DE, ad DB, ita KL, ad KH: erit ex æqualitate, vt AD, ad DB, ita GK, ad KH.

NON aliter ostendemus esse, vt AC, ad CB, ita GI, ad IH. Nam rursus conuertendo, componendo, & ex æqualitate erit vt BC, ad DC, ita HI, ad KI; & conuertendo, vt CD, ad CB, ita IK, ad IH. Cum ergo sit, vt AC, ad CD, ita GI, ad IK, & vt CD, ad CB, ita IK, ad IH; erit ex æqualitate, vt AC, ad CB, ita GI, ad IH.

PARI ratione erit, vt AF, ad FB, ita GM, ad MH. Erit namque rursus componendo, & ex æqualitate, vt AF, ad EF, ita GM, ad LM. Cum ergo sit quoque, vt EF, ad FB, ita LM, ad MH: erit ex æqualitate, vt AF, ad FB, ita GM, ad MH; & sic de cæteris. Constat igitur primum.

DEINDE pars v. g. tertia DE, secta sit vtcunq. in partes duas DN, NE; & tertia quoque pars KL, in duas KO, OL, illis proportionales. Dico esse quoque vt AN, ad NB, ita GO, ad OH. Erit enim conuertendo, vt EN, ad ND, ita LO, ad OK: & componendo, vt ED, ad DN, ita LK, ad KO. Quare cum sit, vt CD, ad DE, ita IK, ad KL, & vt DE, ad DN, ita KL, ad KO: erit ex æqualitate, vt CD, ad DN, ita IK, ad KO, atque ita partes AC, CD, DN, partibus GI, IK, KO, proportionales sunt.

RVRSVS quia est conuertendo, vt FE, ad ED, ita ML, ad LK; & componendo, vt DE, ad NE, ita KL, ad OL; erit ex æqualitate, vt FE, ad EN, ita ML, ad LO; & conuertendo, vt NE, ad EF, ita OL, ad LM; ac proinde omnes partes AC, CD, DN, NE, EF, FB, omnibus partibus GI, IK, KO, OL, LM, MH, proportionales sunt. Igitur vt in prima parte demonstratum est, erit vt AN, ad NB, ita GO, ad OH. Constat ergo etiam secundum.

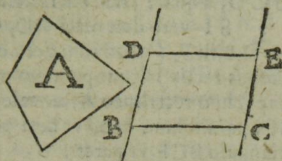
PROBLEMA 1. PROPOSITIO 2.

DATO rectilineo, super datam rectam inter alias duas rectas interceptam, constituere quadrilaterũ æquale, cuius latus oppositum inter duas easdem rectas interceptũ datæ rectæ sit parallelum. Et datis duobus rectilineis inæqualibus quibuscunque, ex maio-

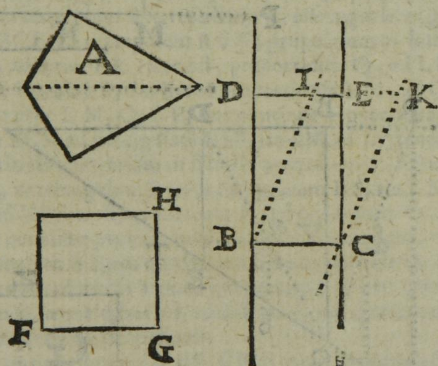
re

re per lineam vni lateri parallelam detrahere rectilineum minori æquale, quando id fieri poteſt, quod ex ipſa problematis ſolutione cognoſcetur.

1 SIT rectilineum datum A, & recta data BC, inter duas rectas B D, CE, intercepta: oporteatque primum conſtituere rectilineo A, æquale quadrilaterum ſuper datam rectam B C, cuius latus oppoſitum inter eaſdem rectas B D, C E, interceptum datæ rectæ B C, ſit parallelum. Et ſi quidem duæ rectæ BD, CE, ſint parallelæ (quod tum demum eueniet, cum duo anguli B, C, æquales ſunt duobus rectis) efficietur problema, *a* ſi ſuper rectam B C, conſtituetur parallelogrammum B E, ſiue in angulo B C E, ſiue in angulo C B D, rectilineo A, æquale. a 45. primi



2 QVANDO anguli B, C, recti ſunt, facilius problema efficiemus hac ratione. Rectilineo dato A, conſtituatur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius Geometriæ practicæ ſcripſimus, quadratum FGH, æquale: reſoluendo videlicet rectilineum in triangula, vel trapezia, & cuilibet triangulo, vel trapezio æ-



quale quadratum conſtituendo, ac tandem omnia illa quadrata ad vnum redigendo, vt locis citatis fuſe explicauimus. Deinde duabus rectis B C, FG, inueniatur tertia proportionalis B D, ac per D, ipſi B C, parallela agatur

a 17. sexti. DE. Rectangulum enim BE, rectilineo dato A, æquale erit; *a* cum quadrato FGH, æquale sit; propterea quod tres rectæ BC, F G, BD, continue proportionales sunt.

IMMO eodem hoc artificio vti poterimus, quando parallelæ B I, CK, non faciunt angulos rectos ad B, & C. Nam constituto rectangulo CD, æquali quadrato FH, id est, rectilineo A, vt dictum est: si producatur latus D E, b 35 primi. donec secet rectas BI, CK, in I, K, *b* erit parallelogrammum B K, rectangulo C D, æquale, hoc est, rectilineo A.

3 SI vero duæ rectæ BD, CE, non sint parallelæ, conueniant ad partes D, E, in F, (quod tum fiet, cum duo anguli DBC, E C B, minores sunt duobus rectis) sitque primum propositum super B C, versus F, constituere trapezium rectilineo A, æquale, habens latus rectæ B C, oppositum eidem BC, parallelum. quod vt fieri possit, necesse est, rectilineum A, minus esse triangulo BCF, vt patet.

RECTILINEO ergo A, construatur per ea, quæ in scholio propos. 14. lib.

c 14. secũdi 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius, vt proxime diximus, æquale quadratum G, cuius latus HI. *c* Item triangulo BCF, æquale quadratum K, cuius latus LM. Deinde duabus rectis L M, H I: reperiatur

riatur tertia proportionalis LN. Inuenta autem recta O, media proportionali inter LM,& MN; fiat vt LM, ad O, ita BF, ad FD; ac tandem per D, ipsi BC, parallela agatur DE. Dico Trapezium BE, rectilineo A, æquale esse. *a* Quoniam enim triangulum BCF, ad triangulum DEF, duplicatam proportionem habet lateris BF, ad latus DF, hoc est, rectæ LM, ad rectam O: Habet autem & LM, ad MN, duplicatam proportionem eius, quam habet LM, ad O, quod LM, O, MN, sint continue proportionales. Igitur erit vt triangulum BCF, ad triangulum DEF, ita LM, ad MN; Et per conuersionem rationis, vt triangulum BCF, ad Trapezium BE, ita LM, ad LN. *b* Cum ergo sit, vt LM, ad LN, ita quadratum K, ad quadratum G, quod LM, HI, LN, continue sint proportionales, erit quoque vt triangulum BCF, ad trapeziū BE, ita quadratum K, ad quadratū G, hoc est, ita triangulum BCF, quod ipsi K, æquale est, ad rectilineū A, ipsi G, æquale. Quocirca cum triāgulum BCF, ad trapezium BE, & ad rectilineum A, eandem habeat proportionem; *c* æqualia erunt trapezium BE, & rectilineum A, quod est propositum.

a 19. *sexti.*
b *coroll.* 20. *sexti.*
c 9. *quinti.*

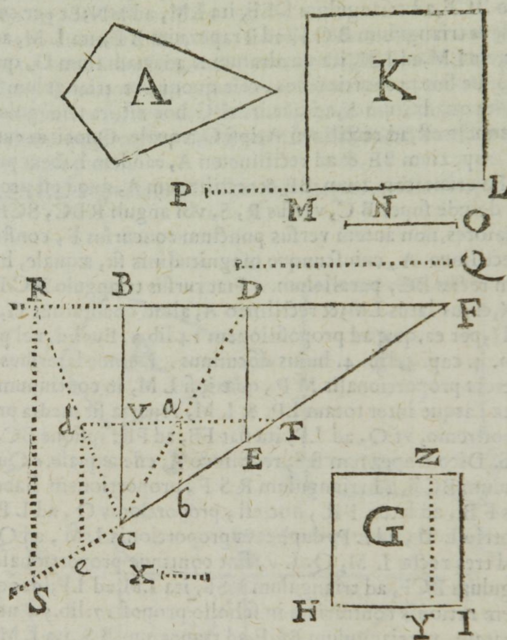
4 SIT deinde super BC, versus R, S, vbi anguli RBC, SCB, duobus rectis sunt maiores, non autem versus punctum concursus F, construendum trapezium rectilineo A, cuiuscunque magnitudinis sit, æquale, habens latus oppositum rectæ BC, parallelum. *d* Fiat rursus triangulo BCF, æquale quadratum K, cuius latus LM; & rectilineo A, aliud quadratum G, æquale, cuius latus HI, per ea, quæ ad propositionem 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius docuimus. Deinde lateribus LM, HI, inueniatur tertia proportionalis MP, quæ ipsi LM, in continuum & directum sit posita: atque inter totam LP, & LM, reperta sit media proportionalis Q: ac postremo, vt Q, ad LP, ita fiat FB, ad FR: ipsique BC, parallela agatur RS. Dico trapezium BS, rectilineo A, esse æquale. *e* Quoniam enim triangulum BCF, ad triangulum RSF, proportionem habet duplicatam lateris FB, ad latus FR, hoc est, proportionis Q, ad LP; Est autem & proportio LM, ad LP, duplicata proportionis LM, ad Q, vel Q, ad LP, quòd tres rectæ LM, Q, LP, sint continue proportionales. Igitur erit vt triangulum BCF, ad triangulum RSF, ita LM, ad LP; ideoque etiam per diuisionem rationis contrariam in scholio propos. 17. lib. 5. Euclid. à nobis demonstratam, vt triangulum BCF, ad trapezium BS, ita LM, ad MP. *f* Vt autem LM, ad MP, ita est, quadratum K, ad quadratum G, quod tres LM, HI, MP, sint continue proportionales. Igitur erit quoque, vt triangulum BCF, ad trapezium BS, ita quadratum K, ad quadratum G. Cum ergo triangulo BCF, constructum sit æquale quadratum K: *g* erit quoque trapezium BS, quadrato G, æquale, hoc est, rectilineo A, cui quadratum G, constructum est æquale. quod est propositum.

d 14. *secūdi*
e 19. *sexti.*
f *coroll.* 20. *sexti.*
g 14 *quinti*

5 QVOD si quando duæ rectæ BF, CF, in tam remoto puncto concurrant, vt vix haberi possit, (quod quidem tunc accidet, cum ipsæ rectæ fere parallelæ sunt) absoluemus problema, etiamsi punctum concursus F, non habeamus, hunc in modum. Sumpto vtcunque puncto T, in altera earum, nimirum in CF, agatur TV, alteri BF, parallela; & duabus BC, CV, inueniatur tertia proportionalis X. Constructo deinde ex scholio propos. 14. lib. 2. Euclid. vel potius, vt Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius docuimus, quadrato G, æquali rectilineo A, inueniatur tribus BC, X, HI, quarta proportionalis IY, agaturque YZ, lateribus quadrati parallela. *h* Et quoniam est, vt triangu-

h *coroll.* 19. *sexti.*

a 1. *sexti.* lum BCF, (si perficeretur,) ad triangulum VCT, ita recta BC, ad rectã X, hoc est, ita HI, ad IY, *a* hoc est, ita quadratum G, ad rectangulum IZ: Est autem triangulum BCF, maius quadrato G, siue rectilineo A: (quando enim ad partes angulorum, qui duobus rectis minores sunt, construendum est tra-



b 14. *quinti* peziũ dato rectilineo æquale, debet esse triãgulũ maius rectilineo) *b* erit quoque triangulũ VCT, maius rectãgulo IZ. Igitur vt Num. 3. traditum est, construatur trapeziũ Vb, rectangulo IZ, æquale: & tribus rectis CV, Va, CB, inuẽta quarta proportionali BD, *c* (trãsibit autẽ recta ducta C a, per D, si quarta BD, ritè est inuenta, *d* ita vt viciſſim recta Ca, si exquisitè ducatur, exhibeat quartã proportionalem quæsitam BD,) demittatur DE, ipsi BC, parallela. Dico trapezium BE, dato rectilineo A, æquale esse. Quoniam enim trapezium BE, trapezio V b, simile est, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 6. Euclid. demonstrauimus; *e* erit trapezium BE, ad trapezium V b, vt recta BC, ad rectam X, hoc est, vt recta HI, ad I Y, *f* hoc est, vt quadratum G, ad rectangulum I Z. Cum ergo trapezium V b, rectangulo IZ, æquale sit; *g* erit quoque trapezium BE, quadrato G, hoc est, rectilineo A, æquale, quod est propositum.

c *schol. 4. sexti.*
d 4. *sexti.*
e *coroll. 20. sexti.*
f 1. *sexti.*
g 14. *quinti*

6 NON aliter ex alia parte angulorum R B C, SCB, qui duobus re-

ctis

ctis sunt maiores, etiamsi punctum concursus F, non habeatur, trapezium
constituemus rectilineo A, æquale, cuiuscunque magnitudinis illud pona-
tur. Neque enim in hoc casu necesse est, ipsum esse minus triangulo BCF,
si perficeretur. Ducta namque ex quolibet puncto T, rectæ CF, ipsi BF, pa-
rallela TV, eaque producta, inueniatur duabus rectis BC, CV, tertia propor
tionalis X. Constructo deinde quadrato G, quod rectilineo A, sit æquale, re-
periatur tribus rectis BC, X, & HI, quarta proportionalis IY, agaturq; YZ, la
teribus quadrati parallela, ita vt rursus sit triãgulũ BCF, ad triangulũ VCT,
sicut quadratũ G, ad rectangulum IZ. Post hæc, vt Num. 4. præcepimus, re-
ctangulo IZ, construatur trapezium æquale V e, & tribus rectis CV, V d,
CB, inuenta quarta proportionali BR, *a* (transibit autem recta C d, ducta — a *schol. 4. se*
per R: si quarta BR, recte inuenta est: *b* ita vt vicissim recta C d, si accura- — *xti.*
te ducatur, abscindat quartam proportionalem quæsitam BR,) demittatur — b 4. *sexti.*
R S, ipsi BC, parallela. Dico trapezium BS, rectilineo A, æquale esse. Quo
niam enim trapezium B S, trapezio V e, simile est, per ea, quæ in scholio
propos. 18. lib. 6. Euclid. monstrata sunt à nobis; *c* erit trapezium B S, ad — c *coroll. 20.*
trapezium V e, vt recta BC, ad rectam X; hoc est, vt recta H I, ad rectam — *sexti.*
IY, *d* hoc est, vt quadratum G, ad rectangulum I Z. Cum ergo trapezium — d 1. *sexti.*
V e, rectangulo IZ, æquale sit; *e* erit quoque trapezium BS, quadrato G, hoc — e 14. *quinti*
est, rectilineo A, æquale. quod est propositum.

7 IAM vero datis duobus rectilineis quibuscunque A, & BÇDEFG-
HI, sit ex posteriore, quod maius ponatur, auferendum rectilineum habens
latus lateri BI, parallelum, æquale priori A, quod minus statuatur, si fieri
quidem id poterit. Fieri autem poterit semper in figuris omnes angulos
habentibus introrsum, in alijs vero non semper. Per ea, quæ in scholio pro-
pos. 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius tra-
didimus, construatur quadratum KM, rectilineo minori A, æquale. De-
inde ex angulo C, qui lateri BI, proximus est, ducta lateri B I, parallela,
CO, constituatur rectilineo BO, eadem ratione quadratum æquale P Q R;
& duabus rectis KN, PQ, inuenta tertia proportionali KS, ducatur ST, ip-
si KL, parallela: *f* Eritque rectãgulũ KT, cõtentũ sub prima linea KL, & ter- — f 17. *sexti.*
tia KS, quadrato mediæ PQ, hoc est, rectilineo BO, æquale. Et quoniã KS, in
uenta est in hoc exemplo minor latere K N: ideoque & rectangulum K T,
minus quadrato KM, hoc est, rectilineo A; erit etiam rectilineum B O, mi-
nus rectilineo A. Ex propinquiore ergo angulo H, ducta rursum ipsi CO,
vel BI, parallela HV, fiat iterum rectilineo CH, æquale quadratum, cuius
latus X: Et duabus rectis KN, & X, inuenta tertia proportionali S N, quæ
in hoc exemplo terminatur in extremo lateris KN; *g* erit rursum rectangu- — g 17. *sexti.*
lum SM, sub prima linea ST, & tertia S N, comprehensum æquale quadra-
to mediæ X, hoc est, rectilineo C H. Cum ergo & K T, ipsi B O, sit osten-
sum æquale: erit totum quadratum KM, hoc est, rectilineum A, toti recti-
lineo BCVHOI, æquale; ac proinde ex maiori rectilineo per rectam H V,
lateri B I, parallelam rectilineum detraximus minori rectilineo A, æquale.
quod faciendum erat.

8 QVOD si duabus rectis K N, & X, inuenta tertia proportionalis
fuisset minor, quam SN, nimirum æqualis ipsi S Y, ita vt rectangulum S Z,
quadrato rectæ X, vel rectilineo CH, foret æquale: ducenda esset ex pro-
ximo angulo D, alia parallela D a, & rectilineo D H, constituendum qua-

dratum

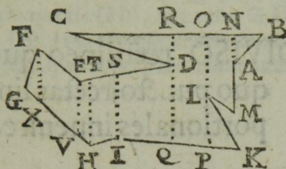
dratum æquale; atque rectæ KN, & lateri poſtremi huius quadrati inuenti adiungenda tertia proportionalis, & ei abſcindenda æqualis Y b. Et ſi Y b, foret minor, quam Y N, ducenda adhuc eſſet ex proximo angulo G, parallela lateri BI, & rectilineo inter hanc parallelam, & D a, comprehenſo efficiendum quadratum æquale: ac rectæ KN, & lateri huius quadrati adiungenda tertia proportionalis, &c. Atque ita progrediendum deinceps, donec inuenta ſit tertia proportionalis S N, quæ terminetur in N, (qualis fuit tertia proportionalis S N, duabus K N, & X, inuenta) vel cuius terminus vltra N, cadat. Quando enim terminatur in N, erit rectilineum inter B I, & vltimam parallelam comprehenſum æquale quadrato K M, hoc eſt, rectilineo A, vt oſtenſum fuit de rectilineo B H, paulo ante hunc Num. 8. Quando autem terminus tertiæ proportionalis cadit vltra N, videlicet in b. ita vt rectangulum Y d, ſit æquale vltimo quadrato inuento, hoc eſt, rectilineo DH; ac proinde totum rectilineum inter B I, & vltimam parallelam, hoc eſt, rectangulum K d, maius quadrato K M, vel rectilineo A; erit vltimum rectilineum DH, maius rectangulo N d, propterea quod K Z, ipſi BH, æquale eſt, & Yd, ipſi DH. Quare ſi ſuper rectam D a, inter rectas DV, a H, conſtituatur trapezium D f, per parallelam e f, rectangulo N d, æquale, vt ſupra Num. 3. traditum eſt: erit rectilineum inter BI, & e f, parallelas contentum æquale quadrato KM, hoc eſt, rectilineo A.

CAETERVM non eſt neceſſe, vt ſemper à proximo angulo parallela ducatur in figura BF. Quando namque ſenſus iudicaret plus minus, parallelam ex aliquo angulo non proximo ductam auferre rectilineum minus quadrato KM,

to K M, vel non multo maius, ducenda esset parallela ex eo angulo, & rectilineo abscisso construendum æquale quadratum, & reliqua perficienda, vt prius.

DENIQVE si aliquando deprehenderetur, rectilineum abscissum non esse multo minus quadrato, constituendum esset, vt Num. 3. docuimus, super parallelam illam trapezium æquale rectangulo, quo quadratum K M, rectilineum abscissum superat.

9 EX his puto satis studiosum Lectorem intelligere, quo pacto in alijs exemplis se gerere debeat. Nam si verbi gratia ex hoc proposito rectilineo irregularissimo per lineam lateri AM, parallelam abscindenda sit portio æqualis alteri cuipiam rectilineo minori, producemus MA, vsque ad N. Et si quidem deprehensum fuerit triangulũ A B N, esse æquale dato rectilineo minori, (quod scietur, si quadratum triãgulo æquale constructum, fuerit æquale quadrato, quod dato rectilineo minori construitur æquale) recta AN, problema efficiet. Si vero maius, construemus super AN, versus B, trapezium per parallelam ipsi AN, æquale excessui: At si minus, ducemus LO, parallelam. Nam si fuerit deprehensum rectilineum NL, æquale defectui, problema efficiet parallela L O: Si vero maius constituemus super LO, versus M N, per parallelam ipsi M N, trapeziũ excessui æquale. Ea enim parallela problema soluet: At si minus, producemus OL, ad P: Et si quidem triangulũ KLP, fuerit æquale defectui, tota parallela OP, quæstioni satisfaciet: Si vero maius, *a* constituemus in angulo K, triangulum simile triangulo KLP, & excessui æquale; ita vt hoc triangulum vna cum rectilineo per parallelam LO, abscisso sit dato rectilineo minori æquale. Ex quo colliges, problema in hoc casu solui non posse, cum duæ parallelæ, nimirũ LO, & illa, quæ triangulum ipsi KLP, simile aufert, resecet ex toto rectilineo BG, partem dato rectilineo minori æqualem. At si triangulum KLP, fuerit minus defectu prædicto, ita vt hoc triangulum vna cum rectilineo per parallelam L O, abscisso sit minus dato rectilineo minore, ducemus per D, parallelam QR. Et si quidem rectilineum P R, æquale fuerit defectui, quo figura KPLMABNO, à dato rectilineo minore deficit, factum erit per parallelam Q R, quod iubetur: Si vero maius, parallela, quæ cum Q R, versus OP, auferet rectilineum huic excessui æquale, satisfaciet problemati: At si rectilineum PR, fuerit minus prædicto defectu, & triangulum CDR, inuentum fuerit vltimo huic defectui, quo rectilineum PR, à prædicto defectu deficit, æquale, parallela DQ, quæstionem dissoluet: Si autem triangulum CDR, fuerit maius hoc vltimo defectu, *b* si ad C, constituatur triangulum excessui æquale, & simile triangulo CDR, satisfacient quæstioni duæ parallelæ, vidleicet D Q, & basis prædicti trianguli constituti; atque in hoc casu per vnicam parallelam satisfieri problemati nequit: Si denique triangulum C D R, minus extiterit eodem illo vltimo defectu, ducemus parallelam IS. Et si quidem rectilineum D I, æquale fuerit illi, quo triangulum C D R, minus est vltimo illo defectu, erit totum rectilineum ISDCBAMLKI, dato minori rectilineo æquale: Si autem rectilineum D I, inæquale fuerit, progrediemur vlterius, vt iam sæpius dictum



a 25. sexti.

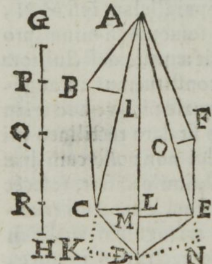
b 25. sexti.

eſt, donec rectilineum inueniamus dato minori rectilineo æquale; Inuenietur autem omnino vnum æquale, cum totum rectilineum BG, maius ponatur. Vides igitur, facile conijci poſſe, quando problema per vnicam parallelam ſolui poſſit, & quando non, ſed per duas: Quotieſcunque enim incidemus in eiuſmodi triangulum in ipſa constructione, qualia fuerunt KLP, & CDR, ex quo auferendum ſit triangulum ſimile, & æquale exceſſui alicui, ſolui problema nequit, niſi per duas parallelas.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

DIVISO rectilineo quolibet in triangula ex vno aliquo puncto, rectas lineas ipſis triangulis ordine proportionales inuenire.

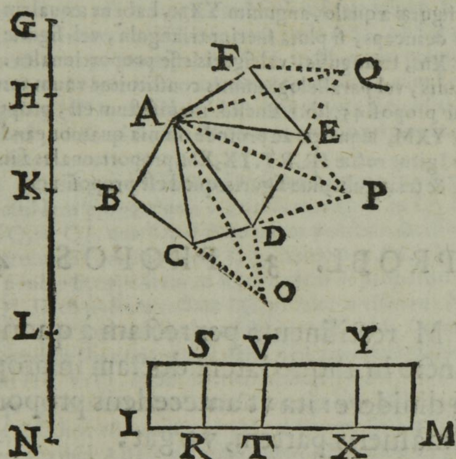
SIT rectilineum quodlibet ABCDEF, diuiſum in triangula ABC, ACD, ADE, AEF, per rectas ex angulo A, (vel aliquo puncto aſſignato in vno latere) ad omnes angulos oppoſitos ductas: atque hiſce triangulis inuenien dæ ſint ordine totidem rectæ proportionales. Ex omnibus angulis, dempto angulo A, ad rectas ex A, egredientes ducantur perpendiculares BI, CL, DK, DN, EM, FO, pro altitudinibus triangulorum. (Nihil autem refert, ſi interdum perpendiculares cadant in rectas extra triangula productas, cuiuſmodi hic ſunt DK, DN,) ita vt ſingula triangula binas habeant altitudines, præter duo extrema, quæ ſingulas duntaxat habent. Deinde in recta quacunque GH, accipiatur GP, æqualis altitudini BI, primi trianguli ABC; & PQ, æqualis altitudini DK, ſecundi trianguli ACD, reſpectu eiuſdem baſis AC. Poſt



a 12. ſexti. hæc fiat, a vt CL, altitudo ſecundi trianguli reſpectu baſis AD, ad EM, altitudinem tertij trianguli ADE, reſpectu eiuſdem baſis AD, ita PQ, ad QR; Et vt DN, altitudo tertij trianguli ADE, reſpectu baſis AE, ad FO, altitudinem quarti trianguli AEF, reſpectu eiuſdem baſis AE, ita QR, ad RH, atque ita deinceps, ſi plura fuerint triangula, ſumendo ſemper duas altitudines ad communem baſem demiſſas, &c. Dico quatuor rectas GP, PQ, QR, RH, eſſe quatuor triangulis ordine proportionales. Nam vt in ſcholio propoſ. 1. lib. 6. Euclid. demonſtratum eſt, à nobis, ita eſt triangulum ABC, ad triangulum ACD, vt altitudo BI, ad altitudinem DK, propter baſem communem AC, hoc eſt, vt GP, ad PQ, cum hæ ſumptæ ſint illis altitudinibus æquales. Eadem de cauſa ita eſt triangulum ACD, ad triangulum ADE, vt altitudo CL, ad altitudinem EM, hoc eſt, vt PQ, ad QR, cum ex constructione ſit, vt CL, ad EM, ita PQ, ad QR. Pari denique ratione ita eſt triangulum ADE, ad triangulum AEF, vt altitudo DN, ad altitudinem, FO, hoc eſt, vt QR, ad RH, cum ſit per conſtructionem, vt DN, ad FO, ita QR, ad RH. Conſtat ergo id, quod propoſitum fuit.

ALITER.

SIT rursus rectilineum ABCDEF, diuisum in triangula A B C, A C D, A D E, A E F, ex puncto A. Quoniam bina proxima triangula constituunt quadrilaterum, cuius diameter est latus vtrique triangulo commune, cuiusmodi est ABCD, ducemus diametro AC, ex D, parallelam DO, quæ secet latus BC, productum in O. Sic in quadrilatero ACDE, diametro A D, parallelam ducemus EP, quæ secet latus C D, protractum in P. Itemque in quadrilatero ADEF, diametro AE, parallelam ducemus F Q, quæ latus D E, productum secet in Q. Deinde in recta quauis G N, sumantur G H, HK, ipsis BC, CO, æquales. Et tribus CD, DP, HK, reperiatur quarta proportionalis KL. Ac tandem tribus DE, EQ, KL, quarta proportionalis inue-



niatur LN. Dico inuentas esse quatuor rectas GH, HK, K L, L N, quatuor triangulis proportionales. Ductis enim ex A, ad O, P, Q, puncta concursuum rectis AO, AP, AQ, *a* erit triangulum ACD, triangulo ACO; & triangulum ADE, triangulo ADP; & triangulū AEF, triangulo A E Q, æquale. *b* Cum ergo sit, vt BC, ad CO, hoc est, vt GH, ad HK, ita triangulum ABC, ad triangulum ACO, hoc est, ad triangulum ACD: Item vt CD, ad DP, hoc est, vt HK, ad KL, ita triangulum ACD, ad triangulum A DP, hoc est, ad triangulum A D E: Et vt DE, ad EQ, hoc est, vt KL, ad LN, ita triangulum ADE, ad triangulum AEQ, hoc est, ad triangulum AEF: perspicuum est id, quod proponitur.

a 37. *primi*
b 1. *sexti.*

ALITER.

RATIONES duæ expoſitæ, quæ expeditiſſimæ ſunt, propria eſt triãgulorum, in quæ diuiditur figura per rectas ab vno aliquo puncto in quouis latere dato, vel ab aliquo angulo emiſſas: poteſt tamen idem hoc problema abſolui alio modo, qui in quaslibet figuras conuenit, licet non ſit tam expeditus. Ita ergo agemus: Sit eadem figura proxima diuiſa in triangula, vel etiam in plurium laterum figuras. *a* Et primo triangulo ABC, vel primæ
a 44 vel 45. primi. figuræ, rectangulum, vel quoduis aliud parallelogrammum non rectangulum æquale conſtruatur IS: Et ſuper rectam R S, aliud parallelogrammum ST, ſecundo triangulo ACD, vel ſecundæ figuræ æquale, habens angulum SRT, angulo I, æqualem. Item ſuper rectam T V, aliud VX, tertio triangulo ADE, vel tertiæ figuræ æquale, angulum habens VTX, æqualem eidem angulo I: Ac denique ſuper rectam XY, aliud Y M, quarto triangulo AEF, vel quartæ figuræ æquale, angulum YXM, habens æqualem eidem angulo I: atque ita deinceps, ſi plura fuerint triangula, vel figuræ. Dico rectas IR, RT, TX, XM, triangulis, vel figuris eſſe proportionales. Nam ex quatuor rectangulis, vel parallelogrammis conſtituitur vnum totum, vt ex demonſtratione propoſ. 45. lib. 1. Euclid. manifeſtum eſt, propter angulos I, SRT, VTX, YXM, æquales: ac proinde omnia quatuor eandem habent altitudinem. *b* Igitur rectæ IR, RT, TX, XM, proportionales ſunt parallelogrã-
b 1. ſexti. mis, ideoque & triangulis, ſiue figuris. quod eſt propoſitum.

PROBL. 3. PROPOS. 4.

DATVM rectilineum per rectam à quouis angulo, vel puncto in aliquo latere ductam in proportionem datam diuidere: ita vt antecedens proportionis, in quam malueris partem, vergat.

SIT primum triangulum quodcunque A B C, per rectam ex angulo A, diuidendũ in duas partes: ita vt pars ad B, vergens ad reliquam partem habeat proportionem datam D, ad E. Secetur latus B C, dato angulo oppoſitum, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 10. lib. 6. Euclid. docuimus, in F, ita vt eadem ſit proportio BF, ad F C, quę D, ad E, ducaturque recta A F. Dico eſſe vt
c 1. ſexti. D, ad E, ita triangulum ABF, ad triangulum AFC. *c* Eſt enim triangulũ ABF, ad triangulum AFC, vt BF, ad F C, hoc eſt, vt D, ad E.

DEINDE ſit idem triangulum A B C, diuidendum in duas partes, per rectam ex puncto F, dato in latere BC, ita vt pars verſus B, ad reliquam par

tem habeat proportionem datam D, ad E. Ducta ex dato puncto F, ad angulum oppositum A, recta F A, vt totum triangulum in duo triangula sit sectum: *a* reperiantur duæ rectæ GH, HI, habentes eandem proportionem, quam triangulum ABF, ad triangulum A F C: totaque G I, secetur in H, vt eadem sit proportio GH, ad HI, quæ D, ad E. Et quia punctum H, cadit in extremum primæ lineæ GH; estque vt GH, ad H I, hoc est, vt D, ad E, ita triangulum ABF, ad triangulum AFC: diuidet recta FA, ex dato puncto F, ad oppositum angulum A, ducta triangulum A B C, in duas partes in data proportione D, ad E. a 3. *huius.*

SIT rursus data proportio K, ad L, diuidendumque sit triangulum ABC, ex puncto F, in duas partes eiusdem porportionis. Diuidatur tota GI, in M, ita vt eadem sit proportio GM, ad MI, quæ K, ad L. Et quoniam diuisionis punctum M, cadit in primam partem GH, totius lineæ GI, secabimus BA, basem primi trianguli dato puncto F, oppositam, in N, vt eadem sit proportio B N, ad N A, quæ G M, ad M H. Dico ductam rectam FN, problema efficere, hoc est, ita esse triangulum BFN, ad trapezium F N A C, vt K, ad L. Quoniam enim rectæ GH, HI, triangulis ABF, AFC, proportionales inuentæ sunt: & tam primam partem GH, in M, quam primum triangulum ABF, per rectam FN, secuimus proportionaliter, *a* cum sit triangulum BFN, ad triangulum NFA, vt BN, ad NA, hoc est, vt GM, ad MH, *b* erit vt GM, ad M I, id est, vt K, ad L, ita BFN, triangulum ad trapezium FNAC. quod est propositum. a 1. *sexti.* b 1. *huius.*

DENIQVE data sit proportio O, ad P, secandumque sit triangulũ ABC, in duas partes eiusdem proportionis. Diuisa tota G I, in Q, ita vt eadem sit proportio GQ, ad QI, quæ O, ad P: quoniam punctum diuisionis Q, cadit in secundam partem HI, totius lineæ G I, diuidemus A C, basem secundi trianguli dato puncto F, oppositam in R, vt eadem sit proportio AR, ad RC, quæ HQ, ad QI. Dico ductam rectam FR, problema efficere, hoc est, ita esse trapezium ABFR, ad triangulum RFC, vt O, ad P. Quoniam enim rectæ GH, HI, repertæ sunt triangulis ABF, AFC, proportionales; & tam secundam partem H I, in Q, quam secundum triangulum A F C, per rectam FR, secuimus proportionaliter: *c* cum sit triangulum AFR, ad triangulum CFR, vt AR, ad RC, hoc est, vt HQ, ad QI: *d* Erit vt GQ, ad QI, hoc est, vt O, ad P, ita trapezium ABFR, ad triangulum RFC. quod est propositum. c 1. *sexti.* d 1. *huius.*

IAM vero si antecedens proportionis vergere debeat versus C, proportioque data sit O, ad P; fiet id commodissime, si triangulum ex F, diuidatur secundum proportionem P, ad O, ita vt antecedens vergat versus B, sicut docuimus. Nam tunc pars versus C, ad reliquam habebit proportionem, quam O, ad P, per conuersam proportionalitatem. Quod etiam in alijs figuris intelligi volo.

SIT deinde multilatera figura quæcunque A B C D E F, per rectam ex angulo A, ductam secanda in duas partes, ita vt pars ad B, vergens ad reliquam partem proportionem habeat datam M, ad N. Ductis ex dato angulo A, ad omnes angulos oppositos rectis partientibus figuram in quatuor triangula; *e* inueniãtur ipsis quatuor rectæ proportionales GH, HI, IK, KL. Tota deinde GL, secetur in O, vt eadem sit proportio G O, ad OL, quæ M, ad N. Et quoniam diuisionis punctum O, cadit in tertiam lineam IK, secabimus tertij trianguli basem DE, dato angulo A, oppositam in P, vt secta est e 3. *huius.*

IK,

IK, in O, ducemusque rectam A P. Dico esse rectilineum ABCDPA, ad rectilineum A PEFA, vt GO, ad OL, hoc est, vt M, ad N. Quoniam enim triangula rectilinei dati proportionalia sunt ordine rectis GH, HI, IK, KL, per constructionem, tertiumque triangulum ADE, & lineam tertiam IK, diuisimus proportionaliter per rectam AP, & in puncto O; *a* cum sit vt DP, ad PE, hoc est, vt IO, ad OK, ita triangulum ADP, ad triangulum A P E; *b* Erunt totæ quoque magnitudines sectæ proportionaliter, hoc est, erit A B C D P A, ad APEFA, vt GO, ad OL, hoc est, vt M, ad N. quod est propositum.

a 1. *sexti.*
b 1. *huius.*

QVOD si punctum O, diuidens rectam GL, in duas partes proportionis datæ M, ad N, caderet in aliquod punctorum H, I, K, vt in I, terminum secundæ lineæ HI, diuideret recta A D, terminans secundum triangulum ACD, totum rectilineum in datam proportionem. Nam tunc per primam partem propos. 1. huius lib. esset A B C D A, ad A D E F A, vt M, ad N, vt perspicuum est.

DATVM præterea sit rectilineum ABCD, ex puncto E, dato in latere A B, diuidendum in duas partes, quarum prior ad B, vergens ad posteriorem partem habeat proportionem datam K, ad L. Ductis ex dato puncto E, ad omnes angulos oppositos rectis diuidentibus rectilineum in tot triangula vno minus, quot latera figura habet; *c* inueniantur rectæ FH, HI, IG,

c 3. *huius.*

tran-

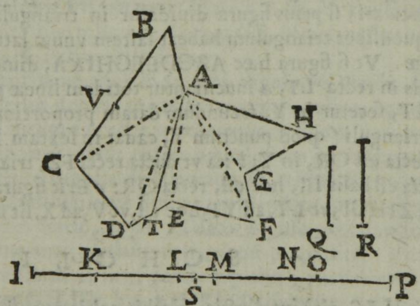
triangulis EBC,ECD,EDA,proportionales. Secta deinde tota FG, in M, secũdũ datã proportioné K,ad L: quoniã diuisionis punctũ M, incidit in primã lineã FH, diuidemus primi trianguli EBC, basem BC, dato puncto E, oppositã in X, vt FH, secta est in M. Iuncta namque recta EX, *a* erit triangulum EBX, ad figuram EXCDAE, vt FM, ad MG, hoc est, vt K, ad L: propterea quod triangula EBC, ECD, EDA, rectis FH, HI, IG, proportionalia sunt ex constructione; & primæ partes EBC, FH, sectæ sunt per rectam EX, & in M, proportionaliter; *b* cum sit EBX, ad EXC, vt BX, ad XC, hoc est, vt FM, ad MH. Constat ergo propositum. *a 1. huius.* *b 1. sexti.*

SI proportio data sit N, ad O; secta FG, in P, secundum proportionem N, ad O, cadet diuisionis punctum P, in secundam lineam HI. Igitur si secundi trianguli ECD, basis CD, dato puncto E, opposita secetur in Q, vt secta est HI, in P, nectaturque recta EQ, *c* erit rursus figura EBCQE, ad figuram EQDA, vt FP, ad PG, hoc est, vt N, ad O. *c 1. huius.*

SI denique data sit proportio R, ad S; secta FG, in V, secundum proportionem R, ad S, cadet diuisionis punctum V, in tertiam lineam IG. Quam ob rem si tertij trianguli EDA, basis DA, dato puncto E, opposita secetur in T, vt secta est IG, in V, iungaturque recta ET; *d* erit rursus figura EBCDTE, ad triangulum ETA, vt FV, ad VG, hoc est, vt R, ad S. *d 1. huius.*

ATQVE hac via procedendum est in omnibus alijs figuris, quæ latera totidem habeant, quot angulos, id est, in quibus omnes anguli introrsum vergant.

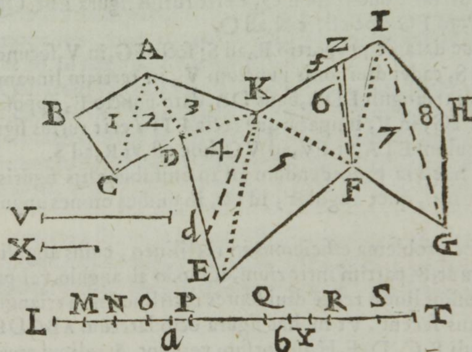
IDEM hoc problema efficiemus in rectilineo, cuius anguli partim extrorsum vergant, & partim introrsum, dũmodo ab angulo, vel puncto dato in latere duci possint lineæ rectæ diuidentes rectilineum in triangula, quæ nullum ipsius latus secent. Vt in hac figura octo laterum ABCDEFGH, cuius quinque anguli B, C, D, F, H, introrsum vergunt, & reliqui tres BAH, DEF, FGH, extrorsum, ductæ sunt rectæ ex angulo A, ad omnes angulos, præter quam ad duos proximos B, H, nullum figuræ latus intersecantes. *e* Si igitur reperiantur sex rectæ IK, KL, LM, MN, NO, OP, sex triangulis ABC, ACD, ADE, AEF, AFG, AGH, proportionales; & tota linea LP, secetur in S, secundum datam proportionem Q, ad R; atq. basis DE, tertij triãguli (Nã diuisionis punctum S, in tertiam lineam LM, incidit) dato puncto A, opposita diuidatur in T, vt linea LM, in S, diuisa est, ducaturque recta AT: *f* Erit figura ABCDTA, ad figuram ATEFGHA, vt IS, ad SP, hoc est, vt Q, ad R. *e 3. huius.* *f 1. huius.*



EX angulo B, vel H, non poterit proposita figura in quamcunq. proportionem diuidi: quia lineæ ex eorum vtrolibet ad oppositos angulos emissæ partim secant latera, & partim cadunt extra figuram. Quod si data proportio

portio minor esset, quam figuræ BCDEB, (si nimirum intelligatur ducta recta BE) ad figuram BEFGHAB, tum demum diuidi posset ex B, tota figura in datam proportionem: propterea quod fierent duo triangula BCD, (ducta videlicet recta BD) BDE, ad punctum B, quorum bases sunt latera figuræ CD, DE; alia vero quatuor ABE, AEF, AFG, AGH, ad punctum A, quorum etiam bases sunt figuræ latera AB, EF, FG, GH, &c.

EODEM modo quamcunque figuram rectilineam, etiam irregularissimam, partiemur in datam proportionem, non quidem ex quolibet angulo, vel puncto dato, (nisi ex eo duci possint rectæ ad omnes angulos oppositos, exceptis duobus proximis, quæ nullum figuræ latus intersecenti: cu-



iusmodi esset punctum V, in antecedenti figura) sed ex aliquo puncto particulari; si prius figura diuidatur in triangula ex pluribus punctis, ita vt quodlibet triangulum habeat saltem vnum latus, quod etiam sit latus figuræ. Vt si figura hæc ABCDEFGHIKA, diuidatur in octo triangula, & illis in recta LT, *a* inueniantur totidem lineæ proportionales, totaque linea LT, secetur in Y, secundum datam proportionem V, ad X; & basis IK, sexti trianguli (quod punctum Y, cadat in sextam lineam QR,) secetur in Z, vt secta est QR, in Y; *b* ita vt ducta recta FZ, triangulum FIK, sectum sit, vt secta est basis IK, hoc est, recta QR: *c* Erit figura ABCDEFZKA, ad figuram FZIHGF, vt LY, ad YT, hoc est, vt V, ad X, Et sic de cæteris.

a 3. huius.
b 1. sexti.
c 1. huius.

SCHOLIVM.

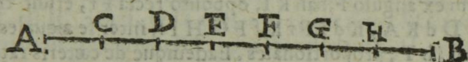
Quo pacto figura data secetur ex dato angulo vel puncto in latere, in quotuis partes æquales

HIS ritè intellectis, licebit nobis quamlibet figuram secare in quotuis partes æquales ex dato angulo, vel puncto in latere, ex quo duci possint ad omnes angulos, exceptis proximis duobus, rectæ lineæ, ita vt nullum figuræ latus secent. Nam si proposita figura sit secanda, verbi gratia in 7. partes æquales, diuidemus eam secundum proportionem 1. ad 6. nimirum secundũ submultiplicem denominatam à denominatore partium, minus vno, in-

quas

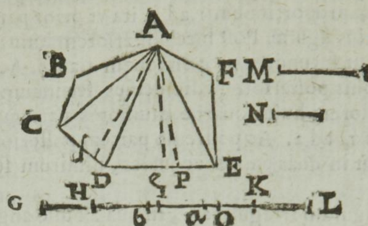
quas figura diuidenda est. Ita enim prior pars erit $\frac{1}{7}$. totius figuræ, cum posterior 6. eiusmodi partes complectatur. Hanc deinde posteriorem partem secabimus secundum proportionem 1. ad 5. ita vt prior pars contineat $\frac{1}{6}$. ipsius, hoc est, $\frac{1}{7}$. totius figuræ. Post hæc posteriorem huius secundæ diuisionis partem partiemur secundum proportionem 1. ad 4. Ac rursus partem huius tertiæ diuisionis posteriorem diuidemus secundum proportionem 1. ad 3. Atque posteriorem huius quartæ diuisionis partem secabimus secundum proportionem 1. ad 2. Ac postremo partem posteriorem huius quintæ diuisionis partiemur in duas partes æquales, nimirum secundum proportionem 1. ad 1.

NON aliter figuram irregularem, in qua à nullo angulo, vel puncto in latere, duci possunt rectæ ad angulos oppositos, quin aliqua figuræ latera secentur, diuidere licebit in partes quotuis æquales, ex diuersis angulis, vel punctis. Nam si verbi gratia vltima figura huius propositionis diuidenda sit in 5. partes æquales; resecabimus ex ea, ab aliquo angulo, vel puncto, quintam partem. Deinde ex maiore parte complectente $\frac{4}{5}$. totius figuræ, ab aliquo eius angulo, vel puncto, detrahemus quartam partem: Item tertiam partem ex maiore parte huius diuisionis: Ac tandem semissem ex vltima parte postremæ huius diuisionis. Hac enim ratione diuisa erit tota figura in 5. partes: non secus atque in linea recta AB, contingit. Si namque eam partiri iu-



beamur in 7. partes æquales, efficiemus id, si primo loco septimam partem AC, detrahemus; deinde $\frac{1}{6}$. CD, ex reliqua linea CB; & ex reliqua DB, quintam partem DE: & ex reliqua EB, quartam partem EF; & ex reliqua FB, tertiam partem FG: Ac denique reliquam lineam GB, bifariam secabimus in H, hoc est, semissem GH, ex ea abscindemus.

FACILIVS idem exequemur, quando ex dato angulo, vel puncto, duci possunt rectæ ad omnes angulos, duobus proximis exceptis, nullum figuræ latus secantes, hac ratione. Lineam ex rectis, quæ triangulis figuræ proportionales sunt, conflatam secabimus in tot partes æquales, in quot figuram partiri iubemur. Si enim bases triangulorum dato angulo, vel puncto oppositas, quæ lineis, in quas puncta diuisionum cadunt, respondent, ita diuidemus, vt sectæ sunt respondentes lineæ, atque ex dato angulo, vel puncto, ad diuisionum puncta rectas ducemus, factum erit, quod proponitur. Vt si secunda figura huius propos. secanda sit in 5. partes æquales, partiemur lineam GL, in 5. æquales partes GH, Hb, b a, a K, KL. Et quoniam primum punctum H, cadit in H, erit triangulum ABC, quinta figuræ pars; *a* cum sit vt GH, ad HL, ita triangulum ABC, ad reliquam partem figuræ. Deinde secabimus basem secundi trianguli in d, vt secunda linea HI, secta est in b: Et basem tertij trianguli in e, vt tertia linea IK, secta est in a; rectasque ducemus A d, A e. Quia vero quartum punctum K, cadit in K, terminum quartæ lineæ IK, erit figura diuisa in 5. partes æquales ABC, ACd, A d D e, a 1. *huius.*



a 1. huius. A e E, AEF: *a* propterea quod hæ partes partibus GH, H b, b a, a K, K L, propertionales sunt.

NEQVE vero difficile erit hanc eandem rationem figuris irregularibus, qualis est vltima huius propos. accommodare. Si enim ea diuidenda sit, verbi gratia in tres partes æquales, secāda erit linea LT, in tres æquales partes L a, a b, b T. Et quarti trianguli basis DE, diuidenda in d, vt quarta linea OP, diuisa est in a: Item sexti trianguli basis KI, secanda in f, vt sexta linea QR, in b, secta est. Nam si ex K, angulo basi DE, opposito recta ducatur K d: Item ex angulo F, basi K I, opposito recta F f, erunt tres partes figuræ A B C D d K A, K d EF f K, f F G H I f, inter se æquales: *b* cum sint
b 1. huius. rectis L a, a b, b T, proportionales. Eademque de cæteris ratio est.

PROBL. 4. PROPOS. 5.

DATVM rectilineum per rectam lineam datæ rectæ parallelam in datam proportionem diuidere, ita vt antecedens proportionis in quam elegeris partem vergat.

SIT primo triangulum A B C, diuidendum in duas partes per lineam lateri B C, parallelam, vt pars versus A, ad reliquam habeat proportionē datam D, ad E. Alterutro laterum, cui linea diuidens æquidistare non debet, videlicet AC, diuiso in F, vt eadem sit proportio AF, ad F C, quæ D, ad E, initio facto ab angulo A, versus quem antecedens proportionis vergere debet, reperiatur inter totum latus A C, & eius partem A F, quæ terminatur in angulo A, qui lateri opponitur, cui æquidistans ducenda est, media proportionalis AG, agaturq. per G, ipsi BC, parallela GH. Dico hanc parallelā problema efficere, id est, eādem esse proportionē trianguli AGH, ad trapezium BCGH, quæ est D, ad E. *c* Quoniam enim triangulum A B C, ad
c coroll. 19. sexti. triangulum A G H, est vt latus A C, ad rectam A F, quod tres rectæ AC, AG, AF, continuè proportionales sint, & triāgula A B C, AGH,

AGH, ſuper AC, AG, ſimilia ſimiliterq. poſita; Erit per conuerſionem rationis triangulum ABC, ad trapezium B C G H, vt A C, ad F C. Ergo diuidẽdo erit triangulum AGH, ad trapezium BCGH, vt AF, ad FC, hoc eſt, vt D, ad E. quod eſt propoſitum. Quod etiã ita colligemus. *a* Quoniam eſt triangulum ABC, ad triangulum A G H, vt recta A C, ad A F; erit diuidendo trapezium BG, ad triangulum AGH, vt FC, ad AF: Et conuertẽdo triangulũ AGH, ad trapezium BG, vt AF, ad FC, hoc eſt, vt D, ad E. *a corol. 19. ſexti.*

A L I T E R.

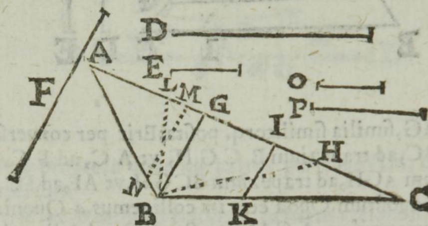
DIVISO latere quocunque, nimirũ BC, in I, ſecundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta A I: *b* erit triangulum ABI, ad triangulum AIC, vt BI, ad IC, id eſt, vt D, ad E. *c* Si igitur ſuper BC, inter rectas BA, C A, conſtituatur trapezium B G, per parallelam G H, æquale triangulo AIC, quod eſt conſequens; erit reliquum triangulum AGH, reliquo triangulo A B I, æquale. *d* Quare erit triangulum A G H, ad trapezium B G, vt triangulum ABI, ad triangulum AIC, hoc eſt, vt BI, ad IC, vel vt D, ad E, Sed prior via expeditior eſt: placuit tamen hanc alteram etiam proponere; quia generalis ferme eſt, & in omnes figuras multilateras quadrat, vt infra patebit. *b 1. ſexti. c 2. huius. d 7. quinti.*

NON ſecus id, quod propoſitum eſt, exequemur, ſi antecedens proportionis vergere debeat ad latus BC, cui recta ducenda eſt parallela. Diuiſo enim rurſus latere AC, in K, ſecundum datam proportionem D, ad E, ita vt antecedens proportionis incipiat à latere B C; inueniatur inter totam AC, & eius partem AK, quæ eſt conſequens proportionis, media proportionalis AL, agaturque per L, lateri B C, parallela L M. Dico hanc parallelam problema efficere, hoc eſt, eandem eſſe proportionem trapezij B L, ad triangulum ALM, quæ eſt D, ad E. *e* Quia enim eſt, vt triangulum ABC, ad triangulum ALM, ita CA, ad AK: quod tres rectæ A C, AL, AK, continue ſint proportionales, & triangula ABC, ALM, ſuper A C, A L, ſimilia ſimiliterque poſita; Erit diuidendo trapezium BL, ad triangulum A L M, vt CK, ad AK, hoc eſt, vt D, ad E, quod eſt propoſitum. Hoc idem effici etiã poteſt via illa altera generali, quamuis non ita expedite. Diuiſo enim quocunque latere, nimirum B C, in I, ſecundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta AI, *f* erit triangulum A B I, ad triangulum A I C, vt BI, ad IC, id eſt, vt D, ad E. *g* Si igitur ſuper BC, inter rectas BA, CA, conſtituatur trapezium BL, per parallelam LM, æquale triangulo A B I, quod *e coroll. 19. ſexti. f 1. ſexti. g 2. huius.*

eſt antecedens: erit reliquum triangulum ALM, reliquo triangulo AIC, æquale. *a* Quare erit trapezium BL, ad triangulum ALM, vt triangulum ABI, ad triangulum AIC, hoc eſt, vt BI, ad IC, vel vt D, ad E.

a 7. quinti.

SED diuidendum iam ſit triangulum ABC, in datam proportionem D, ad E, per lineam parallelam cuicunque lineæ F: quæ ſi æquidiſtet vni laterum, partiemur triangulum in datam proportionem, per rectam illi lateri parallelam, vt iam tradidimus, ſiue antecedens vergere debeat ad angulum lateri illi oppoſitum, ſiue ad ipſummet latus: factumque erit, quod iubetur; *b* cum parallela illa æquidiſtet etiam datæ rectæ lineæ.



b 30. primi.

SI vero data recta F, nulli laterum æquidiſtet, ducatur illi ex aliquo angulo parallela intra triangulum cadens, qualis eſt BG. Si igitur antecedens proportionis ſtatuendum ſit ad partes A, ſecabimus latus AC, in H, in datam proportionẽ D, ad E. Cadat autem primo punctum H, inter G, & C; inueniaturque inter GC, & eius partem CH, terminatam in angulo C, parallelæ BG, oppoſito media proportionalis CI; & per I, ipſi BG, vel ipſi F, parallela agatur IK; quam dico problema efficere: hoc eſt, eſſe trapezium ABKI, ad triangulum IKC, vt D, ad E. *c* Quoniam enim eſt (ducta recta BH,) vt triangulum GBC, ad triangulum IKC, ita GC, ad CH; quod tres GC, CI, CH, ſint continue proportionales, & triangula ſimilia ſimiliterque poſita: *d* Vt autem GC, ad CH, ita eſt quoque triangulum GBC, ad triangulum HBC; *e* erunt triangula IKC, HBC, æqualia: Ac proinde & reliquum trapezium ABKI, reliquo triangulo ABH, æquale erit. *f* Igitur erit vt trapezium ABKI, ad triangulum ICK, ita triangulum ABH, ad triangulum HBC: hoc eſt, ita AH, ad HC, vel ita D, ad E. quod eſt propoſitum.

c coroll. 19. ſexti.
d 1. ſexti.
e 9. quinti.
f 7. quinti.

CADAT deinde punctum L, (Ponimus iam datam proportionem E, ad D, diuiſamque eſſe AC, in L, ſecundum datam proportionem) inter A, & G. Inuenta ergo inter GA, & eius partem AL, terminatam in angulo A, parallelæ BG, oppoſito, media proportionali AM, agatur per M, ipſi GB, ideoque & ipſi F, parallela MN: quam dico problema efficere, hoc eſt, eſſe triangulum AMN, ad trapezium MNBC, vt E, ad D. Iuncta namque recta BL, *g* quoniam eſt, vt triangulum ABG, ad triangulum AMN, ita AG, ad AL: quod tres AG, AM, AL, continue proportionales ſint, & triangula ſimilia ſimiliterque poſita: *h* Vt autem AG, ad AL, ita eſt quoque idem triangu-

g coroll. 19. ſexti.
h 1. ſexti.

triangulum ABG,ad triangulum ABL; *a* erunt triangula A M N,A B L, æqualia:ac proinde & reliquum trapezium MNBC, reliquo triangulo LBC, æquale erit. *b* Quapropter erit triangulum A M N, ad trapezium MNBC, vt triangulum ABL, ad triangulum LBC, *c* hoc eſt, vt AL,ad LC, vel E,ad D.quod eſt propoſitum.

a 9.*quinti*
b 7.*quinti.*
c. 1.*ſexti.*

QVOD ſi pũctum diuiſionis caderet in G,quod contingeret,ſi data eſſet proportio O,ad P;Ipſamet parallela BG, problema efficeret; *d* cum ſit triã gulum ABG,ad triangulum GBC,vt AG,ad GC,hoc eſt,vt O,ad P.Et ſi antecedens ſtatui debet verſus C,& data proportio eſſet P,ad O; *e* erit quoque triangulum C B G,ad triangulum ABG,vt CG,ad GA,vel vt P,ad O.

d 1.*ſexti.*
e 1.*ſexti.*

ALITER.

DIVISO quouis latere, videlicet AC,in H,ſecundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta BH; quia punctum H,cadit inter G , & C , *f* fiat ſuper BG,inter rectas BC,GC, trapezium B I, per parallelam I K , æquale triangulo BGH: Eritque propterea totum trapezium ABKI,toti triangulo ABH, æquale,atque idcirco & reliquum trangulum IKC,reliquo triangulo BCH. *g* Quocirca erit trapezium ABKI, ad triangulum IKC, vt triangulum ABH, ad triangulum BCH, *h* hoc eſt, vt AH,ad HC,vel vt D,ad E.

f 2.*huius.*
g 7.*quinti*
h 1.*ſexti.*

DIVISO rurſus latere A C , in L , ſecundum datam proportionem E , ad D,iunctaque recta BL, quoniam punctum L, cadit inter A,& G. *i* fiat ſuper BG,inter rectas BA,GA, trapeziũ BM,per parallelã MN,æquale triangulo B G L: Eritque propterea & totum trapezium MNBC, toti triangulo LBC,& reliquum triangulum AMN, reliquo triangulo A B L, æquale. *k* Quã ob rem erit triangulũ AMN,ad trapezium MNBC, vt triangulũ ABL, ad triangulũ LBC; *l* hoc eſt,vt AL,ad LC,vel vt E,ad D.quod erat faciendũ.

i 2.*huius.*
k 7. *quinti.*
l 1.*ſexti.*

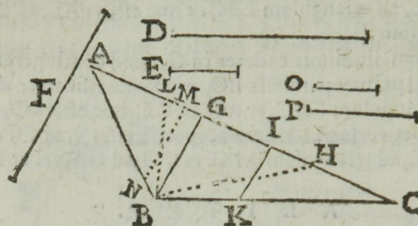
NON aliter problema abſoluemus , ſi antecedens proportionis vergere debeat ad partes C. Diuiſo namque latere CA, in L , in proportionem datam D,ad E:Quoniam punctum L,cadit inter A,& G;inueniemus inter GA, AL,mediam proportionalem AM, & per M , ipſi B G, parallelam ducemus MN, quam dico problema efficere , id eſt, ita eſſe trapezium M N B C , ad triangulum A M N, vt D , ad E . Iuncta namque recta B L : *m* quoniam triangulum ABG,ad triangulum AMN,eſt,vt AG,ad A L, quod tres A G , AM,AL, continue ſint proportionales , & triangula ſimilia ſimiliterque poſita : *n* Vt autem AG,ad AL,ita eſt quoque idem triangulum ABG,ad triangulum ABL; *o* æqualia erunt triangula AMN, ABL; ac proinde & reliquum trapezium MNBC,reliquo triangulo LBC, æquale erit . Igitur erit trapezium MNBC,ad triangulum AMN, vt triangulum L B C , ad triangulum ABL, *p* hoc eſt,vt CL,ad LA,vel vt D,ad E.

m *corol.*19. *ſexti* .
n 1. *ſexti.*
o 9.*quinti*
p 1.*ſexti.*

QVOD ſi proportio data ſit E,ad D ; diuiſo eodem latere C A , in H , in proportionem datam E,ad D, ductaque recta BH ; quoniam punctum H, cadit inter G, & C, reperiemus inter G C , C H , mediam proportionalem C I, & per I, parallelam ipſi B G, agemus I K: quam dico problema efficere , hoc eſt, eſſe triangulum CIK , ad trapezium IKBA,vt C H, ad HA,vel vt E , ad D . Iuncta enim recta B H ; *q* quoniam eſt triangulum C B G, ad triangulũ CIK, vt CG,ad CH;quod tres CG, CI , CH , ſint continue proportio

q *corol.* 19. *ſexti* .

a 1. sexti. portionales, & triangula similia similiterque posita: *a* Vt autem C G, ad



a 9. quinti. C H, ita quoque est idem triangulum CBG, ad triangulum CBH; *a* æqualia erunt triangula CIK, CBH: ideoque & reliquum trapezium IKBA, re-
b 7. quinti. liquo triangulo HBA, æquale erit. *b* Quocirca erit triangulum CIK, ad tra-
c 1. sexti. pezium IKBA, vt triangulum CBH, ad triangulum HBA, *c* hoc est, vt CH, ad HA, vel vt E, ad D. quod faciendum erat.

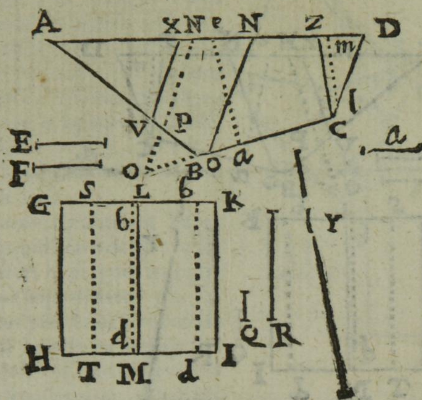
FIET idem quoque aliter, si cadente puncto diuisionis L, inter A, &
d 2. huius. G, *d* construatur trapezium GN, per parallelam MN, æquale triangulo BGL; Cadente vero puncto diuisionis H, inter G, & C, trapezium constituatur BI, æquale triangulo BGH, per parallelam IK, &c.

PRAETEREA quadrilaterum ABCD, diuidendum sit per lineam lateri CD, parallelam in duas partes, vt pars versus A, ad reliquam habeat datam proportionẽ E, ad F. Per ea, quæ in scholio propos. 14. lib. 2. Eucl. vel potius per ea, quæ Nu. 4. cap. 4. lib. 4. huius tradidimus, quadrilatero ABCD, construatur quadratum æquale GHIK; seceturque latus GK, in L, in proportionem E, ad F, datam, & per L, ipsi GH, parallela agatur LM. Deinde super CD, inter rectas CB, DA, *e* fiat rectilineo LI, ęquale quadrilaterũ DO,
e 2. huius. habens latus NO, lateri CD, parallelum: Et si quidem punctum O, cadit in latus CB, vel in ipsum punctum B, recta NO, problema efficiet. Cum enim quadratum GI, toti quadrilatero AC, æquale sit, & rectangulum ablatum LI, quadrilatero ablato DO; erit quoque reliquum rectangulum GM, reli-
f 7. quinti. quo rectilineo ANO, æquale. *f* Quapropter erit ANO, ad DO, vt GM, ad
g 1. sexti. MK; *g* hoc est, vt GL, ad LK, vel vt E, ad F. quod est propositum.

SI vero punctum O, cadit in CB, latus productum, (quod hic fiet, si proportio data sit Q, ad R. Diuiso enim latere GK, in S, in datam proportionẽ Q, ad R; ductaque ST, parallela lateri GH; si super CD, inter rectas DA,
h 2. huius. CB, *h* fiat rectangulo KT, ęquale quadrilaterum DO, cadet O, vltra B, &
i 2. huius. parallela NO, secabit latus AB, in P.) *i* constituemus super NP, inter rectas NA, PA, per parallelam VX, trapezium NV, triangulo BOP, æquale, factũ erit, quod iubetur. Addito enim communi rectilineo CDNPB; erit totum rectilineum CDXVB, toti rectilineo DO, hoc est, rectangulo KT, æquale; ideoque & reliquum triangulum AVX, reliquo rectangulo GT, æquale.

Quare

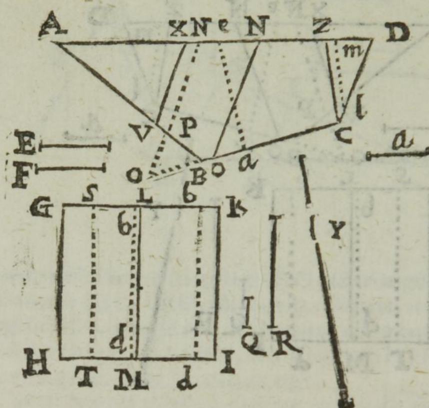
a Quare erit triangulum AVX, ad rectilineum CDXVB, vt GT, ad KT, *b* hoc est, vt GS, ad SK, vel vt Q, ad R. quod erat faciendum. a 7. *quinti.* b 1. *sexti.*



NON alia ratione problema absoluemus, si antecedens proportionis statuendum sit ad partes CD. Sit namque data proportio F, ad E, vel R, ad Q. Diuiso ergo latere KG, quadrati GI, quod quadrilatero AC, factum est æquale, in L, secundum proportionem datam F, ad E; vel in S, secundum datam proportionem R, ad Q, ductaque parallela LM, vel ST: *c* si super CD, inter rectas DA, CB, constituemus rectilineum DO, rectangulo KM, vel rectilineum CDXVB, rectangulo KT, æquale per parallelam NO, vel XV, vt paulo ante dictum est, solutum erit problema, vt liquet. c 2. *huius.*

VERVM idem quadrilaterum ABCD, diuidendum sit per parallelam cuilibet alteri lineæ Y, in proportionem E, ad F, ita vt antecedens proportionis vergat ad A; Si igitur data recta Y, æquidistet vni lateri, partiemur datum quadrilaterum in datam proportionem per lineam illi lateri, proindeque & rectæ Y, parallelam, vt proxime scripsimus. Si vero nulli lateri recta Y, æquidistet, ducemus ei ex aliquo angulo, vt ex C, parallelam CZ, quæ intra quadrilaterum cadat; & ablato triangulo CDZ, vel rectilineo ablato, auferemus ex quadrato GI, quod toti quadrilatero fit æquale, rectangulum æquale Kd. (quod fiet, si triangulo, vel rectilineo CDZ, fiat æquale quadratum, cuius latus a; & duabus KI, & a, tertia proportionalis reperiatur Kb. Ducta enim bd, ipsi KI, parallela, *d* erit rectangulum Kd, quadrato lateris a, hoc est, rectilineo CDZ, æquale.) Et si quidem parallela bd, cadit inter KI, & LM, *e* construemus super CZ, inter rectas CB, ZA, rectilineum CaeZ, rectangulo bM, æquale, cuius latus ae, lateri CZ, hoc est, datæ rectæ Y, æquidistet; factumq. erit, quod præcipitur. Erit enim totum rectilineum d 17. *sexti.* e 2. *huius.*

a 7. *quinti.* C D e a, toti rectangulo *K* M; ac propterea & reliquum A B a e, reliquo
b 1. *sexti.* GM, æquale. *a* Quapropter erit A B a e, ad e a c D, vt G M, ad *K*M; *b* hoc



est, vt GL, ad L*K*, vel vt E, ad F. Si vero parallela b d, coincidit cum recta L M, efficiet problema recta CZ: quia cum *K*M, rectilineo CDZ, sit æqua-
c 7. *quinti.* le, erit reliquum rectãgulum GM, reliquo rectilineo ABCZ, æquale; *c* atque
d 1. *sexti.* idcirco erit ABCZ, ad CDZ, vt GM, ad KM, *d* hoc est, vt GL, ad LK, vel vt E, ad F. Si denique parallela b d, cadit inter LM, & GH; erit rectilineum, vel triangulum ablatum CDZ, maius rectangulo KM.
e 2. *huius.* *e* Si igitur super CZ, inter rectas C D, Z D, construetur rectilineum C m, rectangulo L d, æquale; erit reliquum D l m, reliquo rectangulo Gd, æquale: ac propterea
f 7. *quinti.* & reliquum m l C B A, reliquo rectangulo *K* M. *f* Igitur erit A B C l m, ad l m D, vt G *M*, ad *KM*: hoc est vt G L, ad *L K*, vel vt E, ad F. quod est propositum.

EODEM prorsus modo quamlibet aliam figuram, quotquot habeat latera, in datam proportionem secabimus per lineam, quæ vni lateri vel cuiuis alij rectæ lineæ æquidistet. Sit enim datum heptagonum qualecunque ABCDEFG, secandum per lineam lateri AG, parallelam, in duas partes, vt ea, quæ ad D, vergit, ad reliquam habeat proportionem eandem, quam M, ad N, habet. Constituto quadrato HIKL, æquali ipsi heptagono, per ea, quæ in scholio propos. 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius scripsimus; & diuiso latere HI, in O, in proportionem M, ad N,
g 2. *huius.* ductaque O P, lateri H L, parallela: *g* fiat super rectam A G, inter rectas AB, GF, rectangulo IP, æquale rectilineum AGQR, habens latus Q R, la-
h 2. *huius.* teri AG, parallelum. Et quoniam QR, cadit vltra F, B, *h* constituemus rur-
sum

sum super rectam ST, inter rectas SC, TE, per rectam VX, ipsi ST, parallelam, rectilineum æquale triangulis FQT, BRS, extra heptagonum existen tibus; factumque erit quod proponitur. Cum enim rectilineum AGQR, ac proinde & rectilineum ABVXFG, rectangulo IP, sit æquale, erit quoque reliquum DEXVC, reliquo rectangulo OL, æquale. *a* Igitur erit DEXVC, ad ABVXFG, vt OL, ad IP, *b* hoc est, vt HO, ad OI, vel vt M, ad N. quod erat faciendum.

a 7. quinti
b 1. sexti.

QVOD si latus rectilinei ex heptagono abscissi æquidistare debeat rectæ Y, quæ nulli lateri heptagoni æquidistet, (si namque æquidistaret vni lateri, absolueretur problema, vt proxime traditum est) ducta ex angulo G, rectæ Y, parallela GZ, quæ intra figuram cadat; *c* construemus rectilineo AGZ, super rectam IK, æquale rectangulum hK; (quod fiet, si rectilineo AGZ, fiat æquale quadratum, cuius latus l, & duabus IK, & l, tertia proportionalis reperiatur Ih. Ducta enim hi, ipsi IK, parallela, *d* erit rectangulum hK, quadrato lateris l, hoc est, rectilineo AGZ, æquale. *e* Deinde super rectam GZ, inter rectas GF, ZB, constituemus rectangulo hP, per parallelam ba, æquale rectilineum GZba. *f* Nam si triangulis Bbe, Fad, super rectam de, inter rectas eC, dE, fiat per parallelam fg, rectilineum degf, æquale; factum erit, quod in problemate proponitur, vt ex dictis perspicuum est. Eademque omnino ratio est in omnibus alijs rectilineis quamuis irregularibus, dummodo in ijs duci possit vna linea parallela datæ rectæ, quæ rectilineum auferat dato rectilineo æquale. Non enim semper hoc fieri posse in figuris, cuius anguli partim introrsum, & partim extrorsum vergant, ad finem propos. 2. huius lib. declarauimus. Id quod constructio ipsa problematis perspicue nos docebit.

c 2. huius.
d 17. sexti.
e 2. huius.
f 2. huius.

SCHOLIVM.

DIVIDI ergo poterit quælibet figura rectilinea in quotuis partes æquales per lineas, quæ datæ cuiuis rectæ lineæ æquidistent. Nam si verbi gratia data figura secanda sit in 8. partes æquales per lineas datæ rectæ parallelas, diuidemus eam primum in duas partes inter se proportionem habentes 1. ad 7. Ita namque prior pars erit $\frac{1}{8}$. totius figuræ. Deinde posteriorem partem secabimus in proportionem 1. ad 6. ita vt prior pars huius diuisionis sit $\frac{1}{7}$. illius partis diuisæ, hoc est, $\frac{1}{7}$. totius figuræ, cum pars illa diuisa complectatur $\frac{7}{8}$. totius figuræ. Postea partem posteriorem proximæ diuisionis partiemur in proportionem 1. ad 5. Et posteriorem huius diuisionis partem in proportionem 1. ad 4. Atque ita deinceps, minuendo semper,

Quo pacto figura data secetur per lineas parallelas in quotuis partes æquales.

donec ad partem deueniamus, quæ secanda sit in proportionem 1. ad 1. hoc est, in partes æquales.

HOC idem effici poterit ea ratione, quam ad finem scholij propos. 4. exposuimus: si videlicet latus quadrati HI, quod rectilineo dato constructum est æquale, in tot æquales partes secetur, in quot partes datum rectilineum diuidendum est, & primo rectilineum diuidatur in proportionem primæ partis ad reliquas: Deinde posterior pars rectilinei in proportionem secundæ partis lateris HI, ad reliquas: atque ita deinceps. &c.

ATQVE hic finem habet nostra Geodæsia complectens diuisionem omnium figurarum rectilinearum: sequuntur iam particulares nonnullæ diuisiones quarundam figurarum, quę tum, quia subtiles acutasque demonstrationes continent, tum quia plerasque earum eruditi quoque Geometræ, vt Leonardus Pisanus, Frater Lucas Pacciolus, & Nicolaus Tartalea tradiderunt, omittendæ nullo modo visæ sunt. Vt autem Geometricè eas demonstremus, præmittenda sunt Theoremata nonnulla, quorum primum sit hoc.

THEOREMA 2. PROPOSITIO 6.

SI duo triangula æqualia habeant vnum latus commune, & in diuersas partes vergant: Recta oppositos angulos connectens à latere illo communi bifariam secatur.

SINT ęqualia duo triangula ABC, ABD, habentia latus AB, commune, & in diuersas partes vergentia. Dico rectam CD, oppositos angulos C, D, iungentem secari in E, bifariam à latere communi AB. a Quoniam enim est tam triangulum ACE, ad triangulum ADE, quàm triangulum BCE, ad triangulum BDE, vt CE, ad ED; b erit triangulum ACE, ad triangulum ADE, vt triangulum BCE, ad triangulum BDE. c Igitur erunt quoque duo triangula simul ACE, BCE, hoc est, totum triangulum ABC, ad duo triangula simul ADE, BDE, id est, ad totum triangulum ABD, vt ACE, ad ADE, hoc est, vt CE, ad ED. Cum ergo triangula ABC, ABD, ponantur æqualia; erunt quoque rectæ CE, ED, æquales, ac proinde CD, in E, secta est bifariam. quod erat ostendendum.

a 1. sexti.
b 11. quinti
c 12. quinti



THEOR. 3. PROPOS. 7.

SI in triangulo basi parallela ducatur, & extrema parallelarum rectis iungantur se se intersecantibus:

habebit

habebit vtriusuis harum rectarum segmentum ab angulo incipiens ad reliquum in latere terminatum eandem proportionem, quam latus ab illa recta diuisum ad partem eius superiorem. Recta autem ex tertio angulo per intersectionem dictarum rectarum extensa secabit vtramque parallelam bifariam.

IN triangulo A B C, ducta sit D E, basi B C, parallela, & iunctæ rectæ BE, CD, se intersecent in F. Dico esse BF, ad FE, vt A C, ad AE; Item CF, ad FD, vt AB, ad AD: Et iunctam rectam AF, secare parallelas DE, BC, bifariam in G, & H. *a* Quoniam enim triangula B D C, C E B, æqualia sunt; ablato communi BFC, reliqua BDF, CEF, æqualia quoque erunt. *b* Quia vero est, vt BD, ad D A, ita CE, ad EA: *c* Vt autem B D, ad D A, ita est triangulum BFD, ad triangulum AFD: Et vt C E, ad E A, ita triangulum CFE, ad triangulum AFE; erit quoque triangulum BFD, ad triangulum AFD, vt triangulum C F E, ad triangulum A F E. Cum ergo triangulum B F D, triangulo C F E, ostensum sit æquale; *d* erit quoque triangulum AFD, triangulo AFE, æquale. *e* Igitur DE, in G, secta est bifariam: *f* ac proinde & parallela BC, secta erit bifariam in H. *g* Et quoniam triangulum AFB, ad triangula æqualia AFD, AFE, eandem habet proportionem; *h* estque vt AFB, ad AFD, ita AB, ad AD: Et vt AFB, ad AFE, ita BF, ad FE: Erit quoque BA, ad AD, ideoque AC, ad AE, vt B F, ad F E: Eademque ratione erit A B, ad AD, vel AC, ad A E, vt C F, ad F D. quod etiam inde patet; *i* cum sit vt CF, ad FD, ita CFE, ad DEF, hoc est, ita BFD, ipsi C F E, æquale ad idem D E F, *k* hoc est, ita BF, ad F E. quod erat demonstrandum.



a 37. primi
b 2. sexti.
c 1. sexti.
d 14. quinti
e 6. huius.
f schol. 4. sexti.
g 7. quinti
h 1. sexti.
i 1. sexti
k 1. sexti.

THEOR. 4. PROPOS. 8.

SI in triangulo a duobus angulis duæ rectæ ducantur ad media puncta oppsitorum laterum: Recta ex angulo reliquo per intersectionem earum deducta secat quoque reliquum latus bifariam. Cuiuslibet autem illarum trium linearum segmentum prope angulum ad reliquum segmentum duplam habet proportionem. Triangulum denique per rectas ab intersectione ad angulos ductas in tria triangula æqualia diuiditur.

IN triangulo præcedentis propos. ABC, duæ rectæ BE, CD, secent latera AC, AB, bifariam in E, D, se autem mutuo intersecet in F. Dico rectam ductam AF, secare quoque latus BC, bifariam in H, &c. *a* Iuncta enim recta D E, parallela erit ipsi B C, cum secet latera AB, AC, proportionaliter, in partes videlicet æquales: *b* Quam ob rem AF, vtramque parallelam DE, B C, bifariam secabit. quod est primum.

a 2. *sexti.*

b 7. *huius.*

c 7. *huius.*

DEINDE *c* quia est, vt AB, ad AD, ita CF, ad FD: Est autem AB, ipsius AD, dupla; erit quoque CF, ipsius FD, dupla. Eademque ratione & BF, ipsius FE; & A F, ipsius FH, dupla erit. quod est secundum.

d 1. *sexti.* POSTREMO *d* quia est vt AF, ad FH, ita triangulum AFB, ad triangulum B F H: Est autem A F, ipsius F H, ostensa dupla; erit quoque triangulum A F B, trianguli B F H, duplum. Est autem & triangulum B F C, eiusdem trianguli B F H, duplum; *e* quod triangula B F H, C F H, æqualia sint. Igitur æqualia erunt triangula A F B, B F C. Eodemque modo triangulum AFC, eidem triangulo BFC, æquale erit: ac proinde omnia tria AFB, BFC, CFA, æqualia erunt. quod est tertium.

e 38. *primi.*

COROLLARIVM.

ITAQVE facile inueniri potest punctum intra triangulum, à quo tres rectæ ad tres angulos ductæ ipsum triangulum in tria æqualia triangula partiantur. Huiusmodi enim punctum in proposito triangulo est F, vbi duæ rectæ ex duobus quibusuis angulis ad media puncta oppositorum laterum ductæ se intersecant, vt in tertia parte huius propos. ostendimus.

THEOR. 5. PROPOS. 9.

SI in triangulo ducatur recta vtcunque duo latera secans: Erit totum triangulum ad abscissum triangulum, vt rectangulum sub duobus lateribus sectis totius trianguli comprehensum, ad rectangulum sub duobus lateribus trianguli abscissi, quæ priorum segmenta sunt, comprehensum.

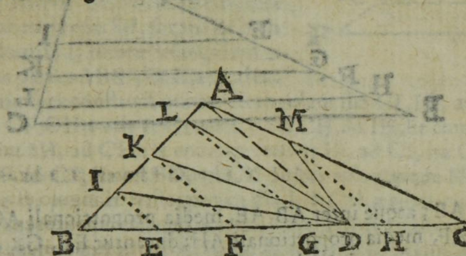
IN triangulo ABC, recta DE, secet latera AB, AC, in D, E. Dico esse vt rectangulum sub AB, A C, ad rectangulum sub AD, AE, ita triangulum ABC, ad triangulum ADE. Quoniam enim triangula ABC, ADE, angulum habent communem A; habebunt per propos. 4. schol. propos. 23. lib. 6. Euclid. eandem proportionem, quam rectangula sub lateribus A B, A C, & sub AD, AE, comprehensa, quod ostendendum erat.

PRO-

PROBLEMA 5. PROPOSITIO 10.

DATVM triangulum ex dato puncto in eius latere in quotlibet partes æquales diuidere.

PROPOSITIONE quartadecima scholij propos. 33. lib. 6. Euclid. tradidimus regulam, qua triangulum in duas partes secundum datam proportionem diuidendum sit: Et quo pacto ex triangulo pars imperata sit auferenda. Si igitur triangulum ex dato puncto in eius latere quouis secandum sit in quotlibet partes æquales, detrahenda primum erit per lineam rectam ex dato puncto ductam pars denominata à numero partium, in quas diuidendum est triangulum. Deinde duæ tales partes: postea tres, atque ita



deinceps, donec tot partes, vna minus, detractæ sint, in quot partes diuidendum proponitur triangulum. Vt si triangulum ABC, ex puncto D, diuidendum sit in quinque partes æquales, diuidemus latus BC, in quo datum punctum est, in quinque partes æquales, in punctis E, F, G, H. Iuncta deinde recta DA, ducemus ei parallelas EI, FK, GL, HM. Si namque connectantur rectæ D I, DK, DL, D M, diuisum erit triangulum in quinque partes æquales. Nam vt in dicta propos. 14. scholij propos. 33. lib. 6. Euclid. ostensum est, triangulum DBI, est $\frac{1}{5}$. totius trianguli, hoc est, ita se habet DBI, ad ABC, vt BE, ad B C. Triangulum autem DBK, continet $\frac{2}{5}$. totius trianguli, id est, ita se habet DBK, ad ABC, vt BF, ad B C. At vero triangulum DBL, complectitur $\frac{3}{5}$. totius trianguli, id est, ita se habet D B L, ad ABC, vt BG, ad BC. Quadrilaterum denique A B D M, comprehendit $\frac{4}{5}$. totius trianguli, hoc est, ita se habet ABDM, ad A B C, vt B H, ad BC. Ex quo fit, reliquum triangulum DMC, esse $\frac{1}{5}$. eiusdem trianguli A B C.

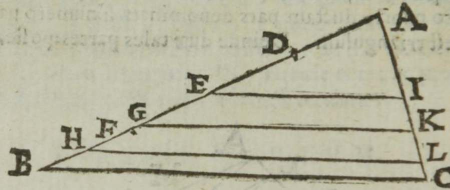
QVANDO punctum datum est in vno angulo, manifestum est, si latus oppositum in tot partes secetur, in quot triangulum diuidendum est, *a* rectas ex eo angulo ad puncta diuisionum eductas secare triangulum in propositas partes æquales. a 1. sexti.

PRO-

PROBL. 6. PROPOS. 11.

DATVM triangulum per lineas vni lateri parallelas in quotlibet æquales partes diuidere.

SIT triangulum ABC, diuidendum verbi gratia in quatuor partes æquales per lineas lateri BC, æquidistantes. Secetur vtrumuis reliquorum laterum nimirum AB, in 4. partes æquales, in tot videlicet, in quot triangulum diuidendum est, in punctis D, E, F. Et inter AB, AD, inuenta media



proportionali AE; atque inter AB, AE, media proportionali AG; ac denique inter AB, AF, media proportionali AH; ducantur EI, GK, HL, lateri BC, parallelæ. quas dico triangulum partiri in 4. partes æquales. *a* Quoniam enim triangulum ABC, triangulo AEI, simile est; *b* erit triangulum ABC, ad triangulum AEI, vt AB, ad AD, quod tres AB, AE, AD, sint continue proportionales. Est autem AD, quarta pars ipsius AB. Igitur & triangulum AEI, quarta pars est trianguli ABC.

a corol. 4. sexti.
b coroll. 19. sexti.

c NON aliter ostendemus, esse triangulum ABC, ad triangulum AGK, vt AB, ad AE, quod etiã tres AB, AG, AE, sint cõtinue proportionales. Quare cũ AE, cõtineat $\frac{2}{4}$. rectæ AB, cõtinebit etiã AGK, triãgulũ $\frac{2}{4}$. triãguli ABC: Ideoq; cũ AEI, sit $\frac{1}{4}$. triãguli ABC, vt ostẽdimus, erit EIKG, $\frac{1}{4}$ eiusdẽ triãguli ABC. Deniq; eadẽ ratione erit triãgulũ ABC, ad triãgulũ AHL, vt AB, ad AF, quod etiã tres AB, AH, AF, sint continue proportionales: ac proinde triangulum AHL, complectetur $\frac{3}{4}$. trianguli ABC; quemadmodum AF, continet $\frac{3}{4}$. ipsius AB: ideoque BHLC, erit $\frac{1}{4}$. trianguli ABC, &c.

c coroll. 19. sexti.

PROBL. 7. PROPOS. 12.

DATVM triangulum per rectam ex puncto extra triangulum dato ductam in duas partes æquales diuidere.

EX puncto D, extra triangulum A B C, dato ducenda sit linea diuidens
triangulum bifariam. Ducta recta D A, ad angulum oppositum secante latus
BC, in E: si quidem BC, in E, diuiditur bifariam, factum erit, quod iubetur *a*: a 38. *primi*
quod tunc triangula ABE, ACE, sint æqualia. Si vero B C, non bifariam di-
uiditur in E, sit segmentum CE, maius, cui ducatur parallela D F, occurrens
lateri AC, producto in F. Secto latere A C, bifariam in G, inueniatur tribus
DF, BC, CG, quarta proportionalis CH; *b* Eritq. rectangulum sub DF, CH, b 16. *sexti.*
æquale rectangulo sub BC, CG; hoc est, semissi rectanguli sub B C, C A:
c cum rectangulum sub BC, C A, duplum sit rectanguli sub BC, CG. Deinde c 1. *sexti.*
inuenta L, media proportionali inter FC,
CH, *d* vt quadratum ex L, æquale sit rectan d 17. *sexti.*
gulo sub FC, CH; adiungatur ipsi C H, re-
cta HI, vt rectangulū sub tota C I, & adiun
cta H I, æquale sit quadrato ex L, siue re-
ctangulo sub FC, C H, quemadmodum ad
finem scholij propos. 36, lib. 3. Euclid. scri
psimus: ducaturq. recta DI, secans BC, in
K. Dico rectam D I, secare triangulum
ABC, in duas partes ABKI, IKC, æquales.
Quoniam enim per constructionem rectangulum sub CI, IH, æquale est re-
ctangulo sub CF, CH, *e* erit vt CI, ad CF, ita CH, ad IH; Et conuertendo, vt e 16. *sexti.*
CF, ad CI, ita IH, ad CH: & componendo vt IF, ad CI, ita C I, ad CH.
f Vt autem IF, ad CI, ita est FD, ad CK. Igitur erit quoque FD, ad C K, vt f 4. *sexti.*
CI, ad CH: *g* Ac proinde rectangulum sub FD, CH, æquale erit rectangulo *& permu-*
sub CK, CI: Erat autem rectangulum sub FD, CH, per constructionem æqua *tando.*
le semissi rectanguli sub BC, CA. Igitur & rectangulum sub CK, CI, æquale g 16. *sexti.*
erit semissi rectanguli sub BC, CA. Vt autem rectangulum sub C K, CI, ad
rectangulum sub B C, C A, *h* ita est triangulum CKI, ad triangulum ABC. *h* 9. *huius.*
Igitur triangulum CKI, æquale quoque erit semissi trianguli ABC: ac pro-
inde quadrilaterum ABKI, reliquæ semissi trianguli ABC, æquale erit. quod
est propositum.

EADEM ratione, si pro CG, sumamus $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{4}$. vel quamcumque partem lateris AC, & reliqua fiant, vt supra, auferemus per rectam ex D, ductam $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{4}$. vel denique talem partem ex triangulo ABC, qualis sumpta est CG, ipsius AC, vt perspicuum est.

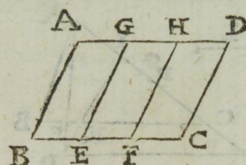
LEONARDVS Pisanus, & Nicolaus Tartalea, idem hoc problema soluunt, quando datum punctum est extra triangulum in tali loco, vt vnum latus trianguli productum, in illud incidat, cuiusmodi esset punctum F, datum. Item quando est inter duo latera producta: Vt si triangulum foret AEC, punctum autem inter B, & D, existeret, ita vt ab eo solum per angulum E, duci posset linea secans latus AC: quippe cum rectæ ab eo ad angulos A, C, ductæ nullum latus intersecarent. Verum quia hæc curiosa magis, quam vtilia sunt, dedita opera à nobis omittuntur. Qui autem ea desiderat, auctores prædictos legere poterit. Pari ratione abstinemus ab eo problemate, quando punctum datum est intra triangulum (quod tamen ijdem auctores soluere conantur) quia non semper per punctum interius duci potest linea, quæ triangulum bifariam secet, vt experientia constat.

PROBL.

PROBL. 8. PROPOS. 13.

DATVM parallelogrammum in quotcunque partes æquales per lineas duobus lateribus oppositis æquidistantes diuidere.

SIT parallelogrammum A B C D, diuidendum verbi gratia in tres partes æquales per lineas lateribus AB, DC, æquidistantes. Diuiso alterutro reliquorum duorum laterum, nimirum BC, in tres partes æquales, in quot videlicet parallelogrammum proponitur diuidendum, in E, & F, punctis, ducantur EG, FH, ipsis AB, DC, parallelæ: factumque erit, quod iubetur; *a* quod parallelogramma AE, EH, HC, æqualia sint, propter æquales bases BE, EF, FC.



a 1. sexti uel 38. primi.

COROLLARIVM.

ITAQVE si ex latere auferatur $\frac{1}{2}$. vel $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{4}$. vel denique qualiscunque pars, vel partes, & per extremum eius punctum parallela lateri AB, ducatur, ablata erit ex toto parallelogrammo eadem pars, vel eædē partes. Ita vides AE, esse partem tertiam parallelogrammi A C, quemadmodum & BE, tertia pars est lateris BC, &c.

PROBL. 9. PROPOS. 14.

DATVM parallelogrammum per rectam ex puncto siue extra, siue intra ipsum, siue in aliquo latere dato ductam, bifariam diuidere.

SIT primo parallelogrammum ABCD, per rectam ex puncto E, exteriori ductam secandum bifariam. Ducta diametro B D, eaque secta bifariam in F, ducatur ex E, per F, recta EH, quam dico parallelogrammum partiri bifariam. Nam vt in scholio Propos. 34. lib. 1. Euclid. demonstrauimus, recta GH, diuidens diametrum BD, in F, bifariam, secat parallelogrammum bifariam. Idem fiet, si recta IK, latera A D, BC, secans bifariam, diuidatur bifariam in F, & per F, extendatur recta EF, propterea, quod IK, diametrum secat bifariam, ac proinde per F, punctum medium diametri transit. *b* Cum enim



b 29. primi

anguli

anguli IDF, FID, angulis alternis KBF, FKB, æquales sint, & latera ID, KB, quibus adiacent, æqualia; *a* erunt tam latera DF, quam IF, KF, inter se æqualia. *a 26. primi*

EODEM modo ex puncto interiori L; Item ex puncto G, in latere BC, recta ducta LF, vel GF, parallelogrammum bifariam diuidet.

PROBL. 10. PROPOS. 15.

INTER datas duas rectas, duas medias proportionales prope verum inuenire.

EXPOSITA Geodæsia nostra prioribus quinq. propositionibus huius lib. & nouem alijs propositionibus, ijsdemõstratis, quæ addẽda esse censuimus ad idem argumentum spectantia: agendum iam esset de augendis minuendisque figuris in data proportione, vt in titulo huius lib. 6. proposuimus. Verum quia sicut id in planis figuris effici non potest sine inuentione mediæ proportionalis inter duas rectas propositas, quam inuentionem Euclid. lib. 6. propos 13. nobis tradidit: ita idem absolui in figuris solidis nulla ratione potest, nisi inter duas rectas datas duæ mediæ reperianturproportionales. Quocirca prius in hac propos. in medium afferemus, quæ antiqui Geometræ nobis hac de re scripta reliquerunt. Multorum enim ingenia res hæc exercuit, atque torsit, quamuis nemo ad hanc vsque diem, vere, ac Geometricè duas medias proportionales inter duas rectas datas inuenerit. Prætermissis autẽ modis Eratosthenis; Platonis; Pappi Alexandrini; Spori; menechmi tum beneficio Hyperbolæ, ac parabolæ, tum ope duarum parabolarum; & Architæ Tarentini, quamuis acutissimis subtilissimisque: solum quatuor ab Herone, Apollonio Pergæo, Philone Bysantio, Philopono, Diocle, & Nicomede traditos explicabimus, quos commodiores, facilioresque, & errori minus obnoxios iudicauimus. Qui aliorum rationes desiderat, legere eas poterit in Commentarijs Eutocij Ascalonitæ in librum 2. Archimedis de Sphæra, & Cylindro: Item in libello Ioannis Verneri Norimbergensis de sectionibus Conicis. Hinc itaque exordiamur.

MODVS HERONIS IN MECHANICIS introductionibus, & telis fabricandis: qui etiam Apollonio Pergæo ascribitur.

SINT duæ lineæ rectæ AB, BC, inter quas oporteat duas medias proportionales inquirere. Constituantur ad angulum rectum B, & perficiatur rectangulum ABCD, cum diametris AC, BD, *a* quæ se mutuo bifariam diuident in E. Satis esset vnam tantum diametrum ducere, eamque in E, secare bifariam. Protractis autem lateribus DA, DC, intelligatur circa punctum B, moueri regula hinc inde, donec ita secet DA, DC, productas in F, & G, vt *a schol. 34. primi.*

rectæ emissæ EF, EG, æquales sint. Vel certe, vt vult Apollonius, ex E, plures circuli describantur LI, GF, MN, donec chorda arcus vnius præcise per punctum B, incedat, qualis est GF. Quod si chorda supra B, transeat, cuiusmodi est chorda LI, describendus erit circulus infra L; si vero infra punctũ B, transeat, qualis est chorda MN, describendus erit circulus supra M. Atque hoc opus toties iterandum, donec aliqua chorda, qualis est GF, per B, incedat. Erunt enim hac ratione EF, EG, ex centro E, ad circumferentiam GF, inter se æquales. Quibus ita constructis. Dico AF, CG, esse medio loco proportionales inter AB, BC: hoc est, ita esse AB, ad AF, vt AF, ad CG, & CG, ad CB. Diuisis enim AD, CD, bifariam in K, & H; *a* erunt ductæ EK, EH, ad AD, CD, perpendiculares. *b* Quoniam vero rectangulum sub DF, AF, vna cum quadrato ex AK, quadrato ex KF, æquale est; addito communi quadrato ex EK, erit rectangulum sub DF, AF, vna cũ quadratis ex AK, EK, *c* hoc est, vna cum quadrato ex EA, æquale quadratis ex KF, EF, *d* hoc est, quadrato ex EF, hoc est, quadrato ex EG, quæ ipsi EF, est æqualis. Eadẽ ratione ostendemus, rectangulum sub DG, GC, vna cum quadrato ex CE, id est, ex EA, æquale esse eidem quadrato ex EG. Igitur rectangulum sub DF, AF, vna cũ quadrato ex EA, æquale erit rectangulo sub DG, GC, vna cũ quadrato ex EA: dẽptoq. cõmuni quadrato EA; remanebit rectangulũ sub DG, GC, rectãgulo sub DF, AF, æquale. *e* Quocirca erit DG, ad DF, vt AF, ad CG: *f* Vt autem DG, ad DF, ita est AB, ad AF. Ergo erit vt AB, ad AF, ita AF, ad CG: hoc est, tres AB, AF, CG, continuè proportionales erunt. *g* Sed rursus est, vt DG, ad DF, ita CG, ad CB. Igitur erit quoque CG, ad CB, vt AB, ad AF; ideoque vt AF, ad CG. Quare erunt quatuor AB, AF, CG, CB, continuè proportionales. quod erat demonstrandum.

a schol. 26. primi.
b 6. secundi
c 47. primi
d 47 primi
e 16. sexti.
f 4. sexti.
g 4. sexti

MODVS PHILONIS BYSANTIJ, qui Philopono quoque tribuitur.

SINT rursus in eadem figura inter rectas AB, BC, inueniendæ duæ mediæ proportionales. Constituto rectangulo ABCD, vna cum diametro CA, productisque lateribus DA, DC, vt supra; describatur ex E, medio puncto diametri circulus CBA, ad interuallum EC, vel EA, *h* qui necessario per angulum rectum B, transibit. Deinde circa punctum B, regula hinc inde moueatur, secans DA, DC, protractas in F, & G, & circumferentiam in O, donec BG, OF, æquales sint. Quod fiet, si per B, plurimæ lineę occultæ ducantur. Vna enim earum habebit segmentum inter rectã DG, & circulum

h schol. 31. tertij.

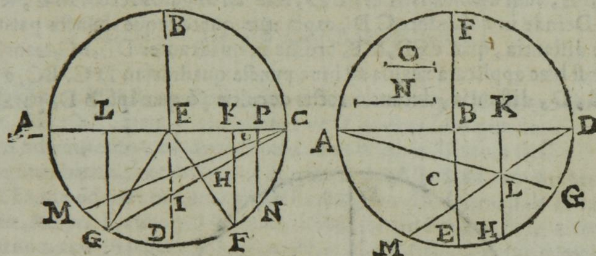
æquale

æquale segmento inter D F, & eundem circulum. Quibus peractis, dico AF,CG, medias proportionales esse inter A B, CB. Quoniam enim æquales sunt GB, F O, addita communi B O, æquales quoque erunt G O, F B: ideoque rectangulum sub GO, GB, rectangulo sub FB, FO, æquale erit. *a* Sed illud rectangulo sub DG,GC,& hoc rectangulo sub DF, AF,est æquale. Igitur & rectangulum sub DG, GC, rectangulo sub DF, A F, æquale erit. Quam ob rem, vt in præcedenti modo, ostendemus, AB, AF, CG, CB, esse continue proportionales. quod est propositum.

a 1. corol. 36. tertij.

MODIS DIOCLIS IN LIbro de Pirijs pulcherrimus.

PRAEMITTIT prius Diocles Lemma tale. Describatur circulus ABCD, cuius centrum E, cum diametris AC,BD, se se ad angulos rectos secantibus in centro E. Sumptis deinde duobus arcubus æqualibus DF, DG, iungatur recta CG, & per F, ipsi BD, parallela agatur F K, secans C G, in H.



Hoc facto, erunt FK,KC, mediæ proportionales inter AK, KH. Ducta namque G L, parallela ipsi B D, iunctisque rectis E F, E G, *b* quoniam anguli LEG, KEF, insistentes arcubus æqualibus AG,CF, æquales sunt, *c* & anguli L,K, recti, lateraque EG,EF, æqualia; *d* erunt & GL,FK,& EL, E K, inter se æquales: ideoque & reliquæ A L, C K; Immo addita communi L K, & totæ A K, C L, æquales inter se erunt. *e* Quoniam igitur est CL, ad LG, vt CK, ad KH: estque vt CL, ad LG, ita A K, ad K F, quod hę illis æquales sint: erit quoque AK, ad KF, vt CK, ad K H. *f* Vt autem A K, ad KF, ita est KF, ad CK. Igitur erit AK, ad K F, vt K F, ad C K, & C K, ad KH, hoc est, KF, CK, mediæ proportionales erunt inter A K, KH. quod est propositum. Pari ratione si, sumptis arcubus æqualibus DM, DN, iunctaque recta CM, ducatur NP, ipsi BD, parallela secans CM, in O; erunt PN,CP, inter AP,PO, mediæ proportionales, &c.

b 27. tertij.
c 27. primi.
d 26. primi.
e 4. sexti.
f schol. 13. sexti.

HOC lemmate præmisso, sint inter rectas AB, BC, reperiendæ duæ mediæ proportionales. Constituantur in altera figura ad angulum rectum B, & centro B, ad interuallum maioris BA, describatur circulus AFDE, ad cuius circumferentiam vsque protendantur AB,BC. Deinde ex A, per C, du-

cta recta ACG, sumatur in quadrante DE, punctum H, in tali situ, vt ducta HK, ipsi EF, parallela secãte ipsam AG, in L; recta ex D, per L, emissa auferat arcum E M, arcui E H, æqualem. Nam hac ratione, per lemma præmissum, erunt KH, DK, mediæ proportionales inter AK, KL. *a* Et quoniam est vt AK, ad KL, ita AB, ad BC: si fiat, vt A K, ad KH, ita A B, ad N; & vt KH, ad DK, ita N, ad O; erunt quoque N, O, mediæ proportionales inter AB, BC. Neque enim dubitandum est, esse & O, ad BC, vt D K, ad K L. Cum enim sit, vt AK, ad KL, ita AB, ad BC: habeat autem AK, ad KL, proportionem triplicatam AK, ad KH, hoc est, AB, ad N; habebit etiam A B, ad B C, triplicatam proportionem AB, ad N. Cum ergo proportio AB, ad N, sit æqualis proportioni N, ad O; erit eidem æqualis proportio O, ad B C, vt tres æquales proportiones existant inter AB, & BC. Igitur quatuor, A B, N, O, BC, continue proportionales sunt, quemadmodum quatuor A K, K H, DK, KL, quod est propositum.

a 4. *sexti.*

VERVM, quia difficile visum fuit Diocli accipere in posteriori figura punctum H, in tali situ, vt recta DM, secans AG, & parallelam HK, in L, auferat arcum E M, arcui EH, æqualem: descripsit lineam quandam inflexam ad hanc rem aptissimam, hac ratione. Describatur circulus AB C D, cuius centrum E, cum diametris A C, B D, sese ad angulos rectos in E, secantibus. Deinde in quadrante C D, capiantur quotcunque puncta parum inter se distantia, quæ ex D, & B, ordine in quadrantes DA, BC, transferantur. Post hæc applicata regula ad bina puncta quadrãtum D C, BC, æqualiter à B, D, distantia, ducantur rectæ occultæ, *b* quæ ipsi B D, parallelæ

b *schol.* 27. *tertij.*

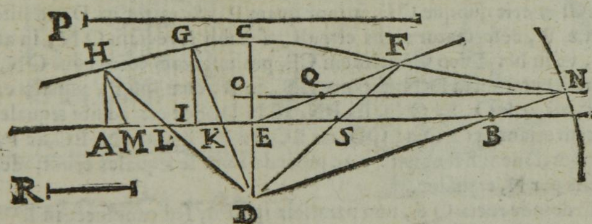
erunt. Et ex C, ad singula puncta quadrantis D A, rectæ occultæ emittantur, notenturque harum intersectiones cum prædictis parallelis occultis; nimirum punctum T, vbi recta ex C, ad proximum punctum ipsi D, ducta intersecat

intersecat

terſecat proximam parallelam ipſi BD, & ſic deinceps. Nam ſi omnia hæc interſectionum puncta rite per lineam inflexam coniungantur, qualis eſt CKTD, conſtructa erit figura medijs duabus proportionalibus inueniendis aptiſſima. Sint enim inter duas F, G, duæ mediæ proportionales inueniendæ. In diametro AC, etiam producta, ſi opus eſt, ſumatur A H, maiori F, æqualis. Ducta deinde perpendiculari H P, abſcindatur HI, minori G, æqualis. Ducta autem AI, ſecante lineam inflexam in K, agatur per K, ipſi BD, parallela LM. Denique ſumpta LN, ipſi LC, æquali, ducantur per N, & M, rectæ AN, AM, ſecantes HP, in O, P. Dico H P, H O, eſſe medias proportionales inter A H, H I, hoc eſt, inter F, & G. Quoniam enim punctum K, lineæ inflexæ inuentum eſt per rectam ad punctum quadrantis DA, ductã, quod tanto interuallo a puncto D, abeſt, quanto punctum M, ab eodem diſtat, vt ex deſcriptione lineæ inflexæ liquet; erunt ex lemmate Dioclis quatuor rectæ AL, LM, LC, vel L N, & L K, continue proportionales. a Cũ ergo hiſce quatuor rectis proportionales ſint quatuor rectę AH, HP, HO, HI; erunt hæ quoq. continue proportionales. quod eſt propoſitum. a 4. ſexti.

MODVS NICOMEDIS IN libro de lineis Conchoidibus.

NICOMEDES conſtruit prius inſtrumentum quoddam, quo lineam inflexam deſcribit, quam Conchilem, vel Conchoideos appellat. Sed nos omiſſo eo inſtrumento, eandem (quod ad noſtrum inſtitutum ſatis eſt) per puncta delineabimus, hac ratione. Sit recta linea AB, & ad eam perpendicularis CD, in pũcto E. Sumatur deinde infra E, punctũ D, pro polo lineæ deſcribendæ, & ſupra E, aliud punctum C, vt libet. In vſu lineæ deſcriptæ conſtabit, quantum tam punctum D, quã punctum C, a puncto E, abeſſe debeat. Si igitur ex D, ducantur plurimæ lineæ occultæ parum inter ſe diſtantes, &



ex ſingulis abſcindantur portiones rectæ EC, æquales, initio ſemper facto à recta A B; extrema autem harum portionum puncta per lineam inflexam coniungantur deſcripta erit linea conchilis. Exemplum habes in quatuor lineis DH, DG, DF, DN, in quibus ſumptæ ſunt LH, KG, SF, B N, ipſi EC, æquales, per quarum extrema puncta H, G, F, N, inflexa linea incedit. Et quo

quo plures lineæ occultæ ex D, educentur, eo crebriora puncta inuenientur, per quæ transire debet linea inflexa.

SEQVITVR ex descriptione huius lineæ, eam nunquam posse cum recta AB, couenire, licet vtraque in infinitum producatur: quia puncta, per quæ incedit, sunt omnia supra rectam AB, terminantia nimirum segmenta rectarum ex D, prodeuntium (*a* quæ quidem omnes rectam AB, intersecant) ipsi EC, æqualia.

a *pronunciatū* 11. *lib.* 1.

DEMONSTRAT deinde Nicomedes duas proprietates huius lineæ insignes. Prima est. Quodlibet eius punctum à puncto C, diuersum minus distat à recta AB, quam punctum C: Aliorum autem punctorum, quod remotius est à C, minus distat ab eadem recta AB, quam quod minus remotum est. Ducta enim recta quacunque DG, demittatur perpendicularis GI. *b* Et quia KG, maior est quam GI; erit quoque perpendicularis EC, (ipsi KG, æqualis) maior quam perpendicularis IG, hoc est, punctum C, magis distabit à recta AB, quam punctum G. Eademque ratione magis à recta AB, distabit punctum C, quam quoduis aliud. Sumatur deinde aliud punctum H, remotius à C, quam punctum G, demittaturque perpendicularis HA. Dico punctū H, minus distare à recta AB, quam punctū G, hoc est, perpendicularem HA, minorem esse perpendiculari GI, Ducta namque recta DH, *c* erit angulus DKE, maior angulo DLE. *d* hoc est, angulus GKI, angulo HLA. Cum ergo recti I, A, æquales sint; *e* erit reliquus G, reliquo AHL, minor. Si igitur ipsi G, fiat æqualis AHM; erunt triangula KGI, MHA, æquiangula; *f* ideoque erit, vt MH, ad HA, ita KG, ad GI. *g* Et quia LH, maior est, quam MH, *h* (quod angulus HML, maior sit recto A, *i* & HLM, minor) *k* erit maior proportio LH, ad HA, quam HM, ad HA, hoc est, quam GK, ad GI: ac proinde cum GK, HL, æquales sint, erit quoque maior proportio HL, ad HA, quam HL, ad GI; *l* ideoque HA, minor erit quam GI. quod est propositum.

b 19. *primi.*
c 16. *primi.*
d 15. *primi.*
e 32. *primi.*
f 4. *sexti.*
g 19. *primi.*
h 16. *primi.*
i 17. *primi.*
k 8. *quinti.*
l 10. *quinti.*

ALTERA proprietas est. Quamuis Conchilis CF, nunquam conueniat cum recta EB, tamen cum qualibet alia recta, etiam ipsi EB, propinquissima, conuenit. Sit enim primum recta NO, ipsi EB, parallela, secans EC, in O. Fiat vt EO, ad OD, ita EC, ad P. Et quoniam EO, minor est quam EC: *m* erit quoque OD, minor quam P. Si igitur ex D, ad interuallum rectæ P, describatur arcus circuli, secabit is rectam ON, in aliquo puncto, vt in N. Dico Conchilem CF, prolongatam coire cum ON, in N. Ducta enim recta DN, secante EB, in B, quæ ipsi P, æqualis erit; *n* quoniam est vt EO, ad OD, ita BN, ad ND; hoc est, ad sibi æqualem P. Fuit autem etiam, vt EO, ad OD, ita EC, ad P. Igitur BN, EC, ad P, eandem proportionem habebunt: *o* ac proinde inter se æquales erunt; ideoque Conchilis per N, transibit.

m 14. *quin.*
n 4. *sexti.*
o 9. *quinti.*

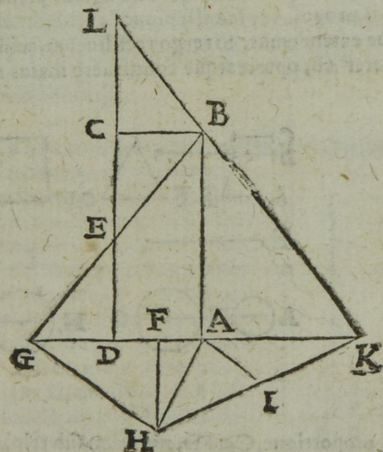
SIT deinde recta QF, non parallela ipsi EB, sed eam secet in E, vergatque versus Conchilem. Quia igitur Conchilis cum recta ON, conuenit, conueniet prius cum ipsa QF, in F, vt perspicuum est.

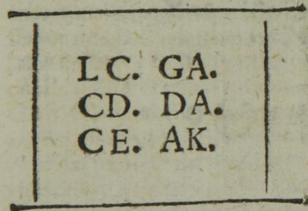
POST hæc Nicomedes dissoluit huiusmodi problema. Dato quouis angulo rectilineo, & puncto extra lineas angulum datum comprehendentes: Ab illo puncto educere rectam secantem rectas datum continentes angulum, ita vt eius portio inter illas rectas intercepta æqualis sit datæ rectæ.

In-

In eadem namque figura rectæ EB,EF,angulum contineant BEF, ducendaque ſit ex D, linea, ita vt eius portio inter EB, EF, æqualis ſit datæ rectæ, R. Ex O, ad inferiorem lineam E B, ducatur perpendicularis D E, ſumaturque E C, datæ rectæ R,æqualis: & polo D, interuallo vero EC,Conchilis deſcribatur, quæ per ſecundam proprietatem rectam E F, ſecabit in F. Ducta ergo recta DF, ſecante EB, in S; erit SF, ipſi EC, hoc eſt,ipſi R, æqualis, vt ex deſcriptione Conchilis liquet.

HIS præmiſſis, ſint duæ rectæ AB,BC, ad angulum rectum B,coniunctę, inter quas reperiendæ ſint duæ lineæ mediæ proportionales. Compleatur rectangulum AC, cuius duo latera AD,CD,biſariam ſecentur in F, E. Ducta autem ex B, per E, recta ſecante AD, productam in G; *a* erit — a 26.primi
DG, ipſi CB, hoc eſt, ipſi DA, æqualis; propterea quod anguli D, E, trianguli DEG,angulis C,E,triãguli CEB,æquales ſunt,& latera quoq; DE, CE,quibus adiacẽt,æqualia.Rurſus ductã perpẽdicularẽ FH,ſecet AH,ipſi CE,æqualis.quod fiet,ſi ex A,ad interuallũ CE,arcus delineetur ſecans FH, in H. Deinde iuncta recta G H, ducatur ei parallela A I: atque producta D A; ex H,per problema præcedens, ducatur recta HK, vtramque AI, AK, ita ſecans,vt intercepta IK,ipſi AH,vel CE, æqualis ſit. quod fiet, ſi ex H, plurimæ rectæ ducentur occultæ, donec vnius portio intercepta æqualis ſit ipſi AH,vel CE. Poſtremo ex K, per B, recta extendatur ſecans D C, productam in L. Dico duas A K, C L, medias proportionales eſſe inter AB, BC. *b* Quoniam enim — b 2.sexti.
eſt LC,ad CD,vt LB,ad BK,hoc eſt, vt D A, ad AK; Et vt CD, ad CE,ita eſt GA, ad DA, quod vtraque CD, GA, ſecta ſit biſariam in E,D:erit ex proportione





perturbata LC, ad CE, vt GA ad A K, vt in hac formula appa ret: hoc eſt, vt HI, ad I K. Cum ergo C E, ipſi IK, ſit æqualis per constructionem, *c* erit quoque LC,ipſi HI,æqualis,& tota LE,toti HK. *d* Deinde quia — c 14.quinti
rectangulum ſub D K, K A, vna cum quadrato ex A F, æquale eſt quadrato — d 6.ſecũdi.
FK; addito communi quadrato ex FH, erit rectangulum ſub DK,KA,vnà cũ quadratis ex AF, FH, *e* hoc eſt, vna cum quadrato ex AH,vel ex CE,æquale quadratis ex KF,FH,hoc eſt, quadrato ex HK, id eſt,ex LE, ipſi H K, æquali. *f* Sed & rectangulum ſub DL,LC, vna cum eodem quadrato ex C E, — e 47.primi. f 6.ſecũdi.
æqua-

æquale quoque eſt eidem quadrato ex LE. Igitur rectangulum ſub DK, AK, vna cum quadrato ex CE, æquale erit rectangulo ſub DL, LC, vna cum eodẽ quadrato ex CE; Et dempto communi quadrato CE, reliquum rectangulum ſub D L, LC, reliquo rectangulo ſub DK, AK, æquale erit. *a* Igitur erit DL, ad DK, *b* hoc eſt, AB, ad AK, vt AK, ad LC. *c* Vt autem AB, ad AK, ita eſt quoque LC, ad CB. Igitur erit AB, ad AK, vt AK, ad LC, & vt LC, ad CB: ac proinde AK, LC, mediæ proportionales erunt inter datas AB, BC, quod eſt propoſitum.

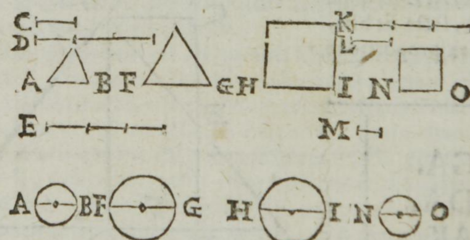
a 16. *ſexti.* *b* 4. *ſexti.* *c* 4. *ſexti.*

QVOD ſi datæ duæ rectæ ſint nimis longę, accipi poterunt earum ſemiſſes, vel tertiæ partes, &c. atque inter eas duæ mediæ inquirendæ. Nam ſi inuentæ duplicentur, vel triplicentur, &c. habebuntur duæ mediæ inter datas duas. Quod etiam in alijs modis intelligendum eſt.

PROBL. 11. PROPOS. 16.

DATAM figuram planam, vel circulum augere, vel minuere in data proportione.

HOC problema, quod ad figuras planas rectilineas attinet, explicauimus propoſ. 15. ſcholij propoſ. 33. lib. 6. Euclid. Nunc idem ad circulos quoque extendemus. Sit ergo rectilineum, cuius latus AB, vel circulus, cuius diameter AB, oporteatque conſtituere maius rectilineum, vel circulum maiorẽ



in proportione, C, ad D, nimirum ſub tripla. Tribus lineis C, D, AB, inueniatur quarta proportionalis E, atque inter AB, & E, reperiatur media proporportionalis FG, & ſupra FG, figura conſtruatur ſimilis datæ figuræ A B, ſimiliterque poſita. Item circulus deſcribatur circa diametrum F G. Dico tam rectilineum AB, eſſe tertiam partem rectilinei FG, quam circulum AB, circuli FG, nimirum eandem habere proportionem AB, ad FG, quam habet C, ad D. Quoniam enim tres rectæ AB, F G, & E, continue proportionales ſunt, *d* erit figura AB, ad figuram FG, vt AB, ad E, hoc eſt, vt C, ad D. *e* Quia vero eſt, vt quadratum ex AB, ad quadratum ex FG, ita circulus AB, ad circulum

d coroll. 19 vel 20. ſexti. *e* 2. duodec.

culum FG; eſtque quadratum AB,ad quadratum FG,vt AB, ad E; erit quoque circulus AB,ad circulum FG, vt AB,ad E,vel vt C,ad D.

SIT deinde figura, vel circulus H I, oporteatque conſtruere minorem figuram, vel circulum in proportione K, ad L, nimirum tripla. Tribus rectis K, L, H I, inueniatur quarta proportionalis M: atque inter H I, & M, media proportionalis inueniatur NO, ſupra quam conſtruatur figura ſimilis ſimiliterque poſita figuræ H I: Item circulus deſcribatur circa diametrum N O. Dico tam figuram H I, ad figuram NO, quam circulum HI, ad circulum N O, habere proportionem triplam,eandem videlicet, quam habet K,ad L.Quoniã enim tres rectæ HI, NO, & M, continue ſunt proportionales; *a* erit figura HI, ad figuram NO,vt recta HI, ad M, hoc eſt, vt K, ad L. *b* Et quia eſt, vt quadratum HI, ad quadratum NO, ita circulus H I, ad circulum NO; eſtque quadratum HI,ad quadratum NO,vt recta HI,ad M; erit quoque circulus HI,ad circulum NO,vt recta HI,ad M,vel vt K, ad L.

a coroll. 19. vel 20. ſexti.
b 2. duode.

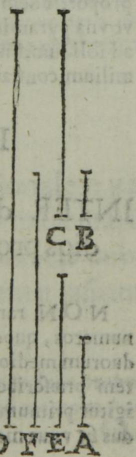
EX his conſtat, qua ratione, dato foramine rotundo,vel etiam quadrato alicuius fontis, aliud foramen rotundum, vel quadratum maius, vel minus in quacunque proportione conſtruendum ſit.

PROBL. 12. PROPOS. 17.

DATAM figuram ſolidam qualemcunque ex iis, de quibus Eucl.in lib.Stereometriæ agit, augere vel minuere in proportione data.

HVIVSMODI figuræ ſolidæ ſunt parallelepipedum, Pyramis,Priſma, ſphæra,Conus,Cylindrus,& quinque corpora regularia.

SIT ergo figura ſolida, cuius latus A,vel ſphæra, cuius diameter A,augenda primum in proportione B, ad C. Tribus rectis B,C, A, inueniatur quarta proportionalis D: atque inter A, & D, reperiantur duæ mediæ proportionales E,F. Dico ſolidum lateris A,ad ſolidum ſupra latus E,nimirum ſupra mediam proportionalem, quæ propinquior eſt lateri dato A,conſtructum ſimile, ſimiliterque poſitum ſolido ſupra latus A, conſtituto, habere proportionem, quam B,habet ad C. Item ſphæram datam diametri A, ad ſphæram diametri E,eſſe,vt B,ad C.Quoniã.n. figura ſolida lateris A, ad figuram ſolidã lateris E, ſimilem ſimiliterque poſitam habet proportionem triplicatam lateris A, ad latus E,vt lib.11.&12.Eucl.demonſtratũ eſt:Similiter Conus & Cylindrus, cuius baſis diameter A,ad Conum & Cylindrum ſimilem, cuius diameter E: Nec non ſphæra diametri A,ad ſpæram diametri E; Eſt autem,ex defin.10. lib. 5. Euclid. proportio quoque A,ad D, triplicata proportionis A, ad E: Erit ſolidum A, ad ſolidum E, vt A, ad D, hoc eſt,vt B,ad C.quod eſt propoſitum.



SIT deinde ſolidum lateris, vel diametri D, minuendum

dum in proportione data C, ad B. Tribus C, B, D, inueniatur quarta proportionalis A; atque inter D, & A, reperiantur duæ mediæ proportionales F, E. Dico solidum lateris, vel diametri D, ad solidum simile, similiterque descriptum supra F, nimirum supra mediam proportionalem, quæ lateri dato D, propinquior est, proportionem habere, quam C, ad B. Quoniam enim solidum D, ad simile similiterque descriptum solidum F, proportionem habet triplicatam lateris D, ad latus F: qualem etiam habet ex defin. 10. lib. 5. Eucl. recta D, ad rectam A: erit solidum D, ad solidum F, vt D, ad A, id est, vt C, ad B. quod est propositum.

CONSTAT ex his, qua ratione Cubus non solum duplicandus sit, (quod veteres inquirebant) sed etiam augendus minuendusue in quacunque proportione: Item quo pacto pylæ bombardarum maiores, aut minores fieri debeant secundum proportionem datam.

SCHOLIVM.

FIGVRAS solidas similiterque positas habere proportionem triplicatam homologorum laterum, demonstratum est de parallelepipedis quidem lib. 11. Eucl. propos. 33. De Pyramidibus vero lib. 12. propos. 8. eiusq. coroll. & de Prismatis, in eiusdem scholio. De sphæra autem lib. eodem 12. propos. 18. De Conis deinde & Cylindris eodem lib. 12. propos. 12. si pro lateribus homologis sumantur diametri sphærarum, & diametri basium Conorum, & Cylindrorum. Ac tandem de quinque corporibus regularibus in coroll. propos. 17. lib. 12. quippe cum omnia hæc corpora in sphæris describi possint.

QVAMVIS autem problema hoc de supradictis corporibus duntaxat proposuerimus, idem tamen etiam locum habet in alijs cuiusque generis corporibus similibus, similiterque positis, vt perspicuum est; propterea quod diuidi possunt in pyramides similes, æquales numero; *a* quæ quidem proportionem habent laterum homologorum triplicatam. *b* Cum ergo sit, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes ad omnes, id est, ita solidum ad solidum; sintque eadem latera homologa solidorum, quæ pyramidum similium, constat propositum.

a 8. duodec. eiusq. corol.
b 12. quinti

PROBL. 13. PROPOS. 18.

INTER duos numeros datos tum vnum, tum duos medios proportionales reperire.

NON raro figura siue plana, siue solida augenda, vel minuenda est per numeros, quod quidem sine inuentione vnius medij proportionalis, vel duorum mediorum inter datos duos numeros perfici non potest: idcirco artem præscribemus, qua huiusmodi medias inuenire possimus. Propositis igitur primum duobus numeris quibuscunque 9. & 25. inter quos reperiendus sit vnus medius proportionalis; si multiplicentur inter se, & producti

numeri 225. radix quadrata eruatur 15. vt in Arithmetica practica cap. 26. docuimus: a erit radix hæc quadrata medio loco proportionalis inter datos numeros, vt hic 9. 15. 25. quippe cum quadratum medij numeri æquale sit rectangulo sub extremis comprehenso. Sic inter 5. & 13. medius proportionalis erit radix quadrata numeri 65. qui ex multiplicatione datorum numerorum gignitur, quæ radix paulo maior est, quam $8\frac{1}{17}$. & paulo minor, quam $8\frac{1}{16}$.

a 17. sexti, vel 20. sept.

SINT deinde duo numeri 2. & 54. inter quos inueniendi sint duo medij proportionales. Multiplicetur quadratus minoris in maiorem. Producti namque numeri 216. radix cubica 6. erit primus medius iuxta minorem collocandus. Et si maioris quadratus ducatur in minorem, erit producti numeri 5832. radix cubica 18. alter medius iuxta maiorem statuendus, vt hic 2. 6. 18. 54. Ratio huius rei est, quod datis quatuor lineis continuè proportionalibus, parallelepipedum sub quadrato alterutrius extremarum, & sub altera extrema comprehensum, equale est cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremo assumpto propinquior est, vt in sequenti Lemmate demonstrabimus. Quoniam vero, vt in scholio propos. 19. lib. 8. Euclid. ostendimus, propositis hisce tribus numeris 2. 2. 54. idem procreatur numerus, siue prius ducantur 2. in 2. deinde productus 4. in 54. siue prius 2. in 54. deinde productus 108. in 2. Item datis hisce tribus numeris, 54. 54. 2. idem numerus gignitur, siue prius ducantur 54. in 54. deinde productus 2916. in 2. siue prius 54. in 2. deinde productus 108. in 54. manifesto colligitur, si minor 2. ducatur in maiorem 54. & productus 108. in minorem 2. produci quoque cubum medij proportionalis iuxta minorem constituendi: Item si maior 54. ducatur in minorem 2. & productus 108. in maiorem 54. procreari cubum medij proportionalis iuxta maiorem scribendi. Sic inter 4. & 100. erunt duo medij proportionales, Radix cubica numeri 1600. & Radix cubica numeri 40000. Cœterum inuento altero mediorum numerorum, reperietur alter etiam, si inuentus per extremum remotiorem multiplicetur & producti numeri radix quadrata capiatur. Vt in dato exemplo 2. 6. 18. 54. si medius inuentus 6. ducatur in 54. erit producti numeri 324. radix quadrata 18. alter medius: Item inuentus medius 18. si multiplicetur per 2. erit producti numeri 36. radix quadrata 6. alter medius: propterea quod tam 2. 18. quam 6. 18. 54. sunt tres continuè proportionales.

LEMMA.

SI sint quatuor lineæ continuè pro portionales: parallelepipedum sub quadrato alterutrius extremarũ, & altera extrema comprehensum, æquale est cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremæ assumptæ propinquior est.

REPETATVR figura propos. 17. in qua lineæ quatuor continue proportionales sunt A, E, F, D. Dico parallelepipedum sub quadrato extremæ A, &

a *corol.20. sexti.* b *34. undecimi.* c *coroll.20 sexti.* d *34. undecimi.*

sub extrema altera D, contentum, cubo rectæ E, æquale esse. *a* Quoniam enim quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, proportionem habet, quam A, ad F, id est, quam E, ad D, reciprocabuntur bases cum altitudinibus, cum basis parallelepipedi sit quadratum rectæ A, & eiusdem altitudo recta D: cubi autem basis, quadratum rectæ E, & altitudo ipsamet recta E. *b* Igitur æqualia erunt parallelepipedum, & cubus. Eadem ratione erit parallelepipedum sub quadrato extremæ D, & sub altera extrema A, contentum æquale cubo rectæ F. *c* Nam cum sit, vt quadratum rectæ D, ad quadratum rectæ F, id est, vt basis dicti parallelepipedi ad basem dicti cubi, ita D, ad E, hoc est, ita F, ad A, hoc est, ita altitudo cubi, ad altitudinem parallelepipedi; reciprocabuntur quoque bases cum altitudinibus: *d* ideoque æqualia erunt parallelepipedum, & cubus. quod est propositum.

QVIA vero in nostra Arithmetica practica solum radicis quadratæ extractionem explicauimus, operæ me pretium facturum puto, radicis cubicæ extractionem hoc loco, quamuis fortasse alieno, inserere: quandoquidem ea necessaria omnino est, vt problema hoc 13 ad opus possit deduci. Hoc autem efficiam, si præscribam artem quandam generalem, qua cuiuscunque generis radicem extrahere possimus, ex libro eximij cuiusdam Arithmetici Germani depromptam ferme totam: quod quidem studioso Lectori non iniucundum, aut ingratum fore confido.

PROBL. 14. PROPOS. 19.

RADICEM cuiuslibet generis extrahere.

Extractio radicis quid.

EXTRACTIO radicis est inuentio numeri ex proposito numero, qui multiplicatione aliqua in se numerum propositum producat. Vt extractio quadratæ radicis est inuentio numeri ex numero quadrato, qui quadratè multiplicatus ipsum producat: Et extractio radicis cubicæ, est inuentio numeri, qui in se ductus cubicè producat cubum propositum, &c. Quid autẽ sit multiplicare numerum quadrate, aut cubice, aut alio modo, mox explicabo.

Infinitæ species radicum.

QVEMADMODVM igitur infinitæ sunt species multiplicationum numerorum in se, vt statim dicam, ex quibus oriuntur numeri quadrati; & solidi, vt cubi, Zensizensi, Surdesolidi &c. qui à Iunioribus nonnullis in Algebra explicari solent: sic etiam infinitæ sunt radicum species iuxta varias numerorum appellationes, qui consurgunt ex varia radicum multiplicatione. Quæ omnia pulchre nobis repræsentat naturalis numerorum progressio, inseruiens progressionibus Geometricis ab vnitate incipientibus: vt hic.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	&c.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	&c.
	Radix	Quadratus	Cubus.	Zenſizēſus	Surdeſolidus.	Zenſicubus	B, ſurdeſolidus.	Zenſizenzenſus.	Cubicubus	Zenſurdeſolidus.	

PRIMVM numeri ſuperioris progreſſionis ſignificant ſpecies multiplicationum. Vt 2. ſupra quadratum ſignificat, multiplicationem quadratā fieri, dum radix bis ponitur, & ſic multiplicatur, vt 2.2. facit 4. Sic 3. ſignificat, multiplicationem cubicam fieri, dum radix ter ponitur, atque ita multiplicatur, vt 2.2.2. facit 8. Pari ratione. 4. oſtendit multiplicationem Zenſizenſicam: Et 5. ſurdeſolidam, &c.

DEINDE ijdem numeri ſignificant radicum ſpecies. Vt 2. ſignificat, radicem quadratam producere quadratum per multiplicationem quadratā: Et 3. denotat, radicem Cubicam procreare Cubum per multiplicationem cubicam: Et ſic deinceps.

IN extractionibus igitur radicum obſeruanda eſt ſignatio figurarum per puncta in numero, ex quo radix aliqua extrahenda eſt, hoc modo.

IN extractione radicis quadratæ ſignantur omnes figuræ in locis imparibus, incipiendo à dextris: ita vt alternatim ſemper vna figura omittatur, quæ non ſignetur.

Quo modo figuræ per puncta ſignentur.

Pro quadrata.

6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6

Pro cubica

6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6

Zenſizenſica.

6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6

Pro ſurdeſolida.

6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6

IN extractione cubica omittuntur ſemper duæ figuræ. In Zenſizenſica tres. In ſurdeſolida quatuor. Et ſic deinceps in infinitum. Vt in appoſitis exemplis vides.

RESPONDENT autem hæ ſignationes medijs proportionalibus. Vt quoniam inter duos quadratos cadit vnus medius, ideo in extractione radicis quadratæ omittitur ſemper vna figura: Inter duos vero Cubos cadunt duo medij, idcirco omittuntur ſemper duæ figuræ, & ſic de cæteris.

PRO qualibet autem ſpecie radicis extrahendæ inſeruiunt quidam numeri peculiares: qui per ſequentem tabulam inueniūtur, quæ hoc modo conſtruitur. Prima columna continet ſeriē naturalem numerorum. Ex hac columna naſcitur ſecunda: tertia ex ſecunda: & quarta ex tertia, hoc modo. Relictis duabus cellulis primæ columnæ, repetitur numerus tertiæ cellulæ in ſecunda columna. Deinde ex additione duorum numerorum, id eſt,

Cōstructio tabulæ mirificæ.

1								
2								
3	3							
4	6							
5	10	10						
6	15	20						
7	21	35	35					
8	28	56	70					
9	36	84	126	126				
10	45	120	210	252				
11	55	165	330	462	462			
12	66	220	495	792	924			
13	78	286	715	1287	1716	1716		
14	91	364	1001	2002	3003	3432		
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	
17	136	680	2380	6188	12376	16448	24310	24310

ex tertio primæ columnæ,& primo ſecundæ columnæ,fit ſecundus numerus ſecundæ columnæ. Eodem modo ex ſecundo numero ſecundæ columnæ, & ex eius collaterali conficitur tertius ſecundæ columnæ: Atque ex tertio numero ſecundæ columnæ,& ex eius collaterali fit quartus eiuſdem ſecundæ columnæ, & ſic deinceps. Continentur autem in ſecunda columna omnes numeri triangulares. Non aliter tertia columna ex ſecunda oritur, & quarta ex tertia, &c. Semper enim in qualibet columna relinquuntur duæ primæ cellulæ, & numerus tertiæ cellulæ repetitur pro primo numero ſequentis columnæ: atque ex additione eius numeri cum collaterali præcedentis columnæ conflatur ſecundus numerus, &c.

Quo pacto ex superiori tabula, deſumãtur numeri pro ſingulis radicum ſpeciebus.

HAC extructa tabula, deſumuntur numeri peculiares ex ordinibus tranſuerſalibus hoc ordine. Numeri cuiuslibet ordinis tranſuerſalis ordine ſcribuntur, iidemque ordine retrogrado repetuntur, vltimo ſemper excepto, & penultimo etiam tunc ſolum, quando vltimo æqualis eſt. Vt in ſecundo ordine ſumitur tantum numerus 2. quia cum ſit vltimus, non repetitur. In tertio ſumuntur quoque hi duo tantum 3. 3. quia penultimus non repetitur, cum ab vltimo non differat. In quarto autem ſumendi ſunt hi tres. 4. 6. 4. In nono hi octo 9. 36. 84. 126. 126. 84. 36. 9. Et in decimo hi nouem 10. 45. 120. 210. 252. 210. 120. 45. 10. &c. Vbi vides, ſemper tot numeros aſſumi, quot ſunt vnitates in primo numero tranſuerſali, minus vno. Vt in ordine ſeptimodecimo aſſumendi erunt hi ſexdecim 17. 136. 680. 2380. 6188. 12376. 19448. 24310. 24310. 19448. 12376. 6188. 2380. 680. 136. 17. & ſic de cæteris.

CVILIBET deinde numero præponendæ ſunt tot cifræ, quot numeri ab eo incluſiue numerantur vſque ad vltimum aſſumptum. Vt numero 2. ſecundi ordinis præponenda eſt vna cifra, hoc modo, 20. Sed duo tertij ordinis habebunt has cifras 300. 30. Sic in nono ordine, vbi aſſumuntur octo numeri, primus habebit octo cifras, ſecundus ſeptem, tertius ſex, & ſic ſemper minuendo vnam. Cuius autem radicis extractioni inſeruiant prædicti numeri in quolibet ordine tranſuerſali accepti, pulchre indicat primus numerus ordinis tranſuerſalis. Vt quia in ſuperiori progreſſione numerus 2. notat quadratum, & 3. cubum: & 4. Zenſizenſum, &c. ideo numerus 2. ſecundi ordinis cum ſua cifra, hoc modo. 20. inſeruit radici quadratæ: Et duo numeri ex tertio ordine aſſumpti cum ſuis cifris, hoc modo 300. 30. radici cubicę: Et tres quarti ordinis, hoc modo 4000. 600. 40. radici Zenſizenſicæ: & quatuor quinti ordinis, hoc modo, 50000. 10000. 1000. 50. radici ſurdeſolidæ, &c.

IAM vero vt propius ad extractionem radicum accedamus, ſciendum eſt, radicem cuiuslibet numeri habere tot figuras, quot puncta ſub ipſo ſignata ſunt, ſecundum doctrinam ſuperiorem. Item ad punctum vltimum verſus ſiniſtram pertinere ipſam figuram ſupra punctũ poſitam, cum omnibus alijs, quæ ipſam verſus ſiniſtram præcedunt. Ex quo puncto ſi ſubtrahatur numerus, vt mox dicemus, ſpectabit ad penultimum punctum figura ſupra ipſum punctum cum reliquis ad ſiniſtram, & ſic de cæteris. Quot figuras quælibet radix habea.

VT autem ritè incipiat extractio cuiuslibet radicis, conſtruenda erit tabella quadratorum, cuborum, ſurdeſolidorum, B ſurdeſolidorum, & aliorum numerorum, qui ex nouem figuris Arithmeticis producuntur, cum ſuis radicibus. Vt hic vides.

Radices.	Quadrati.	Radices	Cubi	Radices	Surdeſolidi.	Radices	B. ſurdeſolidi.
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	2	8	2	32	2	128
3	9	3	27	3	243	3	2187
4	16	4	64	4	1024	4	16384
5	25	5	125	5	3125	5	78125
6	36	6	216	6	7776	6	279936
7	49	7	343	7	16807	7	823543
8	64	8	512	8	32768	8	2097152
9	81	9	729	9	59049	9	4782969

Cur autem non appoſuerim tabellas Zenſizenſorum. & zenſicuborum, cauſa eſt, quod eiuſmodi numerorum radices non egent nouis præceptis, vt poſtea dicetur. Sequuntur ergo iam extractionum exempla aliquot.

EXTRACTIO RADICIS
Quadratæ.

Quadratæ radicis extractio.

SIT numerus propoſitus 6765201. ex quo erui debet radix quadrata.

PRIMVM ab vltimo puncto, id eſt, à figura 6. (Hoc enim punctum vnam tantum habet figuram, cum eam nulla alia præcedat) ſubtrahitur maximus quadratus, qui ſubtrahi poteſt, nimirum 4. & in Quotiente ad marginem ponitur eius radix 2. In reſiduo autem manent 2. pro ſequenti puncto. quod erit 276. atque ita abſolutum eſt vltimum punctum, quod eſt in operatione primum.

Radix 2601.

DEINDE paro diuiſorem ex figura 2. inuenta in Quotiente multiplicata per 20. nimirum per numerum radici quadratæ inſeruientem: quem inuenio 40. Per hunc diuido punctum ſequens 276. & pro Quotiente reperio 6. Pono ergo primum Quotientem 2. ad ſiniſtram, numerum peculiarem 20. in medio, & nouum Quotientem 6. ad dextram, ſub quo ſcribo eius quadratum 36. vt hic vides.

2--20--6.
36.

POST hęc multiplico tres numeros 2. 20. 6. inter ſe, & producto 240. addo quadratum 36. & ſummam 276. ex puncto 276. detraho, nihilque relinquitur, atque ita abſolutum eſt ſequens punctum: aliudque ſequens punctum eſt 52.

PARO iam diuiſorem ex toto Quotiente inuento 26. ducto in 20. id eſt, in numerum peculiarem quadratæ radicis, quem inuenio 520. Et quia per hunc diuidi non poteſt punctum 52. pono in Quotiente 0. neque opus eſt multiplicare, vt reperiatur numerus ſubtrahendus, quia nihil ſubtrahitur, cum 0. multiplicans producat 0. Et ſic fit in omnibus alijs extractionibus, quando diuiſor inuentus in puncto propoſito ne ſemel quidē continetur: atque ita abſolutum eſt punctum 52. punctumque inſequens eſt 5201.

PARO iterum diuiſorem ex toto Quotiente inuento 260. ducto in numerum peculiarem 20. quem reperio 5200. qui ſemel in puncto 5201. continetur. Pono ergo totū Quotientē prius inuentū 260. ad ſiniſtrā, & numerū peculiarem 20. in medio, & Quotientē 1. nunc inuentum ad dexteram, eiuſque quadratum 1. ſub illo, vt in exemplo patet.

260--20--1
1

MVLTIPLICATIO trium ſuperiorum numerorum facit 5200. addo quadratum 1. figuræ inuentæ 1. fit numerus 5201. qui ex puncto 5201. detractus nil relinquit. Eſt ergo abſoluta extractio, radixque inuenta eſt 2601. quæ quadratè, id eſt, in ſe multiplicata producit propoſitum numerum 6765201.

ATQVE hæc eſt probatio, vel examen cuiuſuis extractionis, vt videlicet radix inuenta in ſe multiplicetur vel quadratè, vel cubice, vel ſurdeſolide, &c. pro qualitate radicis. Si enim in extractione nihil fuit relictum, veluti in noſtro exemplo, neceſſe eſt, numerum productum æqualem eſſe propoſito numero, ex quo facta eſt extractio: Si autem in extractione aliquid fuit relictum, illud additum producto numero conficiet numerum propoſitum. Inſtitui quoque poteſt examen per 9. vel 7. vt in Diuiſione. Nam ſi ex inuenta radice abijciantur 9. vel 7. quoties fieri poteſt, & reſiduum

duum collocetur tum in ſiniſtra parte crucis, tum in dextra, quod Quotiens, vel radix inuenta ſit etiam inſtar Diuiſoris. Hoc enim reſiduo in ſe multiplicato quadrate, vel cubice, &c. & ex producto abiectis 9. vel 7. neceſſe eſt, reſiduum hoc æquale eſſe reſiduo numeri propoſiti, ſi abijciantur ex eo omnia 9. vel 7. & nihil in extractione relictum ſit. Nam alioquin ex reſiduo extractionis, & ex producto radicis inuentæ in ſe multiplicatæ abijcienda erunt omnia 9. vel 7. Hoc enim reſiduum æquale eſſe debet reſiduo numeri propoſiti, ſi omnia 9. vel 7. abijciantur. In noſtro exemplo, ſi probatio inſtituatur per 9. reſiduum ſemper eſt 0. Si vero fiat per 7. ſtabit exemplum examinis vt hic apparet.

```
    0
  0 X 0
    0

    2
  4 X 4
    2
```

EXTRACTIO RADICIS cubicæ.

SIT ex numero 23948̣3̣19̣0. extrahenda radix cubica.

Cubicæ radicis extractio. radix 621.

PRIMVM ex puncto 239. ſubtraho cubum 216. qui eſt maximus in eo contentus, cuius radicem 6. ſcribo in Quotiente ad marginem. Et quia relinquitur numerus 23. erit ſequens punctum 23483.

DEINDE paro Diuiſorem hoc modo. Supra radicem inuentam 6. pono eius quadratum 36. Et ad dextram colloco duos numeros peculiares radicis cubicæ, nimirum 300. & 30. vt hic vides. Multiplico ſuperiores duos numeros 36. & 300. inter ſe, & producto 10800. addo productum 180. ex multiplicatione numerorum inferiorum 6. & 30. inter ſe. Nam ſumma 10980. erit Diuiſor. Satis etiam eſſet productus ex duobus ſuperioribus inter ſe multiplicatis, nimirum 10800. pro Diuiſore. quod in alijs extractionibus intelligendum quoque eſt. Diuido ergo punctum meum 23483. per diuiſorem inuentum 10980. & Quotientem 2. ſcribo poſt figuram 6. prius inuentam. Pingo poſt hæc figuram huiuſmodi. Ad dextrã numerorum 36. & 300. colloco inuentam figuram 2. & infra eam eius quadratum 4. & ſub hoc cubum eiuſdem 8. Nam ſi tam ſuperiores tres numeri 36. 300. & 2. quam inferiores tres 6. 30. & 4. inter ſe multiplicentur, & productis 21600. & 720. addatur cubus 8. fiet numerus 22328. quem ſi ex meo puncto 23483. ſubtraham, remanent 1155. atque adeo punctum ſequens erit 1155190.

```
36—300
 6— 30
```

```
36—300.—2.
 6— 30.—4.
          8.
```

PARO iam alium diuiſorem hoc pacto. Supra 62. radicem hactenus inuentam ſcribo eius quadratum 3844. & ad dextram eoſdem numeros peculiares 300. & 30. Multiplicatio duorum ſuperiorum inter ſe facit diuiſorem 1153200. per quem ſi diuidatur punctum 1155190. fit Quotiens 1. poſt alias duas figuras 62. ſcribendus. Pingo iam

```
3844—300.
  62— 30.
```

3844—300—1.
62— 30—1.
1.

figuram talem. Ad dextram numerorum 3844. & 300. pono figuram 1. proxime inuentam, & infra eam eius quadratum 1. & sub hoc eiusdem cubum. 1. Nam si tam tres superiores numeri 3844. 300. & 1. quam inferiores tres 62. 30. & 1. inter se multiplicentur, & productis 1153200. & 1860. addatur cubus 1. fiet numerus 1155061. quem si ex meo puncto 1155190. demam, remanent 129. Est ergo absoluta extractio, radixque inuenta est 621. quæ in se cubice multiplicata procreat numerum 239483061. cui si adijciatur residuum 129. co[illegible]abitur numerus propositus 239483190.

EXTRACTIO RADICIS Surdesolidæ.

Surdesolidę radicis extractio. radix 63.

SIT numerus 10395896 21. cuius radix surdesolida quæritur.

PRIMVM à puncto 10395. subtraho maximum surdesolidum 7776. in eo inclusum, cuius radicem 6. scribo in margine pro Quotiente: & quia numerus relinquitur 2619. ideo punctum sequens erit 261989621.

DEINDE paro diuisorem hoc modo. Supra radicem inuentam 6. scribo eius quadratum 36. & supra hunc eiusdem cubum 216. & supra hunc eiusdem Zensizensum, vel quadrati quadratum 1296: ita vt constituatur progressio Geometrica ascendens à radice 6. denominata tot terminorum, quot numeri peculiares requiruntur in extractione surdesolida, Et ad dextram colloco quatuor numeros peculiares requisitos, vt exemplum monstrat.

1296	50000
216	10000
36	1000
6	50

Multiplico duos superiores numeros (quod satis est) 1296. & 50000. inter se. Productus namque numerus 64800000. erit diuisor, per quem si diuidatur punctum relictum 261989621. posset esse Quotiens vel 4. vel 3. vel 2. Accipio autem 3. quia figura 2. est nimis parua, & 4. nimis magna, vt ex sequentibus patebit; quem Quotientem 3. in margine scribo post inuentam figuram 6. Pingo ergo talem figuram. Ad dextram numerorum 1296. & 50000. pono figuram Quotientis acceptam 3. & infra eam eius quadratum 9. & sub hoc eiusdem cubum 27. & sub hoc eiusdem Zensizensum, vel quadrati quadratum 81. & sub hoc eiusdem surdesolidum 243. ita vt ad dextram constituatur progressio Geometrica descendens denominata à figura Quotientis 3. inuenta tot terminorum vno amplius, quot numeri peculiares requiruntur: adeo vt vltimus terminus sit numerus surdesolidus figuræ inuentæ, quemadmodum in cubica extractione fuit cubus, & in quadrata quadratus.

1296	50000	3.
216	10000	9.
36	1000	27.
6	50	81.
		243

Nam si terni numeri transuersales inter se multiplicentur, & ad productos 194400000. 19440000. 972000. 24300. adijciatur surdesolidus 243. efficietur numerus 214836543. qui ex puncto 261989621. detractus relinquit 47153078. Est ergo

ergo radix ſurdeſolida inuenta 63. quæ in ſe ſurdeſolidè multiplicata, ſi nimirum quinquies ponatur hoc modo, 63.63. 63.63.63. producit numerum 992436543, cui ſi addatur reſiduum 47153078. conflabitur propoſitus numerus 1039589621.

QVOD ſi ſupereſſet aliud punctum, conſtituenda eſſet progreſſio aſcendens denominata à tota radice hactenus inuenta 63. quatuor terminorum, vt hic vides. Nam productus 78764805. ex ſuperioribus duobus numeris inter ſe multiplicatis eſſet nouus diuiſor. Deinde ex noua figura inuenta eſſet conſtituenda progreſſio deſcendens vſque ad ſurdeſolidum illius figuræ, quemadmodum ſupra cum figura 3. factum eſt.

15752961—	50000
250047—	10000
3969—	1000
63—	50

ATQVE in hunc modum radicem cuiuſcunque ſpeciei extrahes, ſi diligenter inquires numeros propoſitæ radici inſeruientes, vt ſupra docuimus. Quæ ſane ratio mihi ſemper præclara eſt viſa. Nam etiam ſi operatio videatur aliquanto longior eſſe, quam par ſit, difficilis tamen non eſt, quippe cum ignorari in ea non poſſit, quid faciendum ſit: cum tamen in extractionibus ab alijs Arithmeticis traditis (quadrata excepta) tanta ſit operationis difficultas, vt infinita fere memoria opus ſit ad retinendum ea, quæ ad extrahẽdas radices adhibenda ſunt, vt in radice cubica extrahenda per aliorum regulam ſi adhibeatur, patebit: cum tamen cubica extractio ſit longe facilior extractione ſurdeſolida, & alijs inſequentibus, quæ fere inextricabiles ſunt.

SOLA vna difficultas tam in noſtra, quam in aliorum extractione exiſtit, quod nimirum dubium interdum ſit, num figuram nimis paruam in Quotiente alicuius puncti acceperimus. Vt in ſecundo puncto extractionis ſurdeſolidæ potuit eſſe Quotiens vel 4. vel 3. vel 2. Nos autem accepimus 3. Si ergo certi eſſe velimus, an accipi potuiſſet figura 4. quandoquidem ſuperfuit numerus 47153078. valde magnus, faciendum periculum erit cum figura 4. conſtituendo ſcilicet progreſſionem deſcendentem Geometricam à 4. denominatam. Et quia quatuor numeri producti tranſuerſales cum ſurdeſolido 1024. faciunt numerum 297141824. qui ex puncto ſecundo 261989621. ſubtrahi nequit; argumento eſt, figuram 4. nimis magnam eſſe, ac proinde figuram 2. nimis paruam; quandoquidem cum figura 3. tales numeri procreati ſunt, qui ex propoſito puncto potuerunt ſubtrahi. Hoc ergo remedium ſi adhibeatur, quamuis longiuſculum, tutiſſima erit noſtra ratio extrahendarum radicum.

Difficultas in extractionibus quopacto ſuperetur.

1296—	50000—	4
216—	10000—	16
36—	1000—	64
6—	50—	256
		1024

IAM vero cur in ſuperiori tabella quadratorum, cuborum, ſurdeſolidorum, &c. omiſerim Zenſizenſos, ſiue quadrati quadratos, atque adeo radicis Zenſizenſicæ extractionem prætererim; ratio eſt, quod radices Zenſizenſica, Zenſicubica, Zenſizenzenſica, cubicubica, Zenſurdeſolida, &c. quamuis erui poſſint, ſicut aliæ, habent tamen aliam etiam extractionis regulam, quam vel ex ipſis nominibus colligere licet. Videlicet.

Cur exẽplũ nõ ponatur de radice zẽſizenſica, &c.

EXTRACTVRVS radicem Zenſizenſicam, ſiue quadrati quadratam, ex-

trahe primo radicem quadratam: Deinde ex hac radice erue iterum quadratam radicem. Hæc enim erit radix Zensizensica, quæ quæritur.

EXTRACTVRVS vero radicem Zensicubicam, id est, quadrati cubicam, vel cubi quadratam, extrahe primo radicem quadratam, & ex hac deinde radicem cubicam. Vel primo erue radicem cubicam, & ex hac quadratam. Vltima enim radix eruta erit ea, quam quæris. Idem iudicium habeto de alijs radicibus numerorum compositorum, vt de radice Zensizenzensica cubicubica, Zensurdesolida, &c.

REGVLA PROPRIA EXTRACTIONIS radicis cubicæ.

QVONIAM frequentior vsus est radicis quadratæ, & cubicæ apud Mathematicos quam aliarum radicum, lubet in studiosorum gratiam præscribere hoc loco regulam propriam ad cubicam radicem extrahendam: quemadmodum idem de quadrata radice fecimus in nostra Arithmetica practica. Relictis autem aliorum regulis, quod minus faciles, minusque expeditæ sint, excerpam vnam quasi nouam ex superiori extractione radicis cubicæ, quæ sic se habet.

SIT eruenda radix cubica ex numero 1860867.

Regula propria radicis cubicæ. radix 123.

Ex primo pũcto 1. ad sinistrã subtraho cubũ 1. maximũ in eo contentum, nihilq. remanet. Erit ergo sequẽs punctũ 860. & pro radice inuẽta est figura 1.

PARO diuisorem, multiplicando quadratum figuræ inuentæ, nimirum 1. per 300. qui erit 300. per quem si diuidam punctum 860. inuenio Quotientem 2. pro secunda figura radicis. Hanc duco in diuisorem inuentum 300. facioque 600. Deinde duco quadratum nouæ figuæ 2. inuentę, nimirum 4, in productum ex priori figura 1. multiplicata per 30. hoc est, in 30. facioque 120. Postremo ad summam duorum horum productorum 600. & 120. id est, ad 720. adijcio cubum inuentę nouæ figuræ 2. nimirum 8. totamque summam 728. ex meo puncto 860. subtraho. Et quia remanent 132. erit vltimum punctum 132867. Scribo ergo inuentam figuram 2. post priorem 1.

DEINDE paro eodem modo diuisorem nouum pro vltimo puncto. Nimirum quadratum totius radicis 12. hactenus inuentæ, id est, 144. duco iterum in 300. Productus enim numerus 43200. erit diuisor, per quem si diuidam meum punctum 132867. reperio Quotientem 3. scribendum post radicem 12. hactenus inuentam. Hanc figuram inuentam 3. similiter duco in diuisorem inuentum 43200. facioque 129600. Deinde quadratum eiusdem nouæ figuræ 3. nimirum 9. duco in productum ex radice 12. prius inuenta, multiplicata per 30. hoc est, in 360. efficioque 3240. Postremo ad summam horum duorum productorum 129600. & 3240. hoc est, ad 132840. adijcio cubum 27. ex eadem noua figura genitum, fitque numerus 132867. qui ex puncto 123867. detractus nihil relinquit. Atque ita inuenta est radix 123. numeri propositi 1860867.

QVOD si superesset aliud punctum, ducendus esset quadratus totius radicis 123. hactenus inuentæ in 300. vt nouus diuisor exurgeret, &c. Vides ergo in hac regula plus memoriæ requiri, quam in superiori, quamuis facilior sit, quam aliorum regulæ. Memor tamen esto, quando dubitas, an

nimis

nimis paruam figuram in Quotiente acceperis, vt facias periculum de maiori figura, vt supra dictum est.

PROBL. 15. PROPOS. 20.

IN numeris non quadratis, non cubis, non Zensizensicis, non surdesolidis, &c. radicem veræ propinquam inuenire.

QVANDO numerus propositus non est quadratus, aut cubus, aut Zensizensus, aut surdesolidus, &c. non potest habere veram radicem, sed per regulas superiores inuenitur radix maximi quadrati, vel cubi, vel Zensizensi vel surdesolidi in dato numero contenti. Vt igitur sciamus, quænam fractio ad inuentam radicem addenda sit, vt habeatur radix propinquior veræ, agendum erit hoc modo.

NVMERO proposito apponantur aliquot binarij cifrarum, si quadrata radix propinqua inquiritur: vel si cubica, aliquot cifrarum ternarij; vel aliquot quaternarij, si radix Zensizensica desideratur, vel aliquot quinarij cifrarum, si de surdesolida radice agitur, &c. Respondet autem in qualibet specie radicis numerus cifrarum aliquoties repetendus numero, qui in progressione ad initium præcedentis problematis posita scribitur supra numerum, à quo radix nomen sumit. Vt quia supra quadratum ponitur 2. ideo pro quadrata radice apponuntur binæ cifræ aliquoties, at pro cubica ternæ, quod supra cubum scriptus sit numerus 3. &c. ita vt pro radice cubicubica propinqua apponendi sint aliquot nouenarij cifrarum, quippe cum supra cubicubum numerus 9. reperiatur descriptus. Idem numerus cifrarum aliquoties repetendus respondet quoque signationibus punctorum quæ faciendæ sunt, vt radix extrahatur. Vt quia in quadrata radice extrahenda signatur secunda quæuis figura, propterea aliquot cifrarum binarij ascribendi sunt; in cubica vero radice aliquot ternarij cifrarum adiungendi sunt, quia in ea extrahenda tertia quæque figura signatur, &c.

Quot binarii cifrarum vel ternarii vel quaternarii, &c ad propinquã radicẽ eruẽdam apponẽdi sint.

QVO autem plures binarij, vel ternarij, cifrarum, &c. numero proposito apponentur, eo propinquior radix eruetur.

APPOSITIS hoc modo cifris ad numerum, ex quo radix eruenda est, extrahenda est ex toto illo numero radix, vt supra traditũ est. Deinde ex ea radice abiectis ad dexteram tot figuris, quot cifrarum binarij, vel ternarij, vel quaternarij, &c. appositi fuere reliquæ figuræ radicem integram dabunt, cui addenda est fractio numeratorẽ habens figuras abiectas, denominatorem vero vnitatem, cum totidem cifris, quot binarij cifrarum, vel ternarij, &c. additi fuerunt, nimirum vel 10. si vnus binarius, vel ternarius &c. additus fuit vel 100. si duo binarij: vel ternarij, &c. additi fuerunt: vel 1000. si tres, & sic deinceps: ita vt fractio illa contineat vel decimas, vel centesimas, vel millesimas, &c.

Quę fractio addenda sit radici, vt propiquior radix gignatur.

EXEMPLI causa. Ex numero 29. extrahenda sit radix quadrata. Appositis tribus binarijs cifrarum, hoc modo 29000000. inuenietur huius

nume-

numeri quadrata radix 5385. minor quam vera, quippe cum in extractione aliquid remanserit: addita vero vnitate, fiet radix 5386. maior, quam vera. Abiectis igitur tribus figuris ad dextram, propter tres cifrarum binarios additos, erit propinqua radix $5\frac{385}{1000}$. minor tamen quam vera: at $5\frac{386}{1000}$. maior quam vera. Illius enim quadratus numerus est $28\frac{998225}{1000000}$. minor quam propositus numerus 29. Huius vero numerus quadratus est $29\frac{8996}{1000000}$. maior eodem numero proposito 29.

ITEM ex numero 29160. eruenda sit radix cubica. Apponantur tres ternarij cifrarum, vt rursus habeantur in fractione partes denominatæ à 1000. atque ex toto numero 29160000000000. extrahatur radix cubica, quæ reperietur 30779. minor quam vera, quod in extractione fuerit aliquis numerus residuus: atque adeo maior quam vera, erit 30780. Abiectis tribus figuris ad dextram, propter tres cifrarum ternarios appositos, erit propinqua radix cubica $30\frac{779}{1000}$. minor quam vera, cum eius cubus sit tantum $29158\frac{388419139}{1000000000}$. maior autem propinqua radix, quam vera, erit $30\frac{780}{1000}$. quippe cum eius cubus sit $29161\frac{230552000}{1000000000}$.

DEMONSTRATIO huius inuentionis radicis propinquæ hoc est. Quando pro radice quadrata apponuntur 00. ad numerum propositum, verbi gratia ad 5. multiplicatur propositus numerus per 100. hoc est, per quadratum radicis 10. Et quia quadrati 500. & 5. (Nam datus numerus, & conflatus ex additione 00. sumendi sunt tamquam quadrati, cum eorum radices quærantur) *a* habent proportionem suarum radicum duplicatam: Est autē 500. ad 5. vt 100. ad 1. propterea quod 5. multiplicatus per 100. fecit 500. Centupla vero proportio decuplæ duplicata est, vt in hoc apposito exemplo patet; erit proportio radicis numeri 500. ad radicem numeri 5. decupla. Cum ergo radix 500. sit 22. minor quam vera, erit eius $\frac{1}{10}$. nimirum $2\frac{2}{10}$. radix numeri 5. minor quam vera: ac proinde $2\frac{3}{10}$. erit maior quam vera. Recte ergo præcepimus, quando apponuntur 00. abijciendam esse ex radice 22. vnam figuram, vt relinquatur radix $2\frac{2}{10}$.

a 11. octaui

1.	10.	100.
	5:	500.

QVANDO autem apponuntur 0000. multiplicatur numerus propositus, verbi gratia numerus 5. per 10000. id est, per quadratum radicis 100. Et quia quadrati 50000. 5. *b* habent duplicatam proportionem suarum radicum: Est autem 50000. ad 5. vt 10000. ad 1. propterea quod 5. multiplicatus per 10000. fecit 50000. Proportio autem 10000. ad 1. duplicata est proportionis 100. ad 1. vt in hoc exemplo patet; erit proportio radicis numeri 50000. nimirum 223. ad radicem numeri 5. vt 100. ad 1. Quare si radix 223. diuidatur per 100. procreabitur radix quadrata propinqua $2\frac{23}{100}$. minor quam vera, at $2\frac{24}{100}$. erit maior quam vera. Recte ergo præcepimus, cum apponuntur 0000. abiciendas esse ex radice 223. duas figuras, vt reliqua fiat radix $2\frac{23}{100}$.

b 11. octaui

1.	100.	10000.
	5.	50000.

PARI ratione si apponantur 000000. procreabitur radix propinqua in millesimis, atque ita deinceps.

RVR-

RVRSVS quando pro radice cubica ad numerũ propositum, vt ad 5. adduntur 000. multiplicatur datus numerus per 1000. id est, per cubum radicis 10. Et quia cubi 5000. 5. *a* habent proportionem suarum radicum triplicatam: Est autem 5000. ad 5. vt 1000. ad 1. quod 1000. multiplicans 5. fecit 5000. Proportio autem 1000. ad 1. triplicata est proportionis 10. ad 1. vt in hoc apposito exemplo apparet; erit proportio radicis numeri 5000. nimirum 17. ad radicem numeri 5. vt 10. ad 1. Quocirca si radix 17. diuidatur per 10. fit radix cubica propinqua $1\frac{7}{10}$. minor quam vera, at $1\frac{8}{10}$. erit maior quam vera. Recte ergo præcepimus, quando pro radice cubica apponuntur 000. abijciendam esse ex radice inuenta 17. vnam figuram, vt reliqua fiat radix $1\frac{7}{10}$. a 12. octaui

1. 10. 100. 1000.
5. 5000.

SIMILI modo si apponantur 000000. inuenietur propinqua radix in centesimis: Et si apponantur 000000000. in millesimis, &c. Nam ibi multiplicatur numerus per 1000000. id est, per cubum radicis 100. hic vero per 1000000000. nimirum per cubum radicis 1000. Coetera eodem modo demonstrabuntur.

NEQVE vero diuersa ratio est in alijs radicibus. Nam in surdesolida verbi gratia, quando adduntur 00000. fit multiplicatio per 100000. id est, per surdesolidum radicis 10. Et proportio 100000. ad 1. est quintuplicata proportionis 10. ad 1. vt in apposito exemplo apparet, &c.

1. 10. 100. 1000. 10000. 100000

PROBL. 16. PROPOS. 21.

RADICEM cuiusque generis ex data minutia extrahere.

IN minutijs extrahenda est radix eiusdem appellationis cum radice, quæ quæritur, tum ex numeratore, tum ex denominatore. Ita enim fiet fractio, quæ radix est propositæ minutiæ. Vt radix quadrata minutiæ $\frac{4}{9}$. est $\frac{2}{3}$. Et radix cubica minutiæ $\frac{8}{27}$. est similiter $\frac{2}{3}$. Et radix Zensizensica minutiæ $\frac{16}{81}$. est quoque $\frac{2}{3}$. Et radix surdesolida minutiæ $\frac{32}{243}$. est pari ratione $\frac{2}{3}$. & sic de alijs. extractio radicũ ex minutijs.

QVOD si data minutia fuerit fractio, vel minutia alterius minutiæ, reducenda prius erit ad minutiam simplicem. Vt si quærenda sit radix quadrata ex hac minutia minutiæ $\frac{2}{4}$. $\frac{8}{9}$, reducenda erit ad hanc simplicem minutiam $\frac{16}{36}$. cuius radix quadrata est $\frac{4}{6}$. vel $\frac{2}{3}$. &c.

SIMILITER si fractio adhæreat integris, erunt intergra prius reducenda ad fractionem eiusdem denominationis. Vt si quærenda sit radix cubica numeri $2\frac{10}{27}$. reducendus erit ad hanc fractionem $\frac{64}{27}$. cuius radix cubica est $\frac{4}{3}$ hoc est, $1\frac{1}{3}$. &c.

SI vel numerator, vel denominator minutiæ, vel vterque numerus careat radice eius appellationis, quæ desideratur, non habebit illa minutia

ra-

radicem, quæ quæritur. Vt neque $\frac{4}{7}$. neque $\frac{6}{9}$. neque $\frac{5}{12}$. habent radicem quadratam præcise, propterea quod denominator in priori, numerator vero in secunda, & vterque numerus in tertia quadratam radicem non habet.

COGNOSCES autem, an data fractio habeat radicem quæsitam, nec ne, si eam, ad minimos terminos reduces. Si namque ita reducta habuerit radicem, dicetur quoque data minutia eandem radicem habere: Si vero reducta ad minimos terminos radicem non habuerit, neque proposita minutia radicem habebit. Vt si proponatur minutia $\frac{20}{45}$. volo scire, an habeat radicem quadratam: Ea redacta ad minimos terminos est $\frac{4}{9}$. quæ radicem quadratam habet $\frac{2}{3}$. Hãc ergo eandem radicem quadratam dicetur habere minutia proposita $\frac{20}{45}$. At vero minutia $\frac{6}{9}$. non habebit radicem quadratam: quia neque $\frac{2}{3}$. in minimis terminis, ad quam reducitur, eam habet. Pari ratione minutia $\frac{24}{81}$. habebit radicem cubicam $\frac{2}{3}$. eandem nimirum, quam habet minutia $\frac{8}{27}$. in minimis terminis, ad quam illa reducitur. Minutia autem $\frac{12}{20}$. radice cubica carebit, quod minutia $\frac{3}{5}$. ad quam in minimis terminis reuocatur, eadem careat. Et sic de alijs.

QVANDO ergo minutia ad minimos reuocata terminos radicem quæsitam non habuerit, exquirenda erit radix propinqua tam numeratoris, quam denominatoris, apponendo videlicet vtrique prius numero aliquot cifrarum binarios, vel ternarios, quaternariosue, &c. prout quadrata radix, aut cubica, aut Zensizensica, &c. inquiritur. Si namque radix propinqua numeratoris per propinquam denominatoris radicem diuidatur, prodibit radix propinqua, quam quærimus. Verbi gratia, si proponatur minutia $\frac{6}{7}$. cuius radix quadrata inquirenda sit, appositis tribus binarijs cifrarum reperietur numeratoris radix propinqua $2\frac{449}{1000}$. denominatoris vero $2\frac{645}{1000}$. Si igitur illa per hanc diuidatur, proueniet radix quæsita $\frac{2449}{2645}$. satis propinqua. Idem iudicium de alijs radicibus habeatur, si memineris tamen, in cubica tam numeratori, quam denominatori apponendos esse aliquot ternarios cifrarum, vt propinquæ eorum radices eruantur: In Zensizensica vero aliquot quaternarios, & in surdesolida aliquot quinarios, &c.

QVIA vero molestum est inquirere duas radices propinquas, vnam pro numeratore propositæ fractionis, & pro denominatore alteram, traduntur à Cardano, & Tartalea pro radice quadrata, & cubica, quæ nimirum magis in vsu sunt, peculiares quædam regulæ, quas hic explicare lubet: quippe cum in eis tantummodo radicis propinquæ inuentione opus sit.

Alia extractio radicis quadratę & cubicæ ex data minutia.

PRO quadrata igitur radice, duc numeratorem in denominatorem, & producti numeri radicẽ quadratã propinquã diuide per denominatorem: Vel numeratorem per radicem illam propinquam partire. Vtroque enim modo radix propinqua fractionis propositæ gignetur. Et si quidem propinqua illa radix numeri producti ex numeratore in denominatorem fuerit minor quam vera, reperietur priori modo radix fractionis propinqua minor quoque quam vera; propterea quod numerus vero minor diuiditur: posteriori vero modo inuenietur radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc diuisio fiat per numerum vero minorem. Contrarium eueniet, si radix illa propinqua numeri ex numeratore in denominatorem producti fuerit maior quam vera. Nam priori modo gignetur radix

dix fractionis propinqua maior, quam vera, posteriori vero modo minor, quam vera, vt perspicuum est. Hanc regulam proposui quoque lib. 4. cap. 2. Num. 5. ibique eandem demonstraui. Exemplum huius etiam regulæ ibi demhabes.

PRO radice vero cubica: duc numeratorem in quadratum denominatoris, & producti numeri radicem cubicam propinquam diuide per denominatorem: Vel duc denominatorem in quadratum numeratoris, & per numeri producti radicem cubicam propinquam partire numeratorem. Vtroque enim modo propinqua radix propositæ minutiæ prouenict. Et priori quidem modo, si illa radix cubica propinqua fuerit minor quam vera, reperietur radix propinqua fractionis minor quoque quam vera, propterea quod diuisio fit numeri vero minoris per denominatorem fractionis: Si autem radix illa propinqua fuerit maior quam vera, gignetur quoque radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc numerus vero maior per denominatorem fractionis diuidatur. Posteriori vero modo, si radix illa cubica propinquior fuerit minor quam vera, producetur radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc diuisio fiat per numerum vero minorem: At si illa radix cubica propinqua fuerit maior quam vera, erit inuenta radix fractionis propinqua minor quam vera, quandoquidem tunc diuiditur numerator per numerum vero maiorem. Exemplum in fractione $\frac{8}{27}$. habente veram radicem cubicã $\frac{2}{3}$. Ducto numeratore 8. in 729. quadratum denominatoris 27. fit numerus 5832. cuius radix cubica est 18. Hæc diuisa per denominatorem 27. facit $\frac{18}{27}$. id est, $\frac{2}{3}$. pro radice cubica fractionis $\frac{8}{27}$. Item ducto denominatore 27. in 64. quadratum numeratoris 8. gignitur numerus 1728. cuius radix cubica est 12. per quam si diuidatur numerator 8, fit Quotiens $\frac{8}{12}$. hoc est, $\frac{2}{3}$. vt prius, pro radice cubica fractionis $\frac{8}{27}$. propositæ. Alterum exemplum in fractione $\frac{5}{7}$. non habente veram radicem cubicam. Ducto numeratore 5. in 49. quadrarum denominatoris 7. fit numerus 245. cuius radix cubica propinqua $6\frac{25}{100}$. (inuenta per appositionem duorum ternariorum cifrarum) diuisa per denominatorem 7. facit Quotientem $\frac{625}{700}$. hoc est, $\frac{25}{28}$. pro radice fractionis $\frac{5}{7}$. Item ducto denominatore 7. in 25. quadratum numeratoris 5. fit numerus 175. per cuius radicem cubicam $5\frac{59}{100}$. propinquam inuentam per appositionem 000000. ad 175. si partiamur numeratorem 5. inueniemus Quotientem $\frac{500}{559}$. pro radice cubica propinqua datæ fractionis $\frac{5}{7}$. atque ita de alijs. Porro hoc modo reperitur radix fractionis propinquior, quam per superiorem regulam: quia hic solum vnus error irrepit propter radicem cubicam propinquam, quæ vera non est, manente tam denominatore in priori modo, quam numeratore in posteriori, in propria sua quantitate; at in superiori regula duo interueniunt errores, propter duas radices cubicas propinquas, quæ veræ non sunt.

DEMONSTRO vtrumque hunc modum hac ratione. Quando numerator in quadratum denominatoris ducitur, erit producti numeri radix cubica vnus duorum mediorum proportionalium inter numeratorem ac denominatorem collocandus iuxta denominatorem, vt constat ex ijs, quæ propos. 18. huius lib. demonstrata sunt. *a* Erit igitur proportio numeratoris ad denominatorem triplicata proportionis radicis cubicæ inuen- *a* 10. *defini. quinti.*

a 12. octaui — tæ ad denominatorem: a Est autem eadem proportio numeratoris ad denominatorem, tamquam cubi ad cubum, triplicata quoque proportionis radicis cubicæ numeratoris ad radicem cubicam denominatoris. Igitur erit radix cubica inuenta ad denominatorem, vt radix cubica numeratoris ad radicem cubicam denominatoris: b ac proinde minutia, cuius numerator radix cubica inuenta, ac denominator ipse denominator, æqualis erit minutiæ, cuius numerator radix cubica numeratoris, ac denominator radix cubica denominatoris. Quam ob rem sicut hæc minutia est radix cubica fractionis propositæ, ita quoque illa erit radix cubica eiusdem fractionis. Diuisa ergo radice illa cubica inuenta per denominatorem fractionis propositæ (quæ diuisio fit, quia illa radix cubica inuenta est fractio, ac proinde, vt cognoscatur valor minutiæ, cuius numerator radix illa inuenta, ac denominator ipsemet denominator fractionis propositæ, diuidendus est numerator huius minutiæ per eius denominatorẽ: alioquin, si illa radix cubica inuenta foret numerus integer, diuisio facienda non esset) producetur radix cubica fractionis propositæ: quemadmodum ex diuisione radicis cubicæ numeratoris per radicem cubicam denominatoris procreatur radix cubica fractionis propositæ: quippe cum minutia nil aliud sit, nisi numerator per denominatorem diuisus.

b 7. minutiarum ad finem lib. 9.

QVANDO vero denominator in quadratum numeratoris ducitur, erit numeri producti radix cubica vnus duorum mediorum proportionalium inter numeratorem, ac denominatorem, collocandus iuxta numeratorem, vt ex demonstratis propos. 18. huius lib. manifestum est. Ergo rursus erit proportio numeratoris ad denominatorem triplicata proportionis numeratoris ad illam radicem cubicam inuentam, quemadmodum & proportionis radicis cubicæ numeratoris ad radicem cubicam denominatoris, eadem illa proportio numeratoris ad denominatorem, tamquam cubi ad cubum, triplicata est: Ac propterea, vt supra, minutia, cuius numerator ipsemet numerator fractionis propositæ, denominator vero radix illa cubica inuenta, æqualis erit minutiæ, cuius numerator, radix cubica numeratoris fractionis propositæ, & denominator radix cubica denominatoris eiusdem fractionis. Quocirca diuiso numeratore per illam inuentam radicem cubicam, prodibit radix cubica frctionis propositæ.

PROBL. 17. PROPOS. 22.

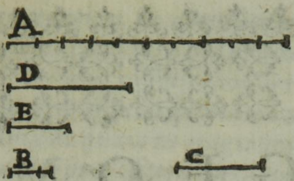
RADICEM quadratam & cubicam in numeris non quadratis, & non cubicis per lineas Geometrice inuenire.

SIT datus numerus 10. representans quadratum 10. palmorum, vel pedum, vel aliarum mensurarum. Capiatur linea A, palmorum, vel pedum 10. &c. & linea B, palmi, vel pedis 1. c Inuenta C, media proportionali inter A, & B. Dico C, esse radicem quadratam, siue latus quadratum, numeri A, 10.

c 13. sexti.

Quo-

a Quoniam enim quadratum rectæ C, æquale est rectangulo sub A, & B, comprehenso: Est autem hoc rectangulum 10. quod vnitas B, numerum A, 10. multiplicans procreet 10. perspicuum est, rectam C, esse latus quadratum 10. palmorum vel pedum, &c. quod est propositum. *a 17. sexti.*



RVRSVS *b* inuentis inter A, & B, duabus medijs proportionalibus D, & E, Dico E, quæ minori B, propinquior est, latus esse cubicum, siue radicem cubicam, numeri 10. *c* Quoniam enim cubus rectæ E, æqualis est parallelepipedo sub quadrato rectæ B, & sub A, recta comprehenso: Est autem hoc parallelepipedum 10. quod vnitas B, se multiplicans faciat quadratum 1. & quadratum 1. multiplicans numerum A, 10. gignat 10. liquido constat, rectam E, esse latus cubicum 10. palmorum, vel pedum, &c. quod est propositum. *b 15. huius.* *c lemma 18. huius.*

FINIS LIBRI SEXTI.



GEOMETRIAE PRACTICAE LIBER SEPTIMVS.



De figuris Isoperimetris disputans: cui Appendicis loco annectitur breuis de circulo per lineas quadrando tractatiuncula.



OBILIS ac præstans de Isoperimetris figuris semper apud omnes habita est disputatio, in qua videlicet inquiritur, vtra duarum sit altera maior, & capacior, & quæ sit omnium maxima, & capacissima. Non pauci enim rerum Geometricarum ignari hac in re hallucinati sunt, putantes figuras Isoperimetras, quæ nimirum æquales ambitus continent, esse inter se æquales, siue æquè capaces. Immo e contrario. quod mirum est, nonnulli, qui se Geometras appellant, adduci vix possunt, vt credant, dari posse duas figuras Isoperimetras inter se omnino æquales, quod tamen fieri posse, clarissime propos. 20. 21. 22. huius damonstrabimus. Quamuis autem de Isoperimetris figuris tractionem bene longam, & copiosam in commentarijs nostris in sphæram instituerimus, exemplum in hoc secuti

Theo-

Theonis Alexandrini, qui idem argumentum in commentarijs in Almagestum Ptolemei persecutus est: tamen quia id in alieno fortassis loco factum esse suspicari quis posset; transferemus eam tractationem ex nostris commentarijs in sphæram in hanc nostram Geometriam practicam, tamquam in magis proprium locũ, additis tribus, aut quatuor propositionibus, quæ in illa tractatione desiderantur, & tamen maxime ad hanc materiam spectare videntur.

DEFINITIONES.

Definitiones ad tractationem Isoperimetrarũ figurarum ꝑtinentes.

I.

ISOPERIMETRAE figuræ sunt, quæ æquales ambitus continent.

II.

REGVLARIS figura dicitur ea, quæ & æquilatera, & æquiangula est.

III.

CENTRVM figuræ regularis dicitur punctum illud, quod centrum est circuli figuræ inscripti, vel circumscripti.

IIII.

AREA cuiuslibet figuræ dicitur capacitas, spatium siue superficies intra latera ipsius comprehensa.

V.

OMNE solidum rectangulum (cuius nimirum bases æquidistantes sunt, & æquales, lateraque ad bases recta, quale est Parallelepipedum) contineri dicitur

tur ſub altera baſium, ac perpendiculari ab illa baſi ad alteram protracta.

QVIA nimirum alterutra baſium indicat longitudinem ac latitudinem figurę, perpendicularis vero altitudinem, ſiue profunditatem eiuſdem demonſtrat.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Triãgulum quodcũque cui rectangulo æquale ſit.

AREA cuiuslibet trianguli æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub perpendiculari à vertice ad baſim protracta, & dimidia parte baſis. Item rectangulo comprehenſo ſub ſemiſſe perpendicularis, & tota baſe. Vel denique ſemiſſi rectanguli ſub tota perpendiculari, & tota baſe comprehenſi.

SIT triangulum ABC, ex cuius vertice A, ad baſim B C, ducatur perpendicularis AD, diuidatque primo baſim B C, bifariam, vt in prima figura. Per A, ducatur E A F, in vtramque partem æquidiſtans rectæ B C, compleaturque rectangulum BEFC, *a* quod erit duplum trianguli ABC; *b* Item duplum rectanguli ADBE. Quare rectangulum A D B E, quod nimirum continetur ſub perpendiculari AD, & dimidio baſis B D, æquale eſt triangulo A B C. Diuidat ſecundo perpendicularis AD, baſim BC, non bifariam, vel etiam cadat in baſim CB, protractam, vt in 2. & 3. figura; Et per A, ducatur rurſus AF, in vtramque partem æquidiſtans rectæ BC, compleaturque rectangulum A D C F. Diuiſa deinde baſe BC, bifariam in G, ducantur rectæ B E, G H, ipſi AD, æquidiſtantes, *c* eritque GH, æqualis perpendiculari A D. *d* Quoniam igitur rectangulum BCFE, duplum eſt trianguli ABC; *e* Item duplum rectanguli BEHG: erit rectangulum BEHG, quod continetur ſub perpendiculari GH, vel AD, & dimidio baſis BG, æquale triangulo ABC.

a 41. *primi.*
b 36. *primi.*
c 34. *primi.*
d 41. *primi.*
e 36. *primi.*

SECETVR ià perpendicularis AD, vel GH, bifariam in I, agaturq; per I, ipſi B C, parallela K L. Dico triangulum idem A B C, æquale quoque eſſe rectangulo BCLK, in 1. & 2. figura, Item rectangulo BCLM, in 3. figura, comprehenſo nimirum ſub ID, vel IG, ſemiſſe perpendicularis AD, vel HG. *f* Quoniam enim triangulum ABC, dimidium eſt rectanguli E C, eiuſdemque dimidium etiam eſt rectangulum BL; *g* quod rectangula BL, LE, ſuper æquales baſes æqualia ſint: æqualia inter ſe erunt triangulum A B C, & rectangulum B L. *h* Et quia rectangulum B F, contentum ſub perpendiculari AD, vel BE, & baſe trianguli BC, duplum eſt trianguli A B C; erit triangulum

f 41. *primi.*
g 36. *primi.*
h 41. *primi.*

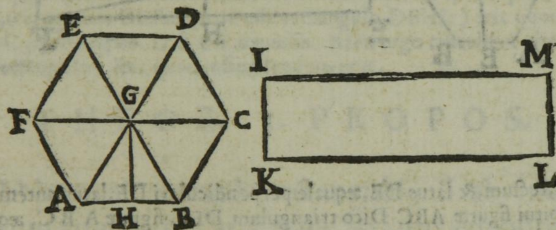
ſum ſemiſſi illius rectanguli æquale. Area igitur cuiuslibet trianguli æqualis eſt,&c. quod erat oſtendendum.

THEOR. ~~PROBLEMA~~ 2. PROPOSITIO 2.

AREA cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt rectangulo contento ſub perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ducta, & ſub dimidiato ambitu eiuſdem figuræ.

Regularis figura quæcunque cui rectangulo æqualis ſit.

SIT figura regularis quæcunque ABCDEF, & centrum eius punctum G, à quo ducatur G H, perpendicularis ad vnum latus, nempe ad A B: Sit quoque rectangulum IKLM, contentum ſub I K, quæ æqualis ſit perpendiculari GH,& ſub KL, recta, quæ æqualis ponatur dimidiæ parti ambitus figuræ AB C D E F. Dico huic rectangulo æqualem eſſe figuram regularem



ABCDEF. Ducantur enim ex G,ad ſingulos angulos lineæ rectæ, vt tota figura in triangula reſoluatur,quæ omnia æqualia inter ſe erunt,vt in corollario propoſ.8. lib. 1.Eucl. demonſtratum eſt à nobis: propterea quòd omnia latera triangulorum à puncto G,exeuntia ſint inter ſe æqualia, habeantque baſes æquales,nēpe latera figuræ regularis. *a* Hinc enim efficitur,omnes angulos ad G,æquales eſſe,ac proinde, ex dicto corollario,triangula ipſa inter ſe quoque eſſe æqualia. *b* Quoniam igitur rectangulum contentum ſub GH, perpendiculari,& medietate baſis AB,æquale eſt triangulo ABG,ſi ſumātur tot huiuſmodi rectangula, in quot triangula diuiſa eſt figura regularis,erunt omnia ſimul figuræ A B C D E F,æqualia; propterea quod omnia triangula oſtenſa ſint æqualia triangulo A B G. *c* Cum igitur eadem ſimul æqualia ſint rectangulo IKLM; propterea quòd KL, æqualis ponitur dimidio ambitus AB C D E F, hoc eſt,omnibus medietatibus baſium ſimul; & recta I K, perpendiculari G H; erit figura regularis A B C D E F, æqualis rectangulo

a 8 *primi.*

b 1.*huius.*

c 1.*ſecūdi.*

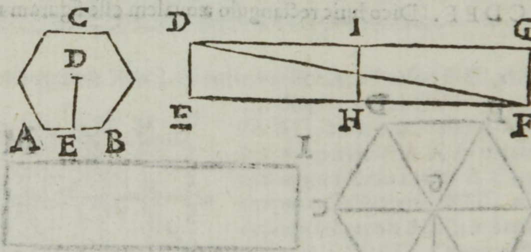
lo IKLM. Area igitur cuiuslibet figuræ regularis æqualis est.&c.quod erat demonstrandum.

THEOREMA 3. PROPOSITIO 3.

Regularis figura quæcunque cui triangulo rectangulo æqualis sit.

AREA cuiuslibet figuræ regularis æqualis est triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum æquale est perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ductæ, alterum vero æquale ambitui eiusdem figuræ.

SIT rursus figura regularis ABC, cuius centrum D, à quo perpendicularis ad latus A B, ducta sit DE; triangulum vero rectangulum DEF, habens



angulum E, rectum, & latus DE, æquale perpendiculari DE, latus autem EF, æquale ambitui figuræ ABC. Dico triangulum DEF, figuræ A B C, æquale esse. Compleatur enim rectangulum DEFG; & diuisa EF, bifariam in puncto H, ducatur H I, æquidistans rectæ D E. *a* Erit igitur rectangulum D E-HI, contentum sub D E, perpendiculari, & sub E H, dimidio ambitus figuræ, æquale figuræ A B C: At rectangulo D E H I, æquale est triangulum DEF. Nam rectangulum DEHI, est dimidium rectanguli DEFG; *b* propterea quod æqualia sunt rectangula DEHI, I H F G; *c* Triangulum quoque DEF, dimidium est eiusdem rectanguli DEFG. Igitur & triangulum DEF, æquale erit figuræ A B C. Area ergo cuiuslibet figuræ regularis æqualis est triangulo rectangulo, &c. quod demonstrandum erat.

a 2.*huius.* b 36.*primi.* c 41.*primi.*

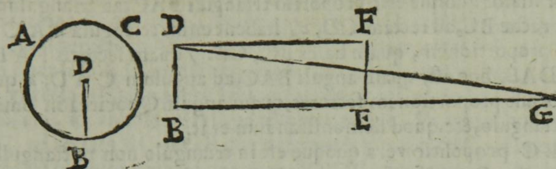
THEOR. 4. PROPOS. 4.

Circulus quicunque cui rectangulo æqualis sit.

AREA cuiuslibet circuli çqualis est rectangulo comprehenso sub semidiametro, & dimidiata circumferentia circuli.

ESTO

ESTO circulus A B C, cuius ſemidiameter D B: Rectangulum autem DBEF, comprehenſum ſub DB, ſemidiametro circuli, & B E, recta, quæ



æqualis ſit dimidiatæ circumferentiæ circuli. Dico aream circuli A B C æqualem eſſe rectangulo DBEF. Producatur enim BE, in continuum, ponaturque EG, æqualis ipſi BE, vt ſit BG, recta æqualis toti circumferentiæ circuli. Coniungantur denique puncta D, G, recta DG. *a* Quoniam igitur circulus ABC, æqualis eſt triangulo DBG: *b* Eſt autem triangulum D B G, rectangulo DBEF, æquale; quod baſis trianguli dupla ſit baſis rectanguli; (Id quod etiam ex demonſtratione antecedentis propoſ. liquet, vbi oſtendimus, triangulum DEF, æquale eſſe rectangulo DEHI:) erit quoque circulus A B C, rectangulo D B E F, æqualis. Area ergo cuiuslibet circuli æqualis eſt rectangulo, &c. quod oſtendendum erat.

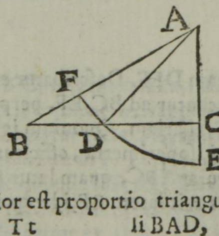
a 1. *de Dimens. circuli Archim.*
b *ſchol.* 41. *primi.*

THEOR. 5. PROPOS. 5.

IN omni triangulo rectangulo, ſi ab vno acutorum angulorum vtcunque ad latus oppoſitum linea recta ducatur, erit maior proportio huius lateris ad eius ſegmentum, quod prope angulum rectum exiſtit, quam anguli acuti prædicti ad eius partem dicto ſegmento lateris oppoſitum.

Proprietas quædã trianguli rectanguli.

SIT triangulum rectangulum ABC, cuius angulus C, ſit rectus; ducaturque ab acuto angulo A, ad latus oppoſitum B C, recta A D, vtcunque; Dico maiorem eſſe proportionem rectæ B C, ad rectam C D, quam anguli B A C, ad angulum C A D. *c* Quoniam enim recta A D, maior quidem eſt, quam A C; minor vero, quam A B; ſi centro A, interuallo autem AD, circulus deſcribatur, ſecabit is rectam AC, protractam infra punctum C, vt in E, at vero rectam AB, ſupra punctum B, vt in F. Et quia maior eſt proportio trianguli BAD,



c 19. *primi.*

li BAD, ad sectorem FAD, quam trianguli DAC, ad sectorem DAE, (propterea quod ibi est proportio maioris inæqualitatis, hic autem minoris inæqualitatis) *a* erit quoque permutando maior proportio trianguli BAD, ad triangulum DAC, quam sectoris FAD, ad sectorem DAE. *b* Componendo igitur maior quoque erit proportio trianguli BAC, ad triangulum DAC, hoc est, rectæ BC, ad rectam CD, *c* (habent enim triangula BAC, DAC, eandem proportionem, quam bases BC, CD.) quam sectoris FAE, ad sectorem DAE, hoc est, quam anguli BAC, ad angulum CAD; *d* quod eandem habeant proportionem sectores, quam anguli. Quocirca in omni triangulo rectangulo, &c. quod demonstrandum erat.

a 27. *quinti*
b 28. *quinti*
c 1. *sexti.*
d *corol.* 33. *sexti.*

HAEC propositio vera quoque est in triangulo non rectangulo, dummodo angulus C, maior sit angulo ADC, vt patet; *e* quod tunc etiam AD, maior sit,, quam AC, minor vero, quam AB, &c.

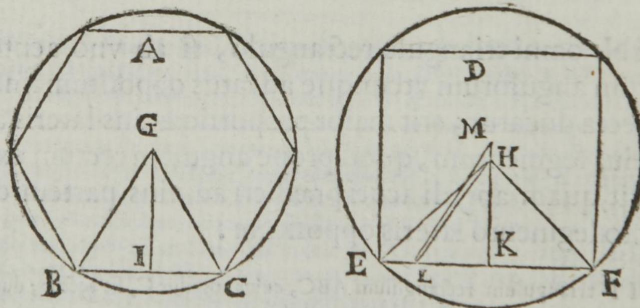
e 19. *primi.*

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Inter figuras Isoperimetras, quæ plures angulos, seu latera continet, illa maior est.

ISOPERIMETRARVM figurarum regularium maior est illa, quæ plures continet angulos, plurave latera.

SINT duæ figuræ regulares isoperimetræ ABC, DEF, habeatque plura latera, siue angulos figura ABC, quam DEF. Dico ABC, maiorem esse,



quam DEF. Describatur enim circa figuras circuli, à quorum centris G, H, ducantur ad BC, EF, perpendiculares GI, HK, *f* quæ diuident rectas BC, EF, bifariam. Quoniam igitur figura ABC, plura habet latera, quam DEF, sibi isoperimetra, efficitur, vt latus BC, sæpius repetitum metiatur ambitum figuræ ABC, quam latus EF, ambitum figuræ DEF. Quare latus BC, minus erit latere EF, ideoque BI, medietas lateris BC, minor, quàm EK, medie-

f 3. *tertij.*

dictas lateris EF. Ponatur KL, æqualis ipsi BI, & ducantur rectæ L H, H E, HF, GB, GC. *a* Et quia omnes arcus circuli DEF, sunt æquales, quòd & rectæ subtensæ æquales ponantur; erit recta EF, ita submultiplex ambitus figuræ DEF, vt arcus EF, submultiplex est circumferentiæ circuli D E F: Eademque ratione ita multiplex ambitus figuræ ABC, rectæ B C, sicut multiplex est circumferentia ABC, arcus BC. *b* Vt autem arcus E F, ad circunferentiam circuli D E F, ita est angulus E H F, ad quatuor rectos, Igitur erit quoque vt recta EF, ad ambitũ figuræ DEF, hoc est, ad ambitũ figuræ ABC, illi æqualem, ita angulus EHF, ad quatuor rectos: Vt autem ambitus figuræ ABC, ad rectam BC, ita est circunferentia circuli ABC, ad arcum B C, *c* hoc est, ita quatuor recti ad angulum BGC. Ex æquo igitur, vt recta E F, ad rectam BC, *d* hoc est, vt recta EK, ad rectã BI, hoc est, ad rectam KL, ita angulus EHF, ad angulũ B G C, *e* hoc est, ita angulus E H K, ad angulum B G I. *f* Est autem maior proportio rectæ E K, ad rectam K L, quam anguli E H K, ad angulum K H L. *g* Quare maior erit proportio quoque anguli E H K, ad angulum B G I, quam eiusdem anguli E H K, ad angulum KHL; *h* ideoque maior erit angulus KHL, quam angulus B G I. Cum igitur anguli HKL, GIB, sint æquales, vtpote recti; *i* erit reliquus angulus HLK, minor reliquo angulo G B I. Fiat igitur angulus K L M, æqualis angulo GBI; cadetque LM, extra L H; conuenietque cum K H, producta vltra H, in puncto M. Quoniam igitur duo anguli B, I, trianguli G B I, æquales sunt duobus angulis L, K, trianguli MLK, & latera B I, L K, æqualia, k erunt rectæ GI, MK, æquales. Recta ergo G I, maior est, quam recta H K. Quamobrem rectangulum sub G I, & dimidio ambitu figuræ A B C, contentum, maius erit rectangulo contento sub H K, & dimidio ambitu figuræ DEC, qui æqualis ponitur dimidio ambitus figuræ A B C, *l* Quocirca cum illud rectangulum ostensum sit æquale figuræ A B C, hoc autem figuræ DEF, æquale; maior quoque erit figura A B C, quàm figura D EF. Isoperimetrarum ergo figurarum regularium maior est illa &c. quod erat ostendendum.

a 28. *tertij.*
b 2. *corol.* 33 *sexti.*
c 2. *corol.* 33 *sexti.*
d 15. *quinti*
e 15. *quinti.*
f 5. *huius.*
g 13. *quinti*
h 10. *quinti*
i 32. *primi.*
k 26. *primi.*
l 2. *huius.*

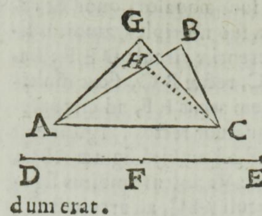
PROBL. 1. PROPOS. 7.

Qua arte triangulum Isosceles cõstituatur Isoperimetrũ cuiuis triangulo nõ Isosceli.

PROPOSITO triangulo, cuius duo latera sint inæqualia, supra reliquum latus triangulum priori Isoperimetrum, ac duo habens latera æqualia, describere.

SIT triangulum ABC, cuius duo latera A B, B C, sint inæqualia, nempe A B, maius, quam B C; oporteatque supra AC, construere triangulum Isosceles, atque isoperimetrum triangulo ABC. Sumatur recta DE, æqualis duobus lateribus AB, BC, simul, diuidaturque bifariam in F. Et quoniam latera AB, BC, simul maiora sunt latere AC, erunt quoque DF, FE, simul, maiores quam linea A C. Atque ob id tres lineæ AC, DF, F E, ita sese habebunt, vt quælibet duæ sint reliqua maiores. *n* Si igitur ex ipsis conficiatur

16. *primi.*
n 22. *primi.*



tur triangulum A G C, effectum erit, quod proponitur. Erunt enim latera A G, G C, & inter se æqualia. & simul sumpta æqualia lateribus A B, B C, simul sumptis: Addito igitur communi A C, erunt triangula A B C, A G C, isoperimetra. Proposito igitur triangulo, cuius duo latera sint inæqualia, supra reliquum latus triangulum, &c. descripsimus. quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

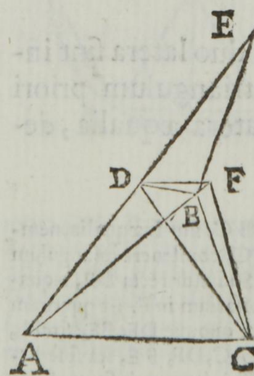
CADET autem necessario punctum G, extra triangulum ABC: Si namque caderet in latus AB, vt ad punctum H, *a* esset ducta recta H C, minor, quam H B, B C, simul, & ob id triangulum A H C, non esset isoperimetrum triangulo A B C, cuius contrarium ex constructione est demonstratum. Multo minus cadet punctum G, intra triangulum A B C. Quare extra cadet, quod est propositum.

a 20. primi

THEOR. 7. PROPOS. 8.

Isosceles triangulum maius est triangulo sibi Isoperimetro non Isoscele.

DVORVM triangulorum isoperimetrorum eandem habentium basim, quorum vnius duo latera sint æqualia, alterius vero inæqualia; maius erit illud, cuius duo latera æqualia sunt.



ESTO triangulum ABC, cuius latus AB, maius sit latere B C, *b* constituaturque super basim AC, triangulo A B C, triangulum Isoperimetrum ADC, habens latera A D, D C, æqualia & inter se, & lateribus AB, B C, simul sumptis. Dico triangulum ADC, maius esse triangulo A B C. Producatur enim AD, ad partes D, sitque DE, æqualis ipsi A D, siue ipsi D C. Ducantur quoque rectæ D B, B E. *c* Quoniam igitur AB, BE, maiores sunt, quã AE, hoc est, quam AD, DC, simul, hoc est, quam AB, BC, simul; ablata communi A B, erit BE, maior quam B C. Et quia latera ED, D B, trianguli E D B, æqualia sunt lateribus C D, D B, trianguli C D B. At vero basis BE, base B C, maior, *d* erit angulus E D B, maior angulo C D B. Quare angulus E D B, maior est, quam dimidium anguli EDC: Est

b 7. huius.

c 20. primi.

d 25. primi.

autem

autẽ angulus DAC, dimidium anguli EDC; *a* propterea quod anguli DAC, DCA, æquales ſunt, *b* & his ſimul ſumptis æqualis quoque externus angulus E D C. Maior igitur erit angulus E D B, angulo D A C. *c* Fiat angulus EDF, æqualis angulo interno DAC; cadetque DF, recta ſupra rectam DB, *d* æquidiſtabitque rectæ AC. Producatur DF, donec cum AB, protracta conueniat in F, ducaturque recta FC. *e* Quoniam igitur triangula ADC, AFC, æqualia ſunt, triangulum autem AFC, maius eſt triangulo ABC; maius quoq; erit triangulum ADC, triangulo ABC. Quam ob rem duorum triangulorũ Iſoperimetrorum eandem habentium baſim, &c. quod demonſtrandum erat.

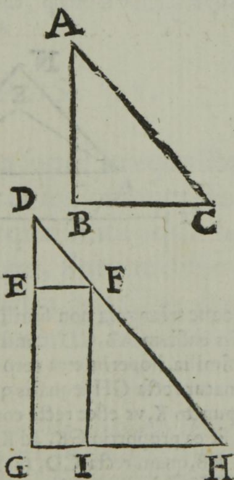
a 5. *primi.* b 32. *primi* c 23. *primi* d 28. *primi.* e 37. *primi.*

THEOR. 8. PROPOS. 9.

IN ſimilibus triangulis rectangulis quadratum à lateribus, quæ angulis rectis ſubtenduntur, tanquam ab vna linea, deſcriptum, æquale eſt quadratis duobus ſimul, quæ à reliquis homologis lateribus tanquam ex duabus lineis, ita vt quælibet duo latera homologa conficiant vnam lineam rectam, deſcribuntur.

Proprietas duorũ triangulorum rectangulorũ ſimilium.

SINT triangula rectangula ſimilia ABC, DEF, ita vt anguli B, & E, ſint recti, anguli vero C, & F, inter ſe æquales; itemque anguli A, & D, inter ſe æquales; homologaque latera AB, DE; Item B C, E F, & A C, D F. Dico quadratum ex A C, D F, tanquam ex linea vna, deſcriptum, æquale eſſe duobus quadratis, quorũ vnum ex AB, D E, tanquam ex vna linea, alterum vero ex BC, EF, tanquam ex vna quoque linea, deſcribitur. Producta namque DE, ad partes E, ſumatur EG, æqualis rectæ AB, & ducatur GH, recta æquidiſtans rectæ E F, donec cum D F, producta conueniat in puncto H; Deinde per F, ducatur recta F I, æquidiſtans rectæ E G. Erit igitur triangulum F I H, æquiangulum triangulo DEF, hoc eſt, triangulo ABC. *f* Nã angulus FIH, ęqualis eſt angulo G, *g* & hic æqualis angulo D E F, hoc eſt, angulo B; angulus vero H, æqualis eſt angulo D F E, hoc eſt, angulo C; *h* ac proinde & angulus I F H, angulo A: Sunt autem & latera AB, FI, æqualia; *i* Nam recta FI, eſt æqualis rectæ EG, hæc autem rectæ AB, ſumpta fuit æqualis. k Igitur & latera BC, I H; item AC, FH, æqualia



f 29. *primi.* g 29. *primi* h 32. *primi* i 34. *primi* k 26. *primi.*

inter

inter se erunt. Quare recta DH, composita erit ex A C, & D F, Recta vero DG, ex AB, & DE, Recta denique GH, ex B C, & E F; *a* quod G I, recta æqualis sit rectæ E F. *b* Et quoniam quadratum rectę D H, æquale est quadratis rectarum DG, GH, simul, constat verum esse, quod proponitur. In similibus igitur triangulis rectangulis quadratũ à lateribus, quæ angulis rectis subtenduntur, &c. quod erat demonstrandum.

a 34. *primi.*
b 47. *primi.*

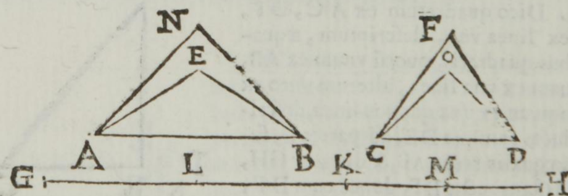
PROBL. 2. PROPOS. 10.

Qua arte constituantur duo triã gula isosceIia similia q dem inter se Isoperimetra vero aliijs duobus Isoscelibus.

DATIS duobus triangulis Isoscelibus, quorum bases inæquales existant, duoque latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius; Super eisdem basibus duo alia triangula isoscelia inter se quidem similia, prioribus verò simul sumptis Isoperimetra simul sumpta, constituere.

SINT super bases inæquales AB, CD, duo triangula Isoscelia A E B, CFD, sintque quatuor lineæ AE, EB, CF, F D, inter se æquales; maior autem sit basis AB, base CD, quibus positis, *c* erit angulus E, maior angulo F,

c 25. *primi.*



ideoque triangula non similia, cum nec æquiangula. Oporteat iam super bases easdem AB, CD, constituere alia duo triangula isoscelia inter se quidẽ similia, isoperimetra vero simul sumpta prioribus triãgulis simul sumptis. Ponatur recta GH, æqualis quatuor rectis AE, EB, CF, F D, *d* diuidaturque in puncto K, vt esset recta composita ex AB, & C D, diuisa in puncto B, hoc est, sit ea proportio GK, ad KH, quæ est AB, ad C D. Et quia maior est recta AB, quam recta CD, maior quoque erit recta GK, quam recta KH, cum vtrobique sit proportio maioris inæqualitatis. Diuidatur vtraque G K, KH, bifariam in punctis L, & M. Itaque cum sit vt GK, ad KH, ita A B, ad C D,

d 10. *sexti.*

erit

erit componendo, vt G H, ad K H, ita A B, C D, simul ad C D: Est autem GH, maior, quàm AB, CD, simul, *a* quod & quatuor rectæ A E, EB, C F, FD, quæ æquales sunt rectę GH, maiores sint, quam AB, CD. *b* Igitur & KH, maior erit quam CD: Eademque ratione maior erit G K, quam A B. Quoniam igitur trium rectarum AB, G L, L K, duæ reliqua sunt maiores omnifariam sumptæ; (Duæ enim G L, L K, maiores sunt quam A B, quod tota G K, maior sit, quam A B, vt modo fuit ostensum; Manifestum autem est, AB, GL, maiores esse reliqua LK; Itemque AB, LK, reliqua G L, esse maiores, propterea quod G K, diuisa est bifariam in puncto L. Idem quoque dices de tribus rectis CD, KM, MH) *c* constituatur ex tribus rectis AB, GL, LK, triangulum ANB, quod erit Isosceles, cadetque punctum N, extra triangulum AEB, cum A E, EB, simul dimidium constituant rectæ G H; at vero AN, NB, simul maius efficiant, quam dimidium rectæ GH. *d* Rursus ex tribus rectis CD, KM, MH, constituatur quoque triangulum COD, quod Isosceles erit, cadetque punctum O, intra triangulum C F D, eo quod C F, FD, simul æquales sint dimidio rectæ GH; at C O, OD, simul minores sint dimidio rectæ G H. Et quoniam quatuor latera AE, E B, CF, F D, simul; Item AN, NB, CO, OD, simul æqualia sunt rectæ GH, erunt priora quatuor simul, posterioribus quatuor simul æqualia; additis ergo communibus A B, CD, fient sex latera A E, E B, B A, C F, F D, DC, simul æqualia sex lateribus A N, N B, B A, CO, OD, D C, simũl; ideoque triangula ANB, C O D, simul isoperimetra erunt triangulis AEB, CFD, simul. Dico iam, quod & similia inter se sunt triangula A N B, C O D. Nam quoniam est, vt AB, ad CD, ita GK, ad KH, *e* hoc est, ita GL, ad KM, hoc est ita AN, ad CO, & N B, ad O D; erit permutando, vt AB, ad AN, ita CD, ad CO; & vt AN, ad NB, ita C O, ad O D. Proportionalia ergo sunt latera triangulorum ANB, COD; *f* ac proinde æquiangula inter se erunt, & idcirco similia. Quare datis duobus triangulis Isoscelibus, quorum bases inæquales existant. &c. constituimus. quod faciendum erat.

a 20. *primi.*
b 14. *quinti*
c 22. *primi.*
d 22. *primi*
e 15. *quint*
f 5. *sexti.*

THEOR. 9. PROPOS. 11.

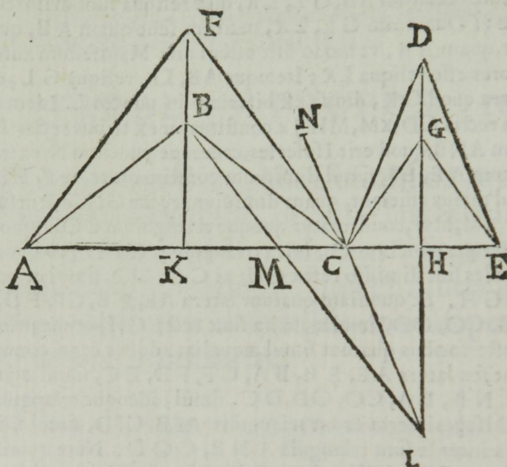
DVO triangula Isoscelia similia super inæqualibus basibus constituta, vtraque simul maiora sunt duobus triangulis Isoscelibus, vtrisque simul, quæ habeant easdem bases cum prioribus, sintque dissimilia quidem inter se, at isoperimetra prioribus duobus, nec non quatuor latera inter se habeant æqualia.

Triangula duo Isoscelia similia maiora sunt duobus Isoscelibus nõ similibus, quę illis sint Isoperimetra, basesque habeant easdẽ

SVPER basibus inæqualibus A C, C E, sint duo triangula Isoscelia inter se non similia ABC, CDE, ita vt quatuor latera AB, BC, CD, DE, inter se sint æqualia. *g* Atque super eisdem basibus A C, C E, constituantur alia duo

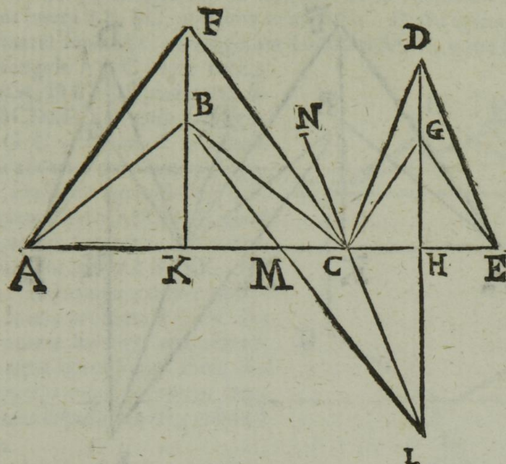
g 10. *huius.*

duo triangula Isoscelia AFC, CGE, similia inter se, & isoperimetra simul prioribus triangulis simul. Dico duo triangula A F C, C G E, simul maiora esse duobus triangulis ABC, CDE, simul. Ponantur enim AC, CE,



secundum lineam rectam vnam; sitque AC, basis maior base C E. Deinde ex F, per B, ducatur recta FBK, secans rectam AC, in puncto K; Item ex D, per G, punctum ducatur recta DGH, secans rectam CE, in H. Et quia latera AF, FB, trianguli AFB, æqualia sunt lateribus CF, FB, trianguli CFB, &
a 8.primi. basis AB, basi BC, æqualis, *a* erit angulus AFB, angulo CFB, æqualis. Rursus quia latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia sunt lateribus CF, FK, trian-
b 4.primi. guli CFK, & angulus AFK, angulo CFK, æqualis, vt probatum est; *b* erunt bases AK, KC, æquales, & anguli ad K, æquales quoque, hoc est, recti. Eadem ratiocinatione concludemus rectã CE, in puncto H, diuidi bifariam, angulosque ad H, esse rectos. Producatur recta DH, ad partes H, sumaturque HL, æqualis rectæ DH, & extendatur à puncto L, per punctũ C, recta LCN. Quoniam vero latera DH, HC, trianguli DCH, æqualia sunt lateribus LH,
c 4.primi. HC, trianguli LCH, & anguli ad H, æquales, vt pote recti; *c* erunt bases DC, L C, æquales, & anguli D C H, L C H, æquales etiam: Atqui angulus DCH, maior est angulo GCH, & angulus GCH, æqualis est angulo FAK, propter similitudinem triangulorum GCE, & FAC, hoc est, angulo F C A,
d 5.primi. *d* qui angulo FAC, æqualis est. Erit igitur angulus DCH, hoc est, angulus
e 15.primi. LCH, qui illi ostensus est æqualis, hoc est, angulus NCK, *e* qui angulo LCH, ad verticem est æqualis, maior etiam angulo FCA: & ob id CN, recta extra rectam CF, cadet necessario; & rectæ LC, CB, propterea comprehendent ad partes K, angulum BCL. Quare si ducatur recta BL, secabit ea lineam CK, in aliquo puncto inter puncta C, & K, quod sit M. Quoniam vero rectæ AB,

BC,CD, DE, ſimul æquales ſunt rectis A F, F C, C G, G E, ſimul,propter triangula iſoperimetra, erunt quoque dimidia earum æqualia inter ſe, nimirum rectæ BC, CD,hoc eſt, BC, CL, ſimul æquales ipſis F C, C G, ſimul: *a* Sunt autem rectæ BC,CL,ſimul maiores recta BL.Igitur & FC,CG, *a 20.primi.*



ſimul maiores erunt eadem recta B L : ideoque qnadratum ex FC, CG,tanquam ex vna linea, deſcriptum maius erit quadrato BL. *b* Quod autem ex FC, CG, tanquam ex vna linea, deſcribitur quadratum,æquale eſt quadrato ex FK,G H, tanquam ex vna linea deſcripto, vna cum quadrato, quod ex K C, C H, tanquam ex vna linea, deſcribitur. *c* Quadratum vero ex LB,deſcriptum æquale eſt quadrato ex BK, LH,hoc eſt,ex B K, D H, tanquam ex vna linea, deſcripto, vna cum quadrato, quod ex K M, M H; tanquam ex vna linea, deſcribitur; quod triangula rectangula BKM, L H M, ſint ſimilia inter ſe. *d* Sunt enim anguli M, ad verticem æquales, & anguli K, H, recti, *e* ideoque & reliqui K B M, H L M, æquales. Igitur quadratum ex F K, G H, tanquam ex vna linea, deſcriptum, & quadratum ex K C, C H, tanquam ex vna linea, deſcriptum, hoc eſt, quadratum K H, vtraque ſimul, maiora ſuut quadrato ex B K, D H, tanquam ex vna linea, deſcripto,& quadrato ex KM, MH, tanquam ex vna linea deſcripto,hoc eſt, quadrato KH, vtriſque ſimul. Ablato ergo communi quadrato KH,erit quadratum ex F K, G H, tanquam ex vna linea,deſcriptum maius quadrato ex BK, DH, tanquam ex vna linea,deſcripto; ideoque maiores erunt rectæ lineæ FK, GH, ſimul rectis BK,DH,ſimul; Ac propterea, demptis communibus BK,GH,erit FB,reliqua maior, quam reliqua DG. Eſt autem & KC, maior quam HC,eo quod tota AC,cuius dimidium eſt KC,maior

b 9. huius.
c 9. huius.
d 15.primi.
e 32.primi.

ior ponitur quam tota C E, cuius dimidium est H C. Quapropter rectangulum sub FB, KC, contentum, maius erit rectangulo sub DG, HC, contento. Et quoniam triangulum FBC, dimidium est rectanguli sub FB, KC, contenti; (Nam si super FB, constituatur rectangulum altitudinem habens KC,

F
D
B
N
G
A
K
M
C
H
E
L

a 41. *primi.* ita vt triangulum, & rectangulum inter easdem sint parallelas; *a* erit triangulum parallelogrammi dimidium. quod quidem parallelogrammum idem est, quod rectangulum sub F B, K C, contentum, vt constat.) Triangulum vero D G C, dimidium est rectanguli contenti sub D G, H C; (Si enim super D G, costituatur rectangulum altitudinem habens H C, ita vt triangulum, & rectangulum inter easdem sint parallelas: *b* erit triangulum parallelogrammi dimidium. quod quidem parallelogrammum idem est, quod rectangulum sub DG, HC, contentũ, vt constat.) erit quoque triangulum FBC, maius triangulo DGC; ac propterea duplum trianguli F B C, nimirum rectilineum AFCBA, maius erit duplo trianguli DGC, vt pote rectilineo C D E G C. Quocirca, addito communi composito ex triangulis ABC, CGE; erunt triangula AFC, CGE, vtraque simul maiora triangulis ABC, CDE, vtrisque simul. Duo ergo triangula Isoscelia similia super inæqualibus basibus constituta, &c. quod ostendendum erat.

b 41. *primi.*

Inter Isoperimetras figuras æqualia numero habentes latera maxima & æquilatera est, & æquiãgula.

THEOR. 10. PROPOS. 12.

ISOPERIMETRARVM figurarum latera nu-

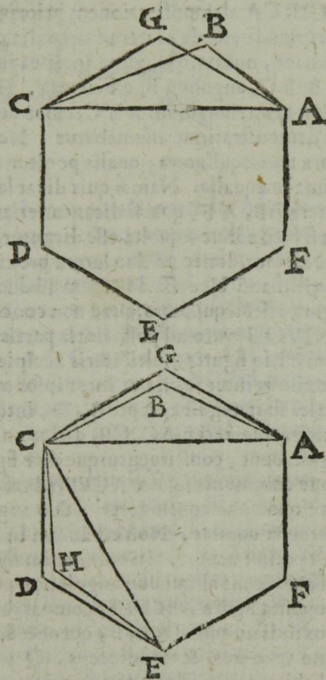
me-

mero æqualia habentium maxima & æquilatera eſt, & æquiangula.

ESTO figura quotcunque laterum ABCDEF, maxima inter omnes toti dem laterum ſibi Iſoperimetras, ita vt maior dari non poſſit. Dico eam eſſe æquilateram, & æquiangulã. Sit enim, ſi fieri poteſt, primum non æquilatera, ſed ſint latera AB, BC, proxima inæqualia. Ducta igitur recta A C, *a* ſi conſtituatur ſuper A C, triangulum Iſoſceles AGC, quod ſit iſoperimetrum triangulo A B C; erit tota figura AGC D E F, iſoperimetra figuræ ABCDEF. *b* Et quia triangulum A G C, maius eſt triangulo ABC; ſi addatur commune polygonum ACDEF, erit figura AGCDEF, maior quam figura ABCDEF. quod eſt contrarium hypoteſi. Non ergo inæqualia ſunt latera A B, B C, ſed æqualia. Eademque ratione oſtendemus, latera proxima B C, C D; Item proxima deinceps æqualia eſſe. Maxima igitur figura inter ſibi iſoperimetras æqualia numero latera habentes æquilatera eſt, quod eſt primum.

a 7. *huius.*

b 8. *huius.*



SIT deinde, ſi fieri poteſt, figura ABCDEF, æquilatera quidem vt iam demonſtratum eſt, at non æquiangula, ſed anguli B, D, non proximi inæquales ſint, maiorque angulus B, quam angulus D. Quoniam igitur demonſtratum eſt, figuram maximam eſſe æquilateram, erunt duo triangula A B C, C D E, Iſoſcelia, ita vt duo latera AB, BC, æqualia ſint duobus lateribus C D, DE: Ponitur autem angulus B, maior angulo D; *c* erit recta A C, maior quam recta CE. *d* Si igitur conſtituantur ſuper baſes AC, CE, alia duo triangula Iſoſcelia AGC, CHE, ſimilia inter ſe, & Iſoperimetra triangulis ABC, CDE; *e* erunt triangula AGC, CHE, vtraque ſimul maiora triangulis ABC, CDE, vtriſque ſimul. Si igitur addatur commune polygonum ACEF: erit figura AGCHEF, maior, quam figura ABCDEF, quod cum hypotheſi pugnat, quod hæc omnium maxima ponatur. Non ergo inæquales ſunt anguli B, D, ſed æquales. Eademque ratione oſtendemus, angulos non proximos C, E, æquales eſſe, & binos alios quoſuis non proximos. Ex quo efficitur, totam figuram æquiangulam eſſe, nempe proximos etiam angulos inter ſe eſſe æquales. Si enim verbi gratia angulus B, non dicatur æqualis eſſe angulo C; cum angulus C, æqualis ſit non proximo angulo E; erit

c 24. *primi.*
d 10. *huius.*
e 11. *huius.*

quoque angulus B, angulo E, non æqualis, quod absurdum est. Bini enim anguli non proximi inter se æquales sunt, vt ostendimus. Maxima ergo figura inter sibi Isoperimetras æqualia numero latera habentes non solum æquilatera, sed & æquiangula est. Quocirca Isoperimetrarum figurarũ latera numero æqualia habentium maxima & æquilatera est, & æquiangula. quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM

Quæ obseruanda sint in demõstratione huius propos.

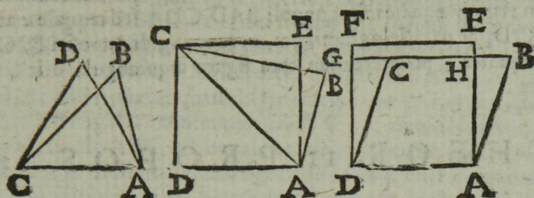
CIRCA demonstrationem prioris partis huius propos. obseruandum est, accipienda esse duo latera inæqualia proxima inter se, ita vt angulum constituant, nullumque aliud inter ea interponatur, qualia sunt latera accepta A B, B C, angulum B, efficientia. Hac enim ratione, ducta recta A C, factum erit triangulum A B C, cuius duo latera A B, B C, inæqualia sunt, vt in demonstratione assumebatur. Neque vero dubitare quis poterit, in figura non æquilatera, qualis ponitur ABCDEF, accipi posse duo latera proxima inæqualia. Nam si quis dicat latera AB, BC, esse æqualia, sumemus latera AB, A F, quæ si dicantur etiam æqualia esse, accipiemus A F, F E: Et si hæc adhuc æqualia esse dicantur, capiemus EF, ED; & sic deinceps progrediemur, donec ad duo latera proxima inæqualia veniamus, quæ angulum constituant. Necessario autem ad duo huiusmodi latera perueniemus: alias figura esset æquilatera, quod non conceditur.

QVOD vero ad posterioris partis demonstrationem attinet, aduertendum est, in figuris multilateris accipiendos esse duos angulos inæquales non proximos inter se, ita vt inter ipsos vnus, vel plures anguli interponantur, quales sunt anguli accepti B, D, inter quos ponitur angulus C. Hac enim ratione duæ rectæ AC, CE, dictos angulos subtendentes se mutuo non intersecabunt, constituenturque duæ figuræ ABCDEF, AGCHEF, ex additione communis figuræ ACEF, ad triangula supra bases A C, C E, constructa: quod non contingeret, si duo anguli inæquales proximi inter se sumerentur, vt constat. Non est autem in dubium vertendum, an tales duo anguli possint accipi. In omni enim figura multilatera non æquiangula necessario erunt aliqui duo anguli non proximi inter se inæquales. Nam in proposita figura ABCDEF, comparabimus angulum B, cum omnibus non proximis angulis D, E, F, qui necessario duo erunt in pentagono, in hexagono vero tres, & ita deinceps. Quod si vni alicui eorum fuerit inæqualis, habebimus iam duos angulos non proximos inter se inæquales, nempe angulum B, & illum, cui inæqualis est: Si vero omnibus dicatur æqualis, erit tunc angulus B, saltem alteri proximorum inæqualis, alias figura esset æquiangula. Si ergo inæqualis fuerit angulo A, erit angulus A, tam angulo E, quam angulo D, non proximo inæqualis, cum vtriuis horum æqualis ponatur angulus B: Si vero inæqualis fuerit angulo C, erit angulus C, tam angulo E, quam angulo F, non proximo inæqualis, quod vtriuis horum angulus B, ponatur æqualis.

SED quoniam propositio hæc demonstrata tantum est in figuris multilateris, vt ex ijs constat, quæ proxime de duobus angulis non proximis inæqualibus diximus: In triangulis enim, & quadrilateris figuris anguli eiusmodi reperiri non possunt, cum in triangulis æquilateris omnes anguli sint

æqua-

æquales, vt ex coroll. propof. 5. lib. 1. Euclid. patet; in quadrilateris autem figuris omnia latera habentibus æqualia, (quoniam neceſſario ſunt parallelogramma, vt in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. Euclid. oſtendimus) *a* ſinguli op- a 34. *primi.*



poſiti inter ſe ſint æquales: Idcirco totam hanc propoſitionem in triangulis, & quadrilateris figuris ita demonſtrabimus. Sit primum triangulum A B C, inter ſibi Iſoperimetra triangula maximum. Dico illud æquilaterum eſſe & æquiangulum. Si enim non eſt æquilaterum, ſed latera A B, BC, ſunt inæqualia, *b* ſi ſuper baſē AC, cōſtituatur triãgulũ Iſoſceles ADC, ita vt latera AD, DC, ſimul æqualia ſint lateribus AB, BC, ſimul; erunt triãgula ABC, ADC, Iſoperimetra; *c* atque adeo A D C, maius, quam ABC, quod eſt contra hypotheſim. Non ergo inæqualia ſunt latera AB, BC, ſed æqualia. Eademque ratio eſt de cæteris. Æquilaterum ergo eſt triangulum ABC. Igitur, ex coroll. propoſ. 5. lib. 1. Euclid. & æquiangulum eſt. quod eſt propoſitum. b 7. *huius.* c 8. *huius.*

DEINDE ſit quadrilaterum ABCD, inter omnia ſibi Iſoperimetra maximum. Dico illud eſſe & æquilaterum, & æquiangulum. Si enim non eſt æquilaterum, ſint latera AB, BC, ſi fieri poteſt, inæqualia, ducaturque recta AC. *d* Si igitur ſuper AC, conſtituatur triangulum Iſoſceles AEC, iſoperimetrum triangulo A B C; *e* erit triangulum A E C, maius triangulo ABC. Addito ergo communi triangulo ACD, erit quadrilaterum AECD, maius quadrilatero ABCD. quod eſt contra hypotheſim, cum ABCD, maximum ponatur. Non ergo inæqualia ſunt latera A B, B C, ſed æqualia. Eademque ratio eſt de cæteris. Æquilatera ergo eſt figura ABCD. d 7. *huius,* e 8, *huius*

SIT iã quadrilatera figura ABCD, omnium iſoperimetrarum maxima, æquilatera, vt oſtenſum eſt, at non æquiangula, ſed anguli BAD, CDA, inæquales ſint. Quoniam igitur figura ABCD, cum ſit æquilatera, parallelogrammum eſt, vt in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. demonſtrauimus; neuterque angulorum A, D, rectus eſt; (alias, *f* cum ambo duobus rectis ſint æquales, eſſent ambo recti) ſed vnus acutus, & obtuſus alter: ſi educantur ex A, & D, duæ lineæ perpendiculares AH, DG, occurrentes lateri B C, in H, & G; erit quoque AHGD, parallelogrammum. *g* Quia vero latera AB, DC, maiora ſunt lateribus AH, DG; producantur hæc, vt fiant rectæ A E, D F, lateribus A B, D C, æquales; iungaturque recta E F. Quo facto, erit figura AEFD, iſoperimetra parallelogrammo ABCD; cum latera AE, DF, f 29. *primi.* g 19. *primi.*

lateri-

lateribus AB,DC,æqualia sint, latus vero AD,commune, & latus EF,lateri BC, æquale, *a* quod vtrumque æquale sit lateri opposito AD. Cum ergo figura AEFD,maior sit parallelogrammo AHGD; *b* hoc autem æquale sit parallelogrammo ABCD;erit quoque figura AEFD, maior parallelogrammo ABCD. Quare cum eidem sit isoperimetra, non erit ABCD, figura quadrilatera inter sibi Isoperimetras maxima. quod est contra hypothesim. Non ergo inæquales sunt anguli BAD,CDA,sed æquales: atque adeo cum ABCD, sit parallelogrammum, *c* erunt anguli oppositi B, C, angulis D, A, æquales, propterea que tota figura æquiangula erit. quod est propositum.

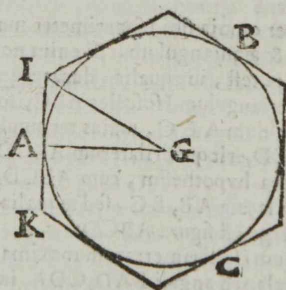
a 34.*primi.*
b 35.*primi.*
c 34.*primi.*

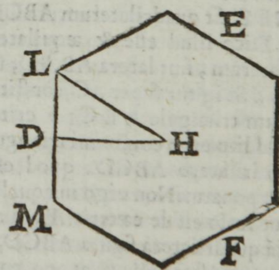
THEOR. 11. PROPOS. 13.

Circulus omniũ figurarum recti linearum regularium sibi isoperimetrarũ maximus est.

CIRCVLVS omnibus figuris rectilineis regularibus sibi isoperimetris maior est.

ESTO circulus ABC,figura autem regularis quotcunque laterum ei isoperimetra DEF. Dico circulum ABC, esse maiorem figura DEF. Sit enim G, centrum circuli ABC, & H, centrum figuræ DEF; Describaturque circa circulum ABC,figura BIKC,tot laterum,& angulorum æqualium,quot continet figura DEF,per ea,quæ in scholio propos. 16. lib.4. Euclid.docuimus.





d 18. *tertij.*
e 3. *tertij.*

Deinde ex puncto contactus A, ad centrum G,ducatur recta AG, *d* quæ perpendicularis erit ad IK. Ducatur rursus HD, ad LM, perpendicularis; *e* Diuidentque rectæ GA, HD, rectas IK, LM, bifariam, vt constat,si figuris BIKC, DEF, circumscribantur circuli. Ducantur quoque rectæ GI, HL, quæ diuident angulos I, & L, bifariam, vt manifestum est ex demonstratione propos. 12. lib. 4. Euclid. Quoniam igitur toti anguli I,& L,sunt æquales

les, propter similitudinem figurarum, erunt etiam ipsorum dimidia (videlicet anguli AIG, DLH,) æqualia. Cum ergo & anguli I A G, L D H, sint æquales, vtpote recti; *a* erunt triangula AIH, D L H, æquiangula. a 32. *primi.* Quia vero ambitu figuræ BIKC, maior est (per 1. propos. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro) ambitu circuli A B C; Ambitus autem circuli æqualis ponitur ambitui figuræ D E F; erit quoque ambitus figuræ BIKC, maior ambitu figuræ DEF. Cum igitur figuræ sint regulares, & similes, erit etiam latus IK, latere LM, maius; & ideo IA, dimidium lateris I K, maius, quam LD, dimidium lateris LM. *b* Rursus quoniam est, vt IA, ad AG, ita LD, ad DH; b 4. *sexti.* Et est IA, maior quam LD; *c* erit quoque AG, maior, quam DH. c 14. *quinti.* Quamobrem rectangulum contentum sub A G, & dimidio ambitu circuli ABC, *d* quod circulo ABC, est æquale, maius est, quam rectangulum contentum sub DH, & dimidio ambitu figuræ DEF, hoc est, *e* quam area figuræ DEF. d 4. *huius.* e 2. *huius.* Circulus igitur omnibus figuris rectilineis regularibus sibi isoperimetris maior est. quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX omnibus ijs, quę demonstrata sunt, perspicuum est, circulum absolute omnium figurarum rectilinearum sibi isoperimetrarum maximum esse.

Circul⁹ omnibus figuris rectilineis sibi isoperimetris maior est.

QVONIAM enim ex propositione 5. habetur, regularium figurarum isoperimetrarum eam, quæ plura latera continet, esse maiorem: Rursus ex propositione 12. constat, inter omnes figuras isoperimetras ęqualia numero latera habentes, eam maximam esse, quæ regularis est: Ex hac denique 13. propositione perspicuum est, circulum omnium figurarum isoperimetrarum regularium esse maximum: Manifeste concluditur, circulum absolute ac simpliciter omnium figurarum rectilinearum sibi isoperimetrarum maximum esse. quod est propositum.

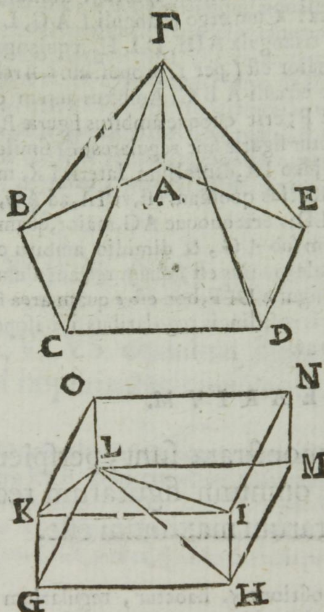
THEOR. 12. PROPOS. 14.

AREA cuiuslibet pyramidis ęqualis est solido rectangulo contento sub perpendiculari à vertice ad basim protracta, & tertia parte basis.

Pyramis quælibet cui parallelepipedo sit ęqualis.

SIT pyramis, cuius basis quotcunque laterum A B C D E, & vertex F. Solidum autem rectangulum G N, cuius basis G H I K, æqualis sit tertiæ parti basis A B C D E; altitudo vero siue perpendicularis G L, æqualis altitudini pyramidis, siue perpendiculari à vertice pyramidis ad eius basim productæ. Dico solidum rectangulum G N, æquale esse pyramidi

ABC-



ABCDEF. Ducantur enim ab omnibus angulis basis GHIK, ad aliquod punctum basis oppositæ, nimirum ad L, lineæ rectæ, ita vt constituatur pyramis GHIKL, eandem habens basim cum solido GN, eandemque altitudinem & cum eodem solido GN, & cum pyramide ABCDEF. *a* Quoniam igitur pyramis ABCDEF, tripla est pyramidis GHIKL; *b* Et solidum GN, triplum quoque est eiusdem pyramidis GHIKL: *c* erit solidum GN, pyramidi ABCDEF, æquale. Quapropter area cuiuslibet pyramidis æqualis est solido rectangulo, &c. quod erat ostendendum.

a *schol. 6. duodec.*

b *coroll. 7. duodec.*

c *9. quinti.*

THEOR. 13. PROPOS. 15.

Corpus quodlibet, in qua sphæra describi potest, cui parallelepipedo æquale sit.

AREA cuiuslibet corporis planis superficiebus contenti, & circa sphæram aliquam circumscriptibilis, hoc est, à cuius puncto aliquo medio omnes perpendiculares ad bases eius productæ sunt æquales, æqualis est solido rectangulo contento sub vna perpendicularium, & tertia parte ambitus corporis.

ESTO corpus planis superficiebus contentum ABCD, circa sphæram EFGH, cuius centrum I, descriptum, in quo ducantur ex I, ad puncta contactuum lineæ rectæ IE, IF, IG, IH, quæ ad bases solidi erunt perpendiculares. Nam si verbi gratia per rectam IE, ducatur planum faciens in sphæra, per propos. 1. lib. 1. Theod. circulum EFGH, *d* & in basi rectam AB; tanget circulus EFGH, rectam AB, in puncto E, propterea quod sphæra basim non secat, sed tangit. *e* Igitur IE, ad rectam AB, perpendicularis erit. Eadem ratione, si per IE, ducatur aliud planum, à priori differens, fiet alius circulus in sphæra, & alia linea recta in eadem basi secans rectam AB,

d *3. vndec.*

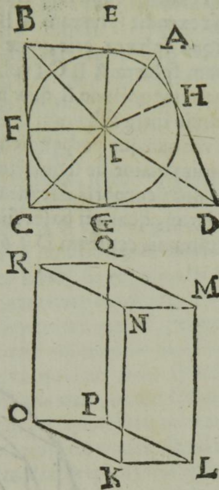
e *18. tertij.*

AB, in E; ad quam etiam I E, perpendicularis erit: *a* Ac propterea IE, ad basim solidi per illas rectas ductam perpendicularis erit. Non aliter ostendemus, rectas IF, IG, I H, ad alias bases esse perpendiculares. Sit quoque solidum rectangulum L R, cuius basis K L M N, sit æqualis tertiæ parti ambitus corporis A B-C D; altitudo vero siue perpendicularis L P, æqualis vni perpendicularium ex centro I, ad bases corporis A B C D, cadentium; quæ omnes inter se æquales sunt ex defin. sphæræ. Dico, solidum LR, corpori ABCD, æquale esse. Ducantur enim ex centro I, ad omnes angulos corporis ABCD, rectæ lineæ, vt totum corpus in pyramides, ex quibrs componitur, diuidatur: quarum quidem pyramidum bases eædem sunt quæ corporis, vertex autem communis centrum I. *b* Quoniam igitur quælibet harum pyramidum æqualis est solido rectangulo sub perpendiculari L P, quæ singulis perpendicularibus corporis A B C D, æqualis ponitur, & tertia parte suæ basis contento; Si fiant tot solida rectangula, quot sunt pyramides, erunt omnia hæc simul æqualia solido rectangulo L R. (Si enim rectangulum K L-M N, diuidatur in tot rectangula, quot bases sunt in solido proposito, ita vt primum æquale sit tertiæ parti vnius basis, & secundum tertiæ parti alterius, & ita deinceps, quandoquidem totum rectangulum K L-MN, æquale ponitur tertiæ parti totius ambitus solidi; intelligantur autem super illa rectangula constitui parallelepipeda; erunt omnia simul æqualia parallelepipedo LR.) *c* Cum ergo singula parallelepipeda singulis pyramidibus sint æqualia; erunt quoque omnes pyramides, nempe corpus ABCD, ex illis compositum, æquale solido rectangulo L R. Quamobrem area cuiuslibet corporis planis superficiebus contenti, &c. quod demonstrandum erat.

a 4. *undec.*

b 14. *huius.*

c 14. *huius.*



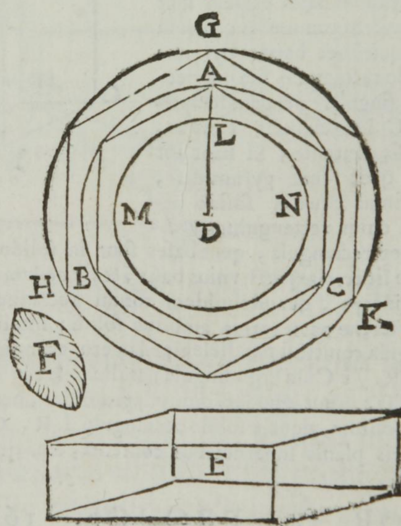
THEOR. 14. PROPOS. 16.

AREA cuiuslibet sphæræ æqualis est solido rectangulo comprehenso sub semidiametro sphæræ, & tertia parte ambitus sphæræ.

Sphera quælibet cui parallelepipedo sit æqualis.

ESTO sphæra ABC, cuius centrum D, semidiameter A D: Solidum autem rectangulum E, contentum sub semidiametro AD, & tertia parte ambitus sphæræ ABC. Dico corpus E, sphæræ A B C, esse æquale. Nam si non est æquale: sit, si fieri potest, primum maius, sitque excessus corporis E, supra sphæram ABC, quantitas F. Intelligatur circa centrum D, descripta sphæra G H K, maior quam sphæra A B C, ita tamen, vt excessus sphæræ

GHK, ſupra ſphæram ABC, non ſit maior quantitate F, ſed vel æqualis, vel minor, hoc eſt, vt ſphæra GHK, ſit vel æqualis ſolido E, quando nimirum ipſa excedit ſphæram A B C, præciſe quantitate F; vel minor, ſi nimirum ipſa excedit ſphæram A B C, minori quantitate, quam F. Neceſſario enim aliqua ſphæra erit, quæ vel æqualis ſit magnitudini E, atque adeo maior quam ſphæra A B C; vel maior quidem quam ſphæra A B C, minor vero
a 17. *duode.* quam magnitudo E, quæ maior ponitur, quam ſphæra A B C. *a* Inſcribatur deinde intra ſphæram GHK, corpus, quod non tangat ſphæram A B C, ita vt vnaquæque perpendicularium ex centro D, ad baſes iſtius corporis eductarum maior ſit ſemidiametro A D. Si igitur à centro D, ad omnes angulos dicti corporis ducantur lineæ rectæ, vt totum corpus in pyramides diuidatur, quarum baſes ſunt eædem, quæ corporis G H K, vertex autem
b 14. *huius.* communis centrum D; *b* erit quælibet pyramis æqualis ſolido rectangulo



contento ſub eius perpendiculari, & tertia parte baſis; Atque idcirco ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte baſis cuiuslibet pyramidis, minus ipſa pyramide erit. Et quoniam omnia ſolida rectangula contenta ſub ſingulis perpendicularibus ex centro D, ad baſes corporis dicti protractis, & ſingulis tertijs partibus baſium, ſimul æqualia ſunt toti corpori; efficiunt autem omnes tertiæ partes baſium ſimul æqualia tertiam partem ambitus corporis; erit ſolidum rectangulum contentum ſub ſe-

ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus præfati corporis inſcripti intra ſphæram GHK, minus corpore inſcripto. Quoniam vero ambitus corporis inſcripti maior eſt ambitu ſphæræ ABC, vt demonſtrat Archimedes lib. 1. de ſphæra & cylindro propoſ. 27. atque adeo & tertia pars ambitus dicti corporis maior tertia parte ambitus ſphæræ A B C: erit ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro A D, & tertia parte ambitus ſphæræ A B C, hoc eſt, ſolidum E, multo minus corpore inſcripto intra ſphæram GHK: Poſita eſt autem ſphæra GHK, vel æqualis ſolido E, vel minor. Igitur & ſphæra GHK, minor erit corpore intra ipſam deſcripto, totum parte. quod eſt abſurdum. Quocirca ſolidum E, maius non erit ſphæra A B C.

SIT DEINDE, ſi fieri poteſt, ſolidum E, minus, quam ſphæra ABC, excedaturque à ſphæra ABC, quantitate F. Intelligatur circa centrum D, ſphæra deſcripta LMN, minor quam ſphæra A B C, ita tamen, vt exceſſus, quo ſphæra LMN, ſuperatur à ſphæra ABC, non ſit maior quantitate F, ſed vel æqualis, vel minor, hoc eſt, vt ſphæra LMN, ſit vel æqualis ſolido E, ſi nimirum ipſa excedatur à ſphæra ABC, quantitate F, vel maior ſolido E, ſi videlicet ſphæra LMN, à ſphæra AB C, ſuperetur minori quantitate, quam F. Neceſſario enim aliqua ſphæra erit, quæ vel æqualis ſit ſolido E, atque adeo minor quam ſphæra A B C, vel minor quidem quàm ſphæra A B C, maior vero quam magnitudo E, quæ minor ponitur, quam ſphæra ABC. *a* Deſcribatur deinde intra ſphæram ABC, corpus, quod minime tangat ſphæram LMN; ita vt vnaquæque perpendicularium ex centro D, ad baſes huius corporis inſcripti cadentium minor ſit ſemidiametro AD. Si igitur à centro D, ad omnes eius angulos lineæ extendantur, vt totum corpus in pyramides reſoluatur, quarum baſes ſunt eædem, quæ corporis ABC, vertex autem communis centrum D; *b* erit quælibet pyramis æqualis ſolido rectangulo contento ſub eius perpendiculari, & tertia parte baſis; Et ideo ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte baſis cuiuſuis pyramidis, maius erit pyramide ipſa. Et quoniam omnia ſolida rectangula contenta ſubt ſingulis perpendicularibus ex centro D, ad baſes corporis dicti protractis, & ſingulis tertijs partibus baſium, ſimul æqualia ſunt toti corpori; efficiunt autem omnes tertiæ partes baſium ſimul tertiam partem ambitus corporis, erit ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus dicti corporis ſphæræ A B C, inſcripti, maius corpore inſcripto. Cum igitur ambitus ſphæræ ABC, maior ſit ambitu corporis ſibi inſcripti, atque adeo & tertia pars ambitus ſphæræ maior tertia parte ambitus dicti corporis; erit ſolidum rectangulum contentum ſub AD, ſemidiametro, & tertia parte ambitus ſphæræ A B C, hoc eſt, ſolidum E, multo maius corpore inſcripto intra ſphæram A B C: Ponebatur autem ſphæra LMN, vel æqualis ſolido E, vel maior. Igitur & ſphæra LMN, maior erit corpore intra ſphæram ABC, deſcripto, pars toto, quod eſt abſurdum. Non igitur ſolidum E minus erit ſphæra ABC. Cum ergo neque maius ſit oſtenſum, æquale omnino erit: Ac propterea area cuiuslibet ſphæræ æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro ſphæræ, & tertia parte ambitus ſphæræ. quod demonſtrandum erat.

a 17. *duode*

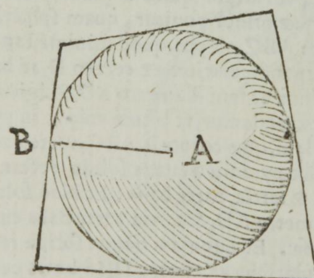
b 14. *huius.*

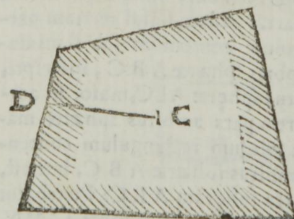
THEOR. 15. PROPOS. 17.

Sphæra maior est omnibus corporibus sibi Isoperimetris, & circa alias sphæras circũscriptibilib⁹, quæ planis superficiebus continentur.

SPHAERA omnibus corporibus sibi isoperimetris, quæ planis superficiebus contineantur, circaque alias sphæras circumscriptibilia sint, hoc est, quorum omnes perpendiculares ad bases productæ ab aliquo puncto medio sint æquales, maior est.

ESTO sphæra A, cuius centrum A, & semidiameter AB: Solidum autem circa aliquam sphæram circumscriptibile sibi isoperimetrum C, cuius vna perpendicularium C D. Dico sphæram A, maiorem esse solido C. Intelligatur enim circa sphæram A, corpus descriptum simile prorsus solido C, ita vt singula quoque latera contingant sphæram A, hoc est, eius perpendiculares, quarum vna sit A B, sint quoque æquales, nempe semidiametri sphæræ A, existentes. Itaque quoniam ambitus corporis circa sphæram A, maior est ambitu sphæræ A, (per ea, quæ ab Archimede sunt demonstrata lib. 1. de sphæra, & cylindro, propos. 27.) erit quoque eiusdem corporis ambitus maior ambitu corporis C. Quare perpendicularis A B, hoc est, semidiameter sphęræ A, maior erit perpndiculari C D. Quamobrẽ rectangulũ solidũ contentũ sub semidiametro AB, & tertia parte ambitus sphæræ A, a quod sphæræ A, æquale est, maius erit, quàm rectangulum solidum contentum sub perpendiculari C D, & tertia parte ambitus corporis C, b hoc est, quam corpus C. Sphæra igitur omnibus corporibus sibi Isoperimetris, quæ planis superficiebus contineantur, & c. maior est. quod erat demonstrandum.





a 16. huius.

b 15. huius.

COROLLARIVM.

Sphæra maior ẽ quouis corpore regulari sibi isoperimetro.

CONSTAT hinc, sphæram maiorem esse quolibet corpore regulari sibi Isoperimetro: quippe cum omnes perpendiculares è centro ad bases corporis regularis inter se æquales sint; propterea quod æquales sunt semidia-

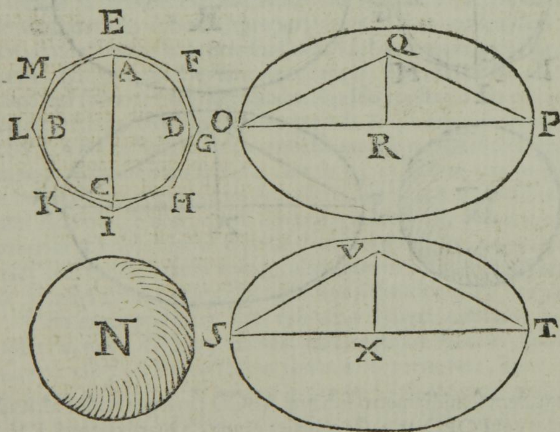
metro sphæræ, *a* quæ intra corpus describi potest. *a 21. quint dec.*

THEOR. 16. PROPOS. 18.

SPHAERA omnibus corporibus sibi isoperimetris, & circa alias sphæras circumscriptibilibus, quæ superficiebus conicis contineantur, ita vt latera omnia conica sint æqualia, maior est.

Sphæra maior est omnibus corporibus sibi Isoperimetris, & circa alias sphæras circumscriptibilibus, quæ conicis superficieb⁹ continétur.

ESTO circulus ABCD, cui circumscribatur figura regularis E F G H-IKLM, ita vt numerus laterum à quaternario mensuretur, cuiusmodi est quadratum, figura 8. 12. 16. 20. 24. vel 28. laterum, angulorumque æqualium, &c. Ducaturque ex angulo E, per centrum ad angulum I, recta EI. Itaque si circa manentem rectam E I, immobilem circumagatur planũ, in quo est circulus A B C D, & figura EFGHIKLM, describet circulus sphæram, figura vero corpus circa sphæram conicis superficiebus contentum, quarum superficierum latera æqualia sunt, nempe eadem, quæ figuræ, vt ab Archimede demonstratur propos. 22. & 27. lib. 1. de sphæra & cylindro. Sit iam sphæra N, isoperimetra corpori EFGHIKLM, circa sphæram ABCD, descripto. Di-

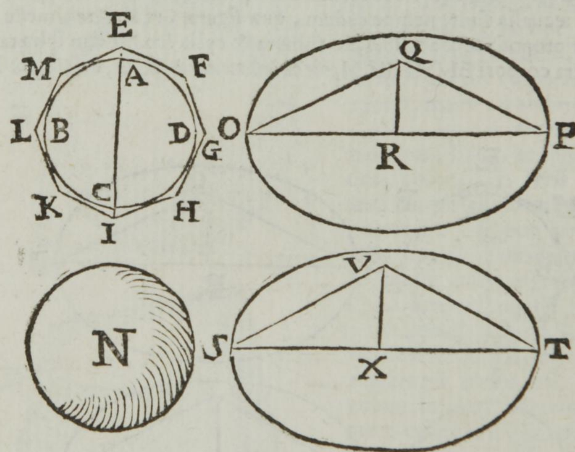


co sphæram N, dicto corpore esse maiorem. Quoniam enim ambitus solidi EFGHIKLM, maior est (per propos. 27. lib. 1. Archimedis de sphæra & cylindro) ambitu sphæræ ABCD, erit quoque ambitus sphæræ N, maior ambitu

bitu sphæræ ABCD; ideoque semidiameter sphæræ N, maior erit semidiametro sphæræ ABCD. Et quia superficies sphæræ quadrupla est (per propos. 31. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro) maximi circuli in sphæra; si sumatur circulus OP, quadruplus circuli maximi in sphæra N; (quod quidem facile fiet, si diameter OP, dupla sumatur diametri maximi circuli in sphæ-

a 2. duodec. ra N. *a* Quoniam enim vt circulus OP, ad circulum maximum in sphæra N, ita quadratum diametri OP, ad quadratum diametri circuli maximi in

b 20. sexti. sphæra N; *b* Est autem quadrati ad quadratum proportio duplicata proportionis laterum homologorum, erit quoque circulus O P, ad circulum maximum in sphæra N, in proportione duplicata proportionis diametri O P, ad diametrum circuli maximi in sphæra N. Cum igitur diametri ponantur habere proportionem duplam, habebunt circuli proportionem quadruplam; quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in his numeris apparet. 1. 2. 4.) erit circulus OP, æqualis superficiei sphæræ N. Accipiatur rursus circulus ST, æqualis circulo OP. Statuatur deinde supra circulum ST, conus rectus rectus STV, axem VX, æqualem habens semidiametro sphæræ N: Item supra circulum OP, alter conus NPQ, construatur habens axem



QR, æqualem semidiametro sphæræ ABCD; eritque maior altitudo coni STV, quam coni OPQ, at bases æquales erunt. Quare conus S T V, maior

c 14. duode. erit cono OPQ; *c* propterea quod coni æqualium basium eam inter se habent proportionem, quam altitudines. Quoniam vero sphæra N, quadrupla est eius coni, qui basem habet æqualem maximo in sphera N, circulo, & altitudinem æqualem semidiametro sphæræ N, vt demonstrauit Archimedes lib. 1. de sphæra & cylindro propos. 32. Huius autem eiusdem coni quadru-

d 11. duode. pus est conus STV, *d* eo quod coni eandem habentes altitudinem proportionem

tionem habent quam bases; *a* erit conus STV, sphæræ N, æqualis. Eodem pacto, quia basis coni OPQ, æqualis est ambitui corporis EFGHIKLM; quia & æqualis superficiei sphæræ N, quæ corpori illi isoperimetra est: altitudo vero æqualis semidiametro sphæræ ABCD; erit solido EFGHIKLM, æqualis conus OPQ, per ea, quæ Archimedes lib. 1. de sphæra & cylindro propos. 29. demonstrauit. Quamobrem & sphęra N, maior erit solido EFGHIKLM, conicis superficiebus contento. Sphæra igitur omnibus corporibus sibi isoperimetris, & circa alias sphęras circumscriptibilibus, &c. maior est. quod demonstrandum erat. a *9. quinti.*

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SPHAERA quolibet cono, & cylindro sibi Isoperimetro maior est.

Sphęra maior est quolibet cono & cylindro sibi isoperimetro.

PROPOSITA enim quacunque sphæra, si fiat conus basem habens æqualem superficiei sphæræ, id est, quadruplam maximi in sphæra circuli, altitudinem vero semidiametro sphæræ æqualem: *b* erit sphæra huic cono æqualis; propterea quod ad conum, cuius basis est maximus in sphæra circulus, & altitudo semidiameter sphæræ, tam sphæra, ex propos. 32. lib. 1. Archimedis de sphæra & cylindro, *c* quã prior conus basem habẽs quadruplã maximi circuli in sphæra, hoc est, superficiei sphæræ æqualem, & altitudinem semidiametrum sphæræ, proportionem habet quadruplam. Cum ergo ambitus coni basem habentis superficiei sphæræ æqualẽ maior sit ambitu sphæræ, quippe cum ille hunc excedat tota superficie coni, seclusa basi, quæ ambitui sphæræ ponitur æqualis, liquido constat, si fiat conus sphæræ isoperimeter, hunc esse illo cono, ac proinde & sphæra minorem. b *9. quinti.* c 11. *duode.*

RVRSVS si fiat cylindrus basem habens æqualem superficiei sphærę, & altitudinem semidiametrum sphæræ; *d* erit hic cylindrus triplus illius coni basem habentis æqualem eidem superficiei sphæræ, & altitudinem semidiametrum eandem sphæræ, quem sphæræ æqualem esse proxime ostendimus: ac proinde & triplus ipsius sphæræ. Tertia ergo pars illius cylindri (cylindrus videlicet eandẽ habens basem, altitudinem vero tertiam partem altitudinis cylindri illius: *e* cum ille cylindrus sit huius triplus) æqualis erit sphæræ. Cum ergo posterior hic cylindrus habeat ambitum maiorem ambitu sphæræ, quod ille hunc excedat ambitu totius cylindri, seclusa vna base; quis non videt, si fiat cylindrus sphæræ Isoperimeter, hunc esse priore illo cylindro, ac proinde & sphæra maiorem? Sphæra ergo quolibet cono, & cylindro sibi isoperimetro maior est. quod demonstrandum erat. d 10. *duode* e 14. *duod*

SCHOLIVM

HAEC omnia fere ex Theone Alexandrino in commentarijs in Almagestum Ptolemaei, & ex Pappo Alexandrino in Mathematicis collectionibus, licet pleraque eorum clarius & facilius demonstrauerimus, excerpta sunt. quæ vero sequuntur, à nobis inuenta sunt, ac demonstrata.

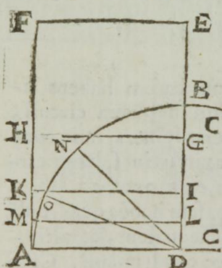
PROBL.

PROBL. 3. PROPOS. 20.

Semicirculo&alijspartibus subduplis circuli æqualia rectangula & isoperimetra constituere.

DATO semicirculo, vel quadranti, vel octauæ parti circuli, aut decimæsextæ, &c. rectangulum constituere isoperimetrum & æquale; si linea recta periphæriæ detur æqualis.

SIT semicirculus ABC: Quadrans ABD, octaua pars circuli AND, pars sextadecima AOD, &c. construatur rectangulum A E, contentum sub semidiametro AD, & sub recta AF, quæ quartæ parti peripheriæ æqualis sit; Item rectangulum AG, sub semidiametro AD, & sub AH, octaua parte peripheriæ.



Item rectangulum A I, sub semidiametro A D, & sub A K, parte decimasexta peripheriæ. Item rectangulum A L, sub semidiametro A D, & sub A M, parte trigesima secunda peripheriæ. Erit igitur ex ijs, quæ lib. 4. cap. 7. ad finem Num. 1. ostendimus, AE, semicirculo ABC; & AG, Quadranti ABD; & AI, octauæ parti A N D: & A L, parti sextædecimæ A O D, æquale, &c. Dico hæc eadem rectangula esse isoperimetra prædictis circuli partibus, singula singulis. quod quidem perspicuum est ex constructione. Nam A D, E F, æqualia sunt diametro AC, & AF, DE, semicircumferentiæ A B C, nimirum duabus quartis partibus circumferentiæ. Item AD, GH, æqualia sunt semidiametris AD, DB, & AH, DG, duabus partibus octauis, hoc est, quartæ parti circunferentiæ A B. Item AD, IK, duabus semidiametris AD, DN, & AK, D I, duabus sextis decimis, id est, octauæ parti circunferentiæ A N. Item AD, LM, duabus semidiametris AD, DO, & AM, D L, duabus partibus trigesimis secundis, hoc est, parti decimæsextæ A O; Atque ita deinceps, si tam peripheria AO, quam recta AM, continue subdiuidatur. Dato ergo semicirculo, vel Quadranti, &c. rectangulum isoperimetrum, & æquale constituimus. quod faciendum erat.

HOC problema, quod ad semicirculum, ac Quadrantem attinet, aduertit etiam nuper R. P. Odo Malcotius Mathematicus ingeniosus, cum problema Mathematicum per suos auditores exhiberet in Collegio Romano: quamuis illud instar Theorematis proposuerit.

PROBL. 4. PROPOS. 21.

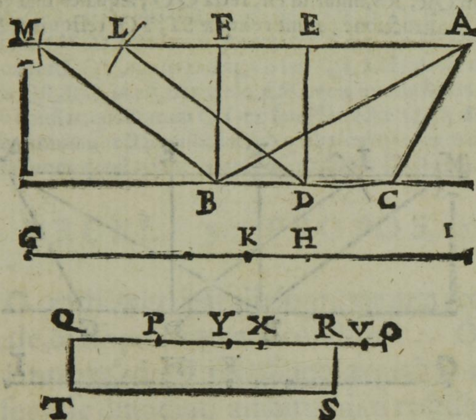
Parallelogrammũ dato triãgulo æquale & isoperimetrum constituere.

DATO triangulo cuicunque parallelogrammum æquale, atque isoperimetrum constituere.

SIT

SIT datum triangulum qualecunque A B C. Per A, ducatur A M, baſi BC, parallela. Et quia, ſi neuter angulorum B, C, rectus eſt, *a* vtrumque latus AB, AC, maius eſt perpendiculari ex A, vel B, C, D, in oppoſitam parallelam demiſſa: ſi vero alter angulorum rectus eſt, hoc eſt, alterutrum laterum perpendiculare eſt ad dictas parallelas; vtrumque latus A B, A C, ſimul maius eſt, quam duplum prædictæ perpendicularis; ideoque ſemiſſis aggregati ex vtroque latere maior perpendiculari eadem; id eſt, ſi accipiatur GH, lateri AB, & HI, lateri AC, æqualis, vt tota GI, ſummæ laterum AB, AC, æqualis ſit, diuidaturque GI, bifariam in K; ſemiſſis GK, maior erit perpendiculari DE. Si igitur ex D, medio puncto baſis BC, ad inter-

a *coroll. 19. primi.*



uallum GK, arcus circuli deſcribatur, ſecabit is rectam AM, in aliquo puncto, vt in L. Sumpta autem LM, ipſi BD, æquali, ducantur rectæ DL, BM, *b* quæ parallelæ inter ſe erunt; ideoque parallelogrammum erit DM, *c* triãgulo A B C, æquale. Dico hoc idem triangulo eſſe iſoperimetrum, quod perſpicuum eſt ex conſtructione: quippe cum DL, BM, vtraque æqualis ſit ipſi GK, hoc eſt, ſemiſſi laterum AB, AC, ac proinde ambæ DL, BM, ſimul æquales ambobus lateribus AB, AC, ſimul; rectæ autem BD, LM, ſimul æquales baſi BC. Conſtructum ergo eſt parallelogrammum DM, non rectangulum æquale, & iſoperimetrum triangulo ABC.

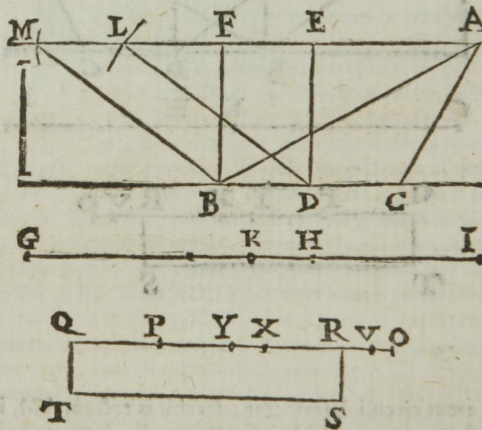
b *33. primi.*
c *ſchol. 41. primi.*

QVOD ſi optes rectangulum eidem triangulo ABC, æquale, & iſoperimetrum, ita agendum erit. Erectis perpendicularibus BF, DF, *d* erit rectangulum BE, triangulo æquale, ſed non iſoperimetrũ; *e* quod BF, DE, minores ſint lateribus A B, AC, ſed BD, EF, baſi BC, æquales: ac proinde ambitus rectanguli BE, ambitu trianguli A B C, minor; ideoque ſi producantur

d *ſchol. 41. primi.*
e *coroll. 19. primi.*

BF, DE, ad æqualitatẽ semissis laterum A B, A C, fiet quidem rectangulum triangulo ABC, isoperimetrum, sed triangulo maius, cum superet rectangulum BE. *a* Inuenta autem inter BF, B D, media proportionali N; *b* erit quadratum rectæ N, rectangulo BE, ideoque & triangulo ABC, æquale. *c* Quia vero BF, BD, simul maiores sunt, quam dupla rectæ N; *d* estque BM, maior quam B F, erunt B M, B D, simul multo maiores, quam dupla rectæ N. Sumpta ergo Q P, ipsi B D, & P O, ipsi BM, æquali, vt tota Q O, duabus BD, BM, simul sit æqualis; erit quoque QO, maior quam dupla rectæ N. *e* Secetur ergo QO, in R, ita vt N, sit inter segmenta Q R, R O, media proportionalis, perficiaturque rectangulum QS, sub segmentis Q R, R O, comprehensum. *f* quod quadrato rectæ N, hoc est, rectangulo BE, vel triangulo A B C, æquale erit. Dico idem esse triangulo ABC, isoperimetrum. Quoniam enim QR, RS, simul, id est, recta Q O, æquales sunt rectis B D, BM, simul, ex constructione; erunt reliquæ ST, TQ, reliquis L M, LD, æ-

a 13. *sexti.* b 17. *sexti.* c *schol.* 25. *quinti.* d 19. *primi.* e *schol.* 13. *sexti.* f 17. *sexti.*



quales: ideoque rectangulum Q S, parallelogrammo BL, ac proinde & triangulo ABC, (cui parallelogrammum BK, isoperimetrum est ostensum) erit isoperimetrum. Dato igitur triangulo cuicunque parallelogrammum, &c. constituimus. quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

QVOD si sumatur punctum V, vtcunque inter R, & O, erit rectangulum sub QV, VO, adhuc isoperimetrum triangulo ABC, sed minus. Si vero capiatur punctum X, vtcunque inter R, & Y, (diuisa QO, bifariam in Y,) erit

Y,) erit adhuc rectangulum sub QX, XO, isoperimetrum triangulo ABC, sed maius. Quadratum denique rectæ QV, isoperimetrum quoque est triangulo ABC,& maius, quæ omnia ita demonstrabimus. Prædicta rectangula, & quadratum rectæ QY, isoperimetra esse triangulo A B C, hoc est, rectangulo QS, patet: cum bina latera circa angulum rectum æqualia semper sint rectæ QO, hoc est, binis lateribus rectanguli Q S. Eadem vero esse inæqualia triangulo ABC, sic ostendo. *a* Quoniam quadrata Q V, V O, maiora sunt quadratis Q R, R O, simul: *b* Sunt autem tam illa duo, vna cum rectangulo sub QV,VO, bis, quam hæc duo, vna cum rectangulo sub QR,RO, bis, quadrato QO, æqualia; erit rectangulum sub Q V, V O, bis minus rectangulo sub QR,RO, bis; ideoque & rectangulum sub QV,VO, semel, rectangulo sub QR,RO, semel minus erit. Non aliter ostendemus, rectangulum sub QR, RO, minus esse rectangulo sub QX, XO, hoc est, rectangulum sub QX,XO, maius esse rectangulo sub Q R, R O. Denique *c* quoniam rectangulũ sub QX,XO, vna cum quadrato XY, æquale est quadrato YO, vel QY; erit quadratũ QY, maius rectãgulo sub QX,XO, ideoq. multo maius rectãgulo sub QR,RO, id est, triangulo ABC. quæ omnia demonstranda erant.

a lemma 42 decimi.
b *4. secũdi.*
c *6. secũdi.*

EX quo constat, quadratum QY, ex semisse rectæ Q O, descriptum maximum esse omnium rectangulorum sub quibuscunque segmentis rectæ QO, comprehensorum, quod etiam ex propos. 12. huius lib. liquet.

PROBL. 5. PROPOS. 22.

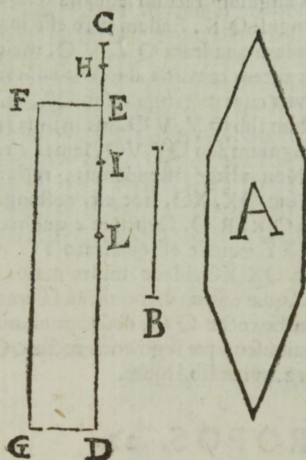
DATO rectilineo parallelogrammum rectangulum æquale, & Isoperimetrum constituere. Oportet autem latus quadrati rectilineo æqualis, maius non esse semisse dimidiati ambitus dati rectilinei.

Rectãgulũ datæ figuræ isoperimetrũ & æquale constituere.

SIT hexagonum datum A, æquilaterum quidem, sed non æquiangulum, ita vt B, ad latus quadrati illi æqualis *d* inuentum maius non sit semisse dimidiati ambitus hexagoni. Sumpta ergo recta CD, æquali semissi ambitus hexagoni; erit B, recta non maior semisse ipsius CD, sed vel æqualis, vel minor. *e* Secta autem CD, in E, ita vt B, sit media proportionalis inter segmenta DE,EC, fiat rectangulum EG, contentum sub segmentis DE, E C. Dico rectangulum EG, æquale esse, & isoperimetrum hexagono A. Quoniam enim tres DE, B, EC, continue proportionales sunt; *f* erit rectangulum EG, quadrato B, id est, hexagono A, æquale. Et quia duo latera DE,EF, æqualia sunt rectæ CD, hoc est, semissi ambitus hexagoni A, ideoque reliquæ duæ FG,GD, alteri semissi: erit totum rectangulum EG, hexagono A, isoperimetrum. Dato ergo rectilineo parallelogrammum rectangulum æquale, & isoperimetrum constituimus: quod erat faciendum.

d *14. secũdi*
e *schol. 13. sexti.*
f *17. sexti.*

SCHOLIVM.



QVOD si B, latus quadrati foret maius semisse dimidij ambitus rectilinei A, hoc est, maius recta CD, non posset CD, ita secari, vt B, esset medio loco proportionalis inter segmenta, vt liquido constat.

IAM vero si sumatur punctum H, inter C, & E, vtcunque; erit rectangulum sub DH, HC, adhuc isoperimetrum figuræ A, sed tamẽ minus. Si vero accipiatur punctum I, vtcunque inter E, & L, punctum medium rectæ CD; erit adhuc rectangulum sub DI, IC, figuræ A, isoperimetrum, maius tamen. Sic etiam quadratum semissis DL, erit isoperimetrum eidem figuræ & maius; quæ omnia demonstrabuntur, vt in scholio præcedentis problematis dictum est.

APPENDIX.

DE circulo per lineas quadrando.

1 LOCVS hic me admonet, vt quoniam hoc libro demonstratum est, circulum figurarum omniũ sibi isoperimetrarum esse maximum, breuiter doceam, qua ratione dato circulo quadratum construi possit æquale, & viciſſim dato quadrato circulus æqualis; atque id per lineas: cum lib. 4. cap. 7. copiose traditum sit, quo pacto ex inuentis ab Archimede, per numeros circulus quadrandus sit, hoc est, qua ratione area circuli, siue capacitas tum ex diametro, tum ex circumferentia cognita sit inuenienda: Huius enim areæ radix quadrata, latus est quadrati, quod circulo æquale est. Sic è contrario cap. 8. eiusdem lib. regula 1. Num. 1. docuimus, qua via ex data circuli area indaganda sit tam circumferentia, quam diameter illius circuli: hoc est, proposito quadrato, instar areæ circuli alicuius, quomodo circulus describendus sit illi quadrato æqualis. Inuenta enim diametro per prædictam regulam 1. Num. 1. cap. 8. lib. 7. circulus illius diametri erit is, qui quæritur. Visum est autem appendicem hanc libro huic septimo adiungere, quod tractatio de circuli Tetragonismo, siue quadratura, non parum affinis sit de isoperimetris figuris disputationi.

Quo pacto reperiatur per numeros quadratum circulo æquale, & cõtra ex doctrina Archimedis.

QVADRATVRA autem circuli per numeros, quam Arabes tradiderunt, & quam Iosephus Scaliger in suis Cyclometricis elementis veram esse

credit.

credit, omnino reijcienda eſt, cum ſit extra limites Archimedis, per quos conſtat, proportionem circunferentiæ ad diametrum minorem debere eſſe tripla ſeſquiſeptima, maiorem vero tripla ſuperdecupartiente ſeptuageſimas primas. quod in numeris Arabum non cernitur. Dicunt enim, proportionem circunferentiæ ad diametrum eſſe potentia decuplam: adeo vt ſi quadratum circumferentiæ ponatur 10. quadratum diametrum ſit 1. quod falſum eſt. Nam cum radix quadrata numeri 10. ſit maior quam $3\frac{1}{7}$. quod huius radicis quadratum ſit tantum $9\frac{4}{4}\frac{3}{9}$. Radix autem vnitatis ſit 1. eſſet maior proportio circunferentiæ ad diametrum, quam tripla ſeſquiſeptima: cum tamen ſecundum Archimedem ſit minor. Item quia poſita diametro 7. circunferentia minor eſt, quam 22. ex Archimede; erit quadratum circunferentiæ minus, quam 484. quod ad 49. quadratum diametri minorem, proportionem habet, quam decuplam; quippe cum 490. ad 49. proportionem habeant decuplam. Minor igitur eſt proportio quadrati circunferentiæ ad quadratum diametri, quam decupla.

Circuli quadratura per numeros ſecũdum Arabes falſa.

SIMILI modo reijcienda eſt ratio quadrandi circuli per numeros Alberti Dureri, qui exiſtimat, diuiſa diametro circuli in octo partes æquales, diametrum quadrati circulo æqualis eſſe 10. adeo vt diameter quadrati circulo æqualis ad diametrum circuli proportionem habeat, quam 10. ad 8. quod etiam falſum eſt. Nam cum quadratum diametri 10. ſit 100. *a* duplumque quadrati, cuius diameter eſt 10. & quod circulo diametri 8. dicitur æquale: erit quadratum circulo æquale 50. Sed ex diametro 8. reperitur area circuli maior, quam vera, $50\frac{2}{7}$. vt cap. 7. lib. 4. Num. 4. tradidimus. Vera ergo circuli area maior erit, quam $50\frac{2}{7}$. atque adeo multo maior, quam 50. Eſt igitur quadratum Alberti minus area circuli, non autem æquale.

Quadratura circuli per numeros ex Alberto Durero falſa.
a *ſchol. 47. primi.*

2 IAM vero, vt ad quadraturam circuli per lineas aggrediamur, pudet me refellere illam, quæ imperitis vera eſſe videtur, & quam ſciolus, neſcio quis, Campano Mathematico non indocto affinxit, typiſque mandauit. Eſt autem talis. Linea recta circunferentiæ circuli æqualis (quo pacto autem eiuſmodi linea inueniatur, non docet) ſecetur in 4. partes æquales, ex quibus quadratum conſtituatur. quod ſciolus ille circulo dicit eſſe æquale. quæ res omnino Geometra indigna eſt, & plane ridicula. Si enim quadratum illud circulo eſt Iſoperimetrum; *b* circulus autem omnium figurarum rectilinearum ſibi iſoperimetrarum capaciſſimus eſt, quis non videt, quadratum illud circulo minus eſſe?

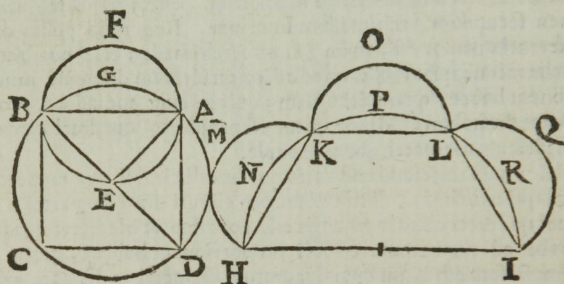
Falſa quadratura circuli p lineas Campano aſcripta.
b 13. *huius.*

3 DE Tetragoniſmo etiam Hippocratis Chij nihil dicerem, niſi in eius demonſtratione acumen ingenij lateret, quamuis metam propoſitam non attingat. Ita enim progreditur. Sit quadrãdus circulus AFBE, cuius diameter AB, ex qua deſcribatur quadratum ABCD, *c* circa quod circulus deſcribatur ABCD, cuius diameter BD, datum circulum AFBE, ſecet in E. Ducta ergo recta AE, *d* erit angulus AEB, in ſemicirculo rectus, *e* ideoque perpendicularis AE, diuidet baſem BD, trianguli Iſoſcelis ABD, bifariam: ac proinde E, centrum erit circuli ABCD. *f* Et quia quadratum diametri BD, duplum eſt quadrati diametri AB; *g* eſtque vt quadratum BD, ad quadratum AB, ita circulus ABCD, ad circulum AFBE: erit quoque circulus circuli duplus; & ſemicirculus BAD, ſemicirculi AFB; ideoque ſemiſſis ſemicirculi BAD: id eſt, quadrans ABE, *h* (eſt enim ABE, quadrans,

Quadratura Hyppocretis Chij.
c 9. *quinti*
d 31. *tertij.*
e *ſchol. 26. primi.*
f *ſchol. 27. primi.*
g 2. *duodec.*

ob

ob angulum rectum in centro E,) ſemicirculo A F B, æqualis. Dempto igitur communi ſegmento AGB, reliquum triangulum AEB, reliquæ Lunulæ AFBGA, æquale erit: ac proinde ſi triangulo fiat quadratum æquale, erit idem hoc quadratum Lunulæ AFBGA, æquale. Atque ita quadrata eſt Lunula AFBGA.



DEINDE ſit recta HI, diametri AB, dupla, circa quam ſemicirculo deſcripto, aptentur in eo tres rectæ ſemidiametro huius circuli, hoc eſt, diametro AB, æquales HK, KL, LI, continentes ſemiſſem hexagoni: *a* cum latus hexagoni ſit ſemidiametro æquale. Deſcriptis autem circa illas tres rectas ſemicirculis HMK, KOL, LQI, qui ſemicirculo AFB, æquales ſunt, propter diametros æquales; *b* quoniam quadratum rectæ H I, quadrati rectæ H K, quadruplum eſt. quod latus lateris ſit duplum: *c* erit quoque circulus diametri HI, circuli diametri H K, quadruplus, & ſemicirculus HKLI, ſemicirculis HMK, KOL, LQI, AFB, æqualis erit: demptiſque ſegmentis communibus HNK, KPL, LRI, reliquum trapezium HKLI, æquale erit tribus Lunulis HNKM, KPLO, LRIQ vna cum ſemicirculo AFB. Si igitur tres illæ Lunulæ quadrentur, vt traditum eſt, & tribus illis quadratis auferatur ex trapezio rectilineum æquale, hoc eſt, *d* inquiratur exceſſus trapezij ſuper tria illa quadrata; erit exceſſus hic rectilinea figura ſemicirculo A F B, æqualis. *e* Si igitur huic figuræ quadratum fiat æquale, erit idem hoc quadratum ſemicirculo AFB, æquale; & quadratum ex illius quadrati diametro deſcriptum toti circulo AFBE, æquale. *f* quod tam quadratum quadrati duplum ſit, quam circulus ſemicirculi. Quadratus ergo circulus eſt.

a coroll. 15. quarti.
b ſchol. 4. ſecundi.
c 2. duodec.
d ſchol. 45. primi.
e 14 ſecũdi
f ſchol. 45. primi.

Fallacia quadraturę Hippocratis.

HAEC eſt quadratura Hyppocratis, acuta quidem, quod Lunulam AGBF, vere quadrauerit, vitioſa autem, quod tres Lunulas HNKM, KPLO, LRIQ, quadratas à ſe eſſe arbitratur, quod verum non eſt. Solum enim ex eius demonſtratione Lunula ea quadratur, cuius inferior peripheria eſt quarta pars peripheriæ alicuius circuli, ſuperior autem ſemicirculus alterius circuli, qualis fuit Lunula AGBF. Nam AGB, quarta pars eſt circunferentiæ ABCD, & AFB, ſemiſſis peripheriæ AFBE. At eiuſmodi non ſunt

tres

tres aliæ Lunulę, quippe cũ earũ peripheriæ inferiores HNK, KPL, LRI, sint sextæ partes totius circũferẽtiæ, quãuis peripheriæ superiores sint semicirculi, vt in illa: quæ nondum sunt quadratæ. Quod si inuenta esset ars quadrandi huiusmodi Lunulas, verissime quoque quadraretur circulus, sine inuentione lineæ rectæ circuli peripheriæ ęqualis. quę sanè res foret præclara.

Quid desideretur in Hippocratis quadratura.

COLLIGITVR ergo ex hac ratione Hippocratis, quadraturam circuli esse possibilem, cum sicut Lunula AGBF, quadrata est, ita quoque Lunulam HNKM, quadrari posse, nihil obstet, quamuis adhuc non sit à quoquam quadrata. Et certe, vt quidam recte affirmat, quod hic ostenditur ab Hippocrate de Lunula AGBF, quæ pars est circuli AFBE, nihil idem prohibet de circulo toto sciri posse, etiam non inuestigata quantitate peripheriæ circuli, cum solum desit ars quadrandi Lunulam HNKM. Immo plus aliquanto dubitationis inferret inuentio quadraturæ Lunulæ AGBF, non cognita, quam circuli.

4 MVLTA quoque hic dicenda essent de falsis aliorum quadraturis, sed quia hæ vel se ipsas produnt, cum in progressu earum facile appareat, aliquid deesse ad constituendum circulo æquale quadratum, cuiusmodi est quadratura Iacobi Falconis Equitis Hispani, qui sine inuentione lineæ rectæ, quæ peripheriæ sit æqualis, circulum quadrare conatur: vel ab alijs iam dudum sunt confutatæ, nimirnm Nicolai Cusani Cardinalis quadratura à Ioanne Regiomontano, ac Ioanne Buteone, & Orontij Finaei Tetragonismus tum ab eodem Buteone, tum à Petro Nonio Lusitano in libello de Erratijs Orontij: quorum vterque varijs uijs lineam rectam circunferentiæ æqualem se inuenisse putauit, nihil omnino dicendum mihi esse statuo, ne frustra tempus terere inutiliter videar. Quamobrem solum hoc loco eam quadraturam subijciam, & plenius aliquanto exponam, quam ad finem lib. 6. Euclid. conscripsi, quæ videlicet per lineam Quadratricem (sic enim eam appellare lubet) lineam rectam inuenit circulari æqualem. Hæc enim via licet ad Geometrice inueniendum punctum quoddam, nonnihil in ea desideretur, accuratior tamen est omnibus alijs, quas hactenus videre potui; ita vt practice à scopo aberrare non possimus. Vt autem clare atque ordinate procedam, absoluam totum negotium paucis quibusdam propositionibus.

Cur de falsis aliorum quadraturis hic nihil dicatur.

Quæ non quadratura per lineas hic explicetur.

I.

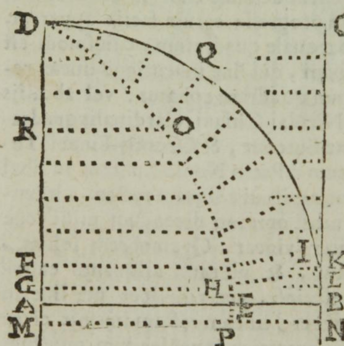
QVADRATRICEM lineam describere.

DINOSTRATVS, & Nicomedes, vt auctor est Pappus Alexandrinus in 4. lib. Mathematicarum collectionum, lineam quandam inflexam excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoque ab officio τετραγωνίζουσα ab eisdem est appellata: à nobis vero eadem de causa quadratrix dicetur. Quamquam autem prædicti auctores conentur huiusmodi lineam describere per duos motus imaginarios duarum rectarum se se intersecantium, qua in re principium (vt philosophi loquuntur) petunt, vt propterea à Pappo reijciatur, tanquam inutilis, & quæ describi non possit: nos tamen

men eam ſine illis motibus Geometrice deli neabimus per inuentionem quot uis punctorum, per quæ duci debeat; quemadmodum in deſcriptionibus co nicarum ſectionum fieri ſolet.

Quadratricis deſcriptio.

5 SIT ergo in quadrato ABCD, deſcriptus Quadrans B D. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam ſemidiameter A D, æquabiliter ferri intelligatur circa centrũ A, quã latus quadrati ſupremũ CD, deorſum verſus æquabiliter quoque: ita vt, quo tẽpore punctũ D, circunferentiam DB, vniformi ſemper motu percurrit, eodẽ recta DC, vniformi etiã motu deſcendẽs ad latus AB, perueniat, ſic tñ, vt perpetuo ſit lateri AB, parallela, & cũ lateribus AD, BC, angulos rectos efficiat, ſecabunt ſe mutuo cõtinue ſemidiameter in circunferentia D B, circumacta, & recta D C, deorſum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem deſcribent: hoc eſt, per quæ linea Quadratrix tranſibit, cuiuſmodi eſt linea inflexa D E. Sed quia duo iſti motus vniformes, quorum vnus per circunferentiam DB, fit, & alter per lineas rectas DA, CB, effici non poſſunt, niſi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, merito à Pappo deſcriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignota adhuc ſit ea proportio, & quæ per hanc lineam inueſtiganda proponatur. Quare nos Geometrice eandem lineam Quadratricem deſcribemus hoc modo. Arcus B D, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus vtrumque A D, B C, in totidem æquales partes. Facillima diuiſio erit, ſi & arcus DB, & vtrũq. latus AD, BC, ſecetur primũ biſariam, deinde vtraque ſemiſſis iterum biſariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quo autem plures extiterint diuiſiones, eo accuratius Quadratrix linea deſcribetur. Nos ad confuſionem vitandam ſecuimus tam arcum DB, quam duo latera AD, BC, in octo tantum partes æquales.



DEINDE bina puncta laterum AD, B C, æqualiter diſtantia à latere DC, vel A B, coniungantur lineis rectis occultis, atque ex centro A, aliæ rectæ occultæ ad ſingula diuiſionum puncta Quadrantis D B, extendantur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas interſecabunt, prima primam, ſecunda ſecundam, &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda eſt, ita vt non ſit ſinuoſa, ſed æquabiliter ſemper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis eſt linea inflexa D E, ſecans ſemidiametrum AB, in E.

6 SED quia punctum E, in latere AB, inueniri Geometrice non poteſt, cum ibi omnis ſectio rectarum ceſſet: vt illud ſine notabili errore, qui ſcilicet ſub ſenſum cadat, reperiamus: vtemur hoc artificio: Infimam partem AF, lateris A D, ſi ſatis exigua non ſit, ſecabimus biſariam continue, donec infima particula ſit perexigua: Eodemque modo infimam partem B I, arcus DB, biſariam continue ſecabimus, donec tot fiant ſubdiuiſiones, quot in parte AF, factæ ſunt, vt particula BK, talis pars ſit totius arcus D B, qua-

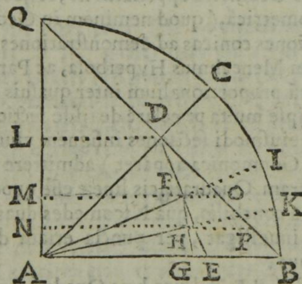
lis

lis pars est A G, totius lateris A D. Particulæ deinde A G, æquales abscindemus BL, BN, AM, ducemusque rectas occultas GL, MN. Ducta vero ex A, centro recta occulta AK, quæ secet GL, in H, puncto, quod accuratissime notetur (adhibito videlicet Lemmate Probl. 1. lib. 2. vt concursus H, quam exquisitissime reperiatur) sumemus ipsi G H, æqualem M P. Si enim Quadratricem vsque ad H, descriptam continuabimus æquabili, atque vniformi extensione vsque ad P, secabit Quadratrix linea latus A B, in E. puncto, quod quæritur. Nam propter paruam rectarum GH, A E, MP, inter se distantiam efficitur, vt ferme sint æquales, licet Geometrice loquendo recta AE, semper maior sit aliquanto, quantumuis parum eæ rectæ inter se distent: sed excessus ille circino deprehendi non potest: adeo vt arcus circuli ex A, per H, P, descriptus verum punctum E, quod ad sensum attinet, indicare videatur. Id quod etiam in circunferentia circuli contingit. Rectæ namque G L, AB, MN, si parum inter se distent, in circulo omnino æquales iudicabuntur, quamuis verè AB, aliquanto maior sit. Itaque si tres illæ rectæ GH, AE, MP, perexiguam habeant distantiam inter se, dubitari non potest, punctum E, in quo quadratrix linea semidiametrum AB, secat, ab eo, quod vere in Quadratrice ibi existit, non differre notabiliter: dummodo puncta H, P, exquisite & summa adhibita diligentia, inuenta sint.

RECTAM porro AD, vocabimus latus Quadratricis: & rectam AE, eiusdem basem: ac denique punctum A, centrum eiusdem. Latus basis & centrum Quadratricis.

7 VERVM puncta Quadratricis prope basem certius inueniemus (sine interfectionibus linearum, quæ ibi valde obliquæ sunt) per lineas perpendiculares: hoc modo. Ducta chorda Quadrantis BQ, secetur in D, bifariam. quod fiet, si ex A ad C, punctum medium Quadrantis recta ducatur. *a* Hæc enim rectam BQ, secabit bifariam. Deinde rectæ AD, sumatur æqualis AE; iunctaque recta DE, secetur bifariam in F. quod etiam fiet, si ex A, ad I, punctũ medium arcus B C, ducatur A I. *b* Hæc enim chordã BC, (si duceretur) secaret bifariam: *c* ac proinde & rectam D E, *d* quæ chordæ BC, est parallela: propterea quod latera A B, A C, in triangulo ABC, proportionaliter secantur in D, E: quippe cum tam AB, AC, quam AE, AD, æquales sint. Rursus rectæ AF, capiatur æqualis AG, iunctaque FG, secetur bifariam in H. quod etiã fiet per rectam AK, ductam ad K, punctum medium arcus B I. Atque hoc modo, si rectæ AH, æqualis accipiatur, & reliqua fiant, vt prius, inuenietur aliud punctum inter H, & G. Et sic deinceps quotuis alia puncta reperiemus viciniora ipsi AB, per lineas perpendiculares, non autem per obliquas sectiones, vt in priori figura. *e* Est enim AD, ad DB, perpendicularis *f* & A F, ad DE, & DH, ad FG, &c.

a schol. 27 tertij.
b schol. 27. tertij.
c schol. 4. sexti.
d 2. sexti.



e 3. tertij.
f schol. 26. primi.

OMNIA vero hæc puncta inuenta D, F, H, &c. esse in Quadratrice, ita osten-

ostendo. Ductis DL, FM, HN, ipsi AB, parallelis secantibus BD, in O, P; a erit vt BD, ad DQ, ita AL, ad LQ, ideoque & AQ, secta erit in L, bifariam. Sectus autem est & arcus BQ, in C, bifariam. Igitur, vt ostensum est, punctum D, est in Quadratrice. Rursus quia DE, secta est bifariam in F, b erit quoque DB, secta bifariam in O, c ideoque erit vt EF, ad FD, ita BO, ad OD, Sed vt BO, ad OD; ita est AM, ad ML, & vt EF, ad FD, ita arcus BI, ad IC. Ergo vt ostendimus, secabunt se se AI, MO, in puncto Quadratricis. Eademque ratio est de alijs punctis hac arte inuentis.

a 2. sexti.
b 2. sexti.
c 2. sexti.

8 ESSE porro lineam hanc inflexam DE, à nobis Geometrice descriptam, eandem, quam Dinostratus, & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant, perspicuum est. Nam si semidiameter AD, in priori figura circa centrum A, per arcum DB, eodem tempore moueatur motu vniformi, quo latus DC, deorsum fertur motu quoque vniformi: fit vt quando semidiameter AD, pertransiuit quamcunque partem arcus DB, tunc latus DC, similem partem laterum DA, CB, percurrerit. Alias aut duo illi motus non essent vniformes, aut non eodem tempore ad latus AB, tam semidiameter AD, quam latus DC, perueniret. Cum ergo rectæ ex centro A, per partes arcus DB, emissæ, & lineæ parallelæ per partes laterum DA, CB, ductæ abscindant semper ex arcu DB, & ex lateribus DA, CB, partes similes, ex constructione: liquido constat, puncta lineæ inflexæ DE, à nobis Geometrice inuenta, à punctis, quę à duobus illis motibus reperirentur, non differre.

HAEC igitur est descriptio lineæ Quadratricis Geometrica quodammodo, quemadmodum & conicarum sectionum descriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, vt ab Appollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cum tamen errori magis sint obnoxiæ, quam nostra descriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum descriptiones sunt necessariæ, quibus in Quadratricis descriptione opus non est. Quare nisi quis totam conicarum sectionum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Appollonius Pergaeus persecutus est, vt propterea Magnus Geometra appellatus sit, reijcere velit, tanquam inutilem, & non Geometricā, (quod neminem in Geometria peritū facturum existimo, cum sectiones conicas ad demonstrationes adhibuerint præstantissimi Geometrę. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vsus est in duarum linearum mediarū proportionalium inter quasuis duas rectas inuentione; Et Archimedes ipse multa præclarè de ijsdē sectionibus conicis demonstrauit: ac denique eiusmodi sectiones insignem vsum habent in re Gnomonica, vt ex nostra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur, hanc descriptionem nostram Quadratricis lineæ esse quodammodo Geometricam. Adde quod linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas proportionales acutissime inuestigat, per puncta etiam describitur, vt lib. 6. propos. 15. diximus.

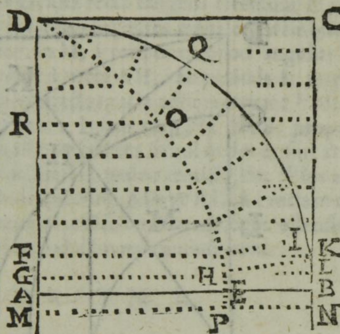
HABET linea hæc Quadratrix multas, & insignes vtilitates, quarum nonnullas ad finem lib. 6. Euclid. demonstrauimus, quas hoc loco repetere superuacaneum est. Solum igitur eius vsum in quadrandis circulis hic exponemus. Qua in re indigemus tantummodo vltimo puncto E, in priori figura, etiamsi nullum aliud Quadratricis punctum inuentum esset quod quidem vltimum punctum licet Geometrice, ac præcise non reperiatur: tamen

si ar-

ſi artificium poſterioris figuræ adhibeatur, non aberrabimus à vero puncto notabiliter, vt ſupra diximus. Quando namque deprehenſum fuerit, vltimam perpendicularem AH, æqualem eſſe præcedenti vltimæ lineæ translatæ AG, ita vt nulla differentia inter illas per circinum diſcernatur: ſumi poterit citra errorem notabilem vltimum illud punctum G, pro puncto extremo Quadratricis: Sin minus, ducendæ erunt aliæ perpendiculares eo artificio, quo AF, AH, ductæ ſunt, donec inter vltimam, & poſtremo loco inuentam rectam in ſemidiametro AB, nullum appareat diſcrimen. cuius quidem rei operatio ipſa optimus erit magiſter.

COROLLARIVM.

9 EX deſcriptione Qudratricis colligitur, ſi ex centro A, ducatur recta vtcunque AQ, ſecans arcum Quadrantis in Q, & Quadratricem in O; ita eſſe arcum BD, ad arcum BQ, vt eſt ſemidiameter AD, ad rectam AR, ducta prius OR, ipſi AB, parallela: *a* ac proinde & ad rectam, quæ ex O, ad AB, demittitur perpendicularis. a 34. *primi.*

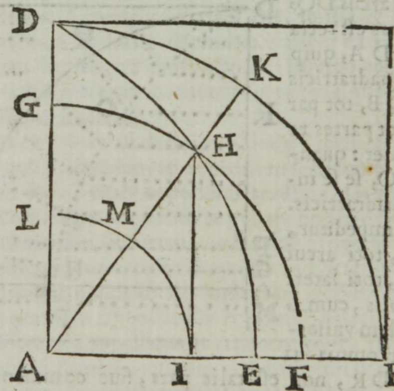


Quia enim eadem pars eſt arcus DQ, totius arcus DB, quæ pars eſt recta DR, totius ſemidiametri DA, quippe cum in deſcriptione Quadratricis arcus DQ, totius arcus DB, tot particulas complectatur, quot partes recta DR, totius DA, continet: quandoquidem rectæ AQ, RO, ſe ſe interſecant in O, puncto Quadratricis. Neque hæc ſimilitudo impeditur, etiamſi tam arcus DQ, toti arcui DB, quam recta DR, toti lateri DA, ſit incommenſurabilis, cum perpetuo Quadratrix eadem vniformitate progrediatur per omnia ſua puncta. Si enim recta DR, non eſt talis pars, ſiue commenſurabilis, ſiue incommenſurabilis totius lateris DA, qualis pars eſt arcus DQ, totius arcus DB; ſi cogitetur talis pars lateris DA, minor quam DR, vel maior, ſecabit parallela ex eius puncto extremo ducta rectam AQ, vel ſupra O, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix deſcribenda eſt; ac proinde ea non tranſibit per O, quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Quia inquam eadē pars eſt arcus DQ, totius arcus DB, quæ pars eſt recta DR, totius lateris DA; *b* erit quoq. reliquus arcus QB, eadē pars totius arcus DB, quæ pars eſt reliqua recta RA, totius lateris DA: q̃ eadem ſit proportio totius DB, ad DQ, quæ totius DA, ad DR: Et permutādo eadē totius DB, ad totā DA, quæ ablati arcus DQ, ad ablatam rectam DR. Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum QB, ita totum latus DA, ad rectam RA, hoc eſt, ad rectam perpendicularem ex O, ad AB, demiſſam, *c* quæ ipſi RA, æqualis eſt. b 19. *quinti* c 34 *primi.*

II.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit; erunt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis quadratricis continuè proportionales.

HAEC est eximia, atque insignis proprietas Quadratricis. Sit Quadrans, & Quadratrix ex eo descripta, vt supra. Dico arcũ BD, semidiametrũ AD, & Quadratricis basem AE, continuè esse proportionales, hoc est, esse BD, ad AD, vt AD, ad AE. Sin minus, sit vt BD, ad AD, ita AD, ad AF,



maiorem ipsa AE, minorẽue: sitq. primũ AF, maior, quã AE. Descripto ex centro A, Quadrante FG, per F, secãte quadratricẽ in H, ducatur per H, semidiameter AHK, demittaturque perpendicularis HI. Quoniam igitur ponitur arcus BD, ad rectã AD, vt AD, hoc est, vt AB, ad AF; estq. vt AB, semidiameter ad semidiametrũ AF, ita arcus BD, ad arcũ FG; (Cũ enim sit, vt lib. 4. c. 7 propos. 1. demonstrauimus, diameter ad diametrũ, vt circũferentia ad circũ-
a 15. quinti ferentiam; *a* erit quoq. semidiameter AB, ad semidiametrum AF, vt eadem
b 15. quinti circunferẽtia ad eãdẽ circũferentiã: *b* ac proinde etiam, vt quarta pars circũ-
c 11. quinti ferẽtiæ ad quartã partẽ circũferẽtiæ, hoc est, vt arcus BD, ad arcũ FG.) *c* Erit
d 9. quinti. quoque arcus BD, ad rectam AD, vt idem arcus BD, ad arcum FG; *d* ac propterea æquales erunt recta AD, & arcus FG. Quia vero ex præcedenti coroll. est, vt arcus BD, ad arcum BK, ita recta AD, ad rectam HI, & vt arcus BD, ad

arcum

arcum BK, ita est arcus FG, ad arcum FH, *a* quod arcus B D, B K, arcubus FG, FH, similes sint; *b* erit quoque recta AD, ad rectam HI, vt arcus FG, ad arcum FH. Cum ergo ostensa sit recta AD, arcui F G, æqualis: *c* erit quoque recta HI, arcui FH, æqualis. quod est absurdum. Est enim recta H I, minor arcu FH, cum ea sit semissis chordæ subtendentis arcum duplum arcus FH: *d* (Nam recta AF, secat eam chordam bifariam; *e* ac proinde & arcum) chorda autem semper suo arcu minor sit. Non ergo est arcus BD, ad semidiametrum AD, vt AD, ad rectam maiorem base AE, Quadratricis.

a *schol.* 33 *sexti*.
b 11. *quinti*
c 14. *quinti*.
d 3. *tertij*.
e *schol.* 27. *tertij*.

SIT deinde, si fieri potest, vt arcus BD, ad AD, ita AD, ad A I, minorem base AE. Descripto igitur ex centro A, per I, Quadrante I L, erigatur ex I, ad AE, perpendicularis I H, secans Quadratricem in H, puncto, per quod semidiameter ducatur AK, secans arcum IL, in M. Ostendemus ergo, vt prius, arcum I L, rectæ A D, æqualem esse. Item ita esse arcum B D, ad arcum BK, hoc est, arcum IL, ad arcum IM, vt est recta AD, ad rectam HI. Quare cum arcus IL, ostensus sit æqualis rectæ AD; *f* erit quoque arcus IM, æqualis rectæ H I. quod est absurdum. Est enim recta H I, maior arcu I M. Nam si ex H, duceretur versus G, alia recta tangens circulum IL, sicut HI, eundem tangit in I, *g* essent hæ duæ tangentes æquales, arcusque inter eas interceptus secaretur bifariam in M, *h* propterea quod angulus ab eis comprehensus bifariam diuideretur à recta AH, *i* ac proinde & angulus in centro A, si ad alterum punctum contactus recta adiungeretur: k ideoque arcus, quibus insistunt, æquales forent. Igitur cum, vt lib. 8. propos. 1. probabimus cum Archimede, duæ illæ tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semissis HI, maior semisse IM, illius arcus. Non est ergo arcus BD, ad semidiametrum AD, vt AD, ad rectam minorem base AE, Quadratricis; Sed neque vt AD, ad maiorem, sicut ostensum est. Igitur vt AD, ad ipsam basem AE. quod demonstrandum erat.

f 14. *quinti*
g 2. *coroll.* 36. *tertij*.
h *schol.* 27. *tertij*.
i 4. *vel* 8 *primi*.
k 26. *tertij*.

COROLLARIVM I.

Rectam circunferentiæ circuli æqualem reperire.

HINC facile rectam reperiemus arcui Quadrantis, ex quo Quadratrix descripta est, ac proinde & semicircunferentiæ, immo & toti circunferentiæ æqualem.

QVONIAM est arcus BD, ad semidiametrum AD, vt A D, ad basem Quadratricis AE; erit conuertendo quoque AE, ad A D, vt A D, ad arcum B D. Si igitur duabus rectis AE, AD, inueniatur tertia proportionalis; *l* erit AD, ad eam tertiam, vt ad arcum B D, cum vtraque proportio sit eadem, quæ A E. *m* Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis B D, æqualis erit: Et si duplicetur, fiet recta æqualis semicircunferentiæ eiusdem circuli: Si vero quadruplicetur, fiet recta toti circunferentiæ æqualis.

l 11. *quinti*.
m 9. *quinti*.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR quoque ex his, si basis Quadratricis AE, statuatur semidiameter alicuius circuli, eius latus A D, quartæ parti circunferentiæ illius circuli esse æquale: Et lineam lateris AD, duplam æqualem esse semicircunferentiæ eiusdem circuli: Et lineam quadruplam lateris toti circunferentiæ esse æqualem.

CVM enim, vt lib. 4. cap. 7. propos. 1. ostendimus, diametri circulorum circunferentijs sint proportionales, *a* erunt quoque semidiametri semicir-
a 15. quinti

cunferentijs, & quadrantibus proportionales. Igitur erit, vt AD, ad AE, hoc est, vt supradicta tertia proportionalis ad AD, ita Quadrans BD, semidiametri AD, ad Quadrantẽ semidiametri AE. Cum ergo tertia illa propor
b 14. quinti tionalis æqualis sit ostensa Quadranti BD; *b* erit quoque recta AD, quadranti semidiametri AE, æqualis. Dupla ergo linea ipsius A D, semicircunferẽtiæ circuli, cuius semidiameter AE; & quadrupla toti circunferentiæ erit æqualis.

CORO-

COROLLARIVM III.

EX his quoque infertur, si duę rectę N,O,in præcedenti figura eandem proportionem habeant, quam A D, A E, minor autem O, statuatur semidiameter circuli alicuius, maiorem N, æqualem esse arcui Quadrantis illius circuli.

CVM enim sit AD,ad AE,vt N,ad O; erit permutando A D, ad N,vt AE,ad O. Vt autem AE, ad O,ita est Quadrans semidiametri A E, ad Quadrantē semidiametri O,vt lib. 4.cap. 7. propos. 1. demonstrauimus. *a* Igitur erit quoque AD,ad N, vt Quadrans semidiametri A E, ad Quadrantem semidiametri O. Cum ergo AD,æqualis sit ostensa Quadranti semidiametri A E; *b* erit quoque N, æqualis Quadranti semidiametri O. quod est propositum.

a 11.*quinti*

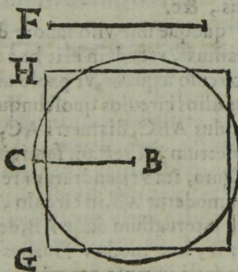
b 14.*quinti*

III.

DATO circulo quadratum æquale constituere.

Quadratũ circulo æquale exhibere.

SIT quadrandus circulus ad interuallum semidiametri BC, descriptus. Tribus rectis AE,basi Quadratricis; A D, lateri eiusdem præcedentis figuræ,& rectæ BC, inuenta quarta proportionali F; erit ex coroll. 3. antecedenti recta F, quadrāti circuli dati æqualis, atque eius dupla semicircunferentiæ æqualis erit. Inuenta autem inter semidiametrum BC,& duplam ipsius F, media proportionali G H: Dico quadratum ex G H, descriptum æquale esse circulo ad interuallum B C, descripto. *c* Quoniam enim rectangulum sub B C, semidiametro, & sub semicircunferentia circuli,id est,sub dupla rectæ F,inuentæ,æquale est circulo: *d* Prædicto autē rectangulo æquale est quadratũ lateris GH; erit quoque quadratum lateris G H, circulo semidiametri B C, æquale.



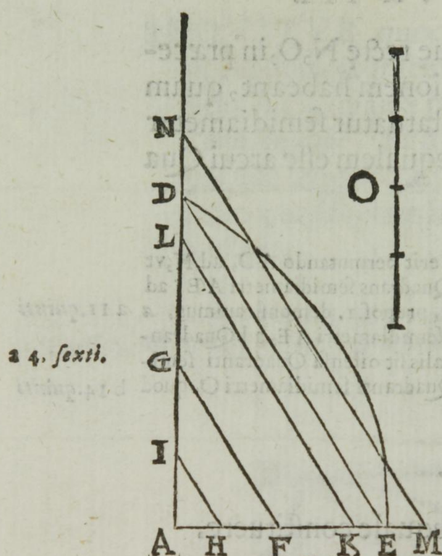
c 4. *Isoperimetrorum*.

d 17. *sexti*.

Facilis inuētio rectæ æqualis circũferentiæ.

VERVM vt expedite linea recta inueniatur æqualis quartæ parti circumferentiæ dati circuli, atque idcirco & semicircunferentiæ, vel toti circunferentiæ, construenda erit figura eiusmodi. Fiat angulus rectus DAE, rectaque AD,æqualis sit semidiametro Quadrantis, ex quo Quadratrix de-

scripta



scripta est; & A E, basi eiusdem Quadratricis æqualis. Vel certe ex centro A, noua Quadratrix describatur DE, cuius latus AD, & basis A E. Ducta namque recta DE, constructa erit figura aptissima ad rectam circumferentiæ dati circuli æqualem inueniendam. Si enim circuli quadrandi semidiametro abscindatur æqualis A F, ducaturque FG, ipsi D E, parallela; erit ex coroll. 3. antecedenti AG, æqualis quartæ parti circunferentiæ dati circuli, cuius semidiameter nimirum est AF, (quemadmodum A D, quartæ parti circunferentiæ circuli semidiametri A E, æqualis est, vt ex coroll. 2. præcedenti constat) *a* propterea quod A F, A G, eandem habent proportionem, quam A E, A D. Eadem ratione, ductis HI, KL, MN, eidem DE, parallelis, erunt AI, AL, AN, æquales quartis partibus circunferentiarum circulorum ex semidiametris A H, A K, AM, descriptorum. Hæ autem rectæ duplicatæ semicircunferentijs æquales erunt, &c. Atque hac arte inuenietur recta æqualis quartæ parti circunferentiæ cuiusuis circuli, si eius semidiametro ex recta A E, æqualem lineam abscindemus, ab eiusque extremo rectæ D E, parallelam ducemus, &c.

a 4. sexti.

Facilis inuentio quadrati circulo æqualis.

VT quoque sine vllo labore dato cuicunque circulo quadratum æquale exhibeamus, vtendum erit hoc artificio. Inuento semel latere quadrati alicui circulo æqualis, vt paulo ante docuimus, construemus figuram ad quadrandos alios circulos quoscunque accommodatissimam, hoc modo. Detur circulus ABC, diametri AC, sitque AB, media proportionalis inter semidiametrum, & rectam semicircunferentiæ æqualem inuentam ex præcedenti figura, ita vt quadratum rectæ A B, circulo diametri A C, sit æquale: *b* accommodetur AB, in circulo, quæ certius applicabitur, si forte circinus ex A, ad interuallum datæ AB, descriptus nimis oblique peripheriam ABC, secet in B, hoc modo. Duabus rectis, nimirum diametro A C, & lateri AB, quadrati inuento reperiatur tertia proportionalis A D. Perpenpendicularis namque DB, cadet in punctum B, in quod latus inuentum duci debet: *c* propterea quod tres rectæ A C, AB, AD, sunt continue proportionales: quemadmodum recta AC, latus quadrati inuentum, & AD, continuam seruant proportionem, ex constructione. Liquet autem inter A C, A D, vnam tantum posse esse mediam proportionalem. Hac figura extructa, dicto citius quemcunque circulum quadrabimus. Si namque diametro dati circuli rectam æqualem abscindemus AF, circa quam semicirculus describatur, resecabit is ex recta AB, latus AE, cuius quadratum circulo da-

b 1. quinti.

c coroll. 8. sexti.

est æquale. Quia enim angulus externus AEF, interno A B C, æqualis est: *a* quod vterque in semicirculo rectus sit; *b* erunt EF, BC, parallelæ; ideoque triangula AEF, ABC, æquiangula, *c* Igitur erit CA, ad AB, vt FA, ad AE; Et permutando CA, ad F A, vt A B, ad A E. *d* Ideoque erit quoque quadratum ex AC, ad quadratum ex AF: *e* hoc est, vt circulus diametri A C, ad circulum diametri AF, vt quadratum ex AB, ad quadratum ex A E. Est autem circulus diametri AC, quadrato ex A B, per constructionem, æquale. *f* Igitur & circulus diametri AF, quadrato ex AE, æquale erit. Ita quoque quadratum rectæ AG, circulo diametri AH, erit æquale. Et sic de cæteris.

a 31. *tertij.*
b 28 *primi.*
c 4. *sexti.*
d 22. *sexti.*
e 2. *duodec.*
f 14. *quinti.*

IAM vero quoniam lib. 4. cap. 6. propos. 3. ex Archimede demonstrauimus, quadratum diametri ad circulum habere ferme proportionem, quam 14. ad 11. si quis volet secundum hanc proportionem reperire quadratum circulo æquale; diuidenda erit recta AC, in 14. partes æquales, & ex vndecima parte D, (ita vt A D, contineat partes 11. & DC, 3.) excitanda perpendicularis DB, vsque ad circunferentiam circa AC, descriptam. Recta enim ducta AB, latus erit quadrati circulo diametri AC, æqualis. *g* Cum enim tres rectæ AC, A B, A D, sint continue proportionales; *h* erit quadratum ex A C, ad quadratum ex A B, vt A C, ad A D, videlicet vt 14. ad 11. Cum ergo etiam sit, vt diximus, quadratum diametri ad circulum, vt 14. ad 11. ferme: *i* erit quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, vt ad circulum diametri A C. k Igitur quadratum ex AB, circulo diametri A C, æquale erit. Quod si secundum varias diametros describantur circuli per A, transeuntes, abscindent quoque ij circuli ex recta AB, latera quadratorum illis circulis æqualium. Habes ergo viam facilem inueniendi quadratum circulo dato æquale, siue quadratricem nostram adhibeas, siue demonstrata ab Archimede sequaris.

Facilis inuentio quadrati circulo æqualis ex Archimede

g *coroll.* 2. *sexti.*
h *coroll.* 20. *sexti.*
i 11. *quinti*
k 9. *quinti.*

IIII.

DATO quadrato circulum æqualem describere.

SIT datum quadratum lateris AE, cui circulus æqualis est describendus. In proxima figura ex recta A B, abscindatur recta A E, dato lateri quadrati æqualis: Et ex E, ducatur ad AB, perpendicularis EF, secans AC, in F. Erit-

que circulus diametri A F, quadrato lateris A E, æqualis, vt ex proxime demonſtratis liquet.

COROLLARIVM.

EX his, quæ demonſtrata ſunt, conſtruemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem. Et contra cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem conſtituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque ſimilis ſit. Nam ſi datæ figuræ rectilineæ *a* deſcribamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem per hanc 4. propoſ. conſtituamus; erit idē hic circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.

a 14. ſecūdi

RVRSVS ſi per propoſitionem 3. dato circulo quadratum æquale conſtruamus, huic autem quadrato *b* conſtituamus figuram rectilineam æqualem, & ſimilem alteri datæ figuræ rectilineæ; erit eadem hæc figura rectilinea conſtituta, dato circulo æqualis. quod eſt propoſitum.

b 25. ſexti.

V.

DATAE rectæ lineæ circunferentiam circuli reperire æqualem.

IN ſecunda figura propoſ. 3. ſit rectæ O, exhibenda æqualis circunferentia. Eius quartæ parti capiatur in latere Quadratricis A D, recta æqualis AI, ac per I, ipſi DE, agatur parallela IH. Eritq. circūferentia circuli ex diametro AH, deſcripti ęqualis datæ rectæ O, propterea quod quarta pars eius circunferentiæ æqualis eſt rectæ AI, vt oſtenſum eſt; ac proinde tota circunferentia æqualis erit quadruplæ rectæ A I, hoc eſt, æqualis rectæ O, cuius quarta pars poſita eſt recta AI. Datæ ergo rectæ circunferentiam æqualem reperimus. Quod faciendum erat.

FINIS LIBRI SEPTIMI.

GEO-

GEOMETRIAE PRACTICAE

LIBER OCTAVVS.



Varia Theoremata, ac problemata Geometrica demonstrans.



VT extremam manum Geometriæ huic nostræ practicæ imponamus, concludemus eam varijs nonnullis Theorematibus, atque problematibus Geometricis, tum collectis ex Geometris alijs, tum proprio, vt aiunt, Marte excogitatis, ac demonstratis. Qua in re exemplum illustre habemus in Pappo Alexandrino, qui octo totos libros conscripsit de Mathematicis collectionibus. Neque vero hoc præter institutum nostrum existimare quis debet: cum per eiusmodi demonstrationes Geometricas studioso Lectori via multiplex aperiatur ad inuestigandas similes speculationes in rebus Geometricis: quippe cum in ijs ad exercendum ingenium amplissimum campum habeat. Est & alia causa, quæ me ad hunc librum octauum conscribendum permouit, ne videlicet tot Theoremata, ac problemata non sine magno labore peruestigata pereant, cum ad nullam Geome-

triæ partem magis proprie pertineant, quam ad hanc Geometriam practicam: præsertim quod pleraque eorum praxes Geometricas pertractent. Adde quod non pauci viri docti & graues ad hunc librum perscribendum auctores mihi, atque suasores fuerunt.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

FIGVRA regularis circulo circumscripta maiorem ambitum habet, quam circulus.

HAEC est prima propositio Archimedis in lib. 1, de sphæra & Cylindro: quam demonstrat, hoc assumpto principio.

Si duæ lineæ in plano eosdem habeant terminos, & in easdem partes cauæ sint, comprehendens comprehensa maior est. quod quidem principium esse verum, ex eo euidenter intelligi potest, quod ex eo non solum Archimedes, verum etiam plurimi alij Geometræ tum veteres, tum recentiores, innumera propemodum, atque admiranda Theoremata, problemataque demonstrarint, quæ vt verissima, ab omnibus recepta sunt; neque vnquam ex illo absurdi aliquid consecutum est, aut contra id quisquam hactenus à duobus ferme millibus annorum, noui quid commentus est. Hoc ergo posito principio, facilis est demonstratio Archimedis. Sit namque figura regularis A B C D E F, descripta circa circulum, cuius centrum N, tangens eum in punctis G, H, I, K, L, M. Quoniam igitur per præmissum principium rectæ AG, AM, maiores sunt arcu GM: Item BG, BH, maiores arcu GH, & sic de reliquis; erunt omnes rectæ simul conficientes totum ambitũ figuræ, maiores omnibus arcubus simul conficientibus totam circuli peripheriam. quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM

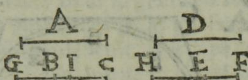
CARDANVS in libro quinto de proportionibus propos. 201. conatur demonstrare, duas rectas circulum contingentes, cuiusmodi sunt AG, AM, maiores esse arcu intercepto GM, (quod Archimedes ex suo assumpto principio deduxit) præmissis tribus Lemmatibus, & vno principio, quorum primum est hoc.

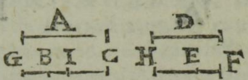
LEMMA I.

SI fuerint quatuor quantitates, & minor sit excessus inter

inter primam & ſecundam, quam inter tertiam & quartam; ſitque prima non minor, quam tertia, maior vero quam ſecunda, Item tertia maior quam quarta: Erit minor proportio primæ ad ſecundam, quam tertiæ ad quartam.

SINT quatuor quantitates A,BC,D,EF; ſitque GB, exceſſus inter primam A, & ſecundam BC, minor exceſſu HE, inter tertiam D, & quartam EF; Item prima A, non ſit minor, quam tertia D: maior vero quam ſecunda BC: Ac denique tertia D; maior ſit quam quarta EF; Dico minorem eſſe proportionem primæ A, ad ſecundam BC, quam tertiæ D, ad quartam EF. Cum enim A, non minor ſit, quam D: at GB, minor, quam HE, *a* erit maior proportio A, ad GB, quam ad HE: Eſt autem A, (ſi eſt æqualis ipſi D) ad HE, vt D, ad HE; vel maior eſt proportio A, (ſi maior eſt, quam D,) ad HE. quam D, ad HE. Igitur maior erit proportio A, ad GB, quam D, ad HE. Si igitur fiat vt D, ad HE, ita A, ad GI, habebit quoque A, ad GB, maiorem proportionem, quam ad GI; *b* ac proinde erit GI, maior quam GB; ideoque IC, minor, quam BC. *c* Maior ergo erit proportio A, ad IC, quam ad BC. Et quoniam GC, ipſi A, æqualis, eſt ad GI, vt HF, ipſi D, æqualis, ad HE; Erit quoque per conuerſionem rationis GC, hoc eſt, A, ad IC, vt HF, hoc eſt, vt D, & ad EF. Cum ergo oſtenſum ſit, maiorem eſſe proportionem A, ad IC, quam ad BC; erit quoque maior proportio D, ad EF, quam A, ad BC, hoc eſt, A, ad BC, minorem proportionẽ habebit, quam D, ad EF. quod eſt propoſitum.





a 8. *quinti*
b 10. *quinti*
c 8. *quinti*

LEMMA II.

SI circuli arcum duæ rectæ tangant in vno puncto coeuntes; & in eodem arcu aptentur quotlibet rectæ æquales diuidentes ipſum in partes totidem æquales. Erunt duæ illæ tangentes omnibus hiſce chordis ſimul maiores,

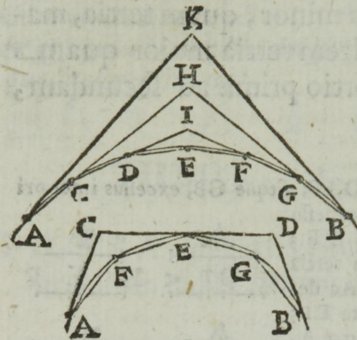
TANGANT arcum AB, duæ rectæ AK, BK, coeuntes in K, aptenturque quotlibet rectæ in eo æquales AC, CD, DE, EF, FG, GB, diuidentes arcum in totidem partes æquales. Dico rectas AK, BK, ſimul maiores eſſe omnibus illis rectis ſubtenſis ſimul. Productis enim rectis AC, BG, donec coeant in H; Item productis rectis CD, GF, donec concurrant in I,

& ſic

a 21. primi. & sic deinceps, si plures rectæ fuerint: a Erunt rectæ D I, F I, maiores rectis DE, FE. Additis ergo æqualibus DC, FG; erunt etiam rectæ CI, GI; maiores rectis CD, DE, EF, FG, simul. b Sed C H, G H, maiores sunt rectis CI, G I. Igitur multo maiores erunt CH, GH, rectis C D, D E, E F, F G; additisque æqualibus AC, BG, maiores erunt A H, B H, simul quam AC, CD, DE, EF, F G, G B, simul. c Sunt autem & A K, B K, maiores, quam A H, B H. Igitur multo maiores erunt A K, BK, simul, quam AC, CD, D E, E F, FG, GB, simul. quod erat demonstrandum.

b 21. primi.

c 21. primi.



LEMMA III.

SI circuli arcum tres rectæ tangant in duobus punctis coeuntes, ita vt contactuũ punctum medium diuidat arcum bifariam: In eodem autem arcu accomodentur quotlibet rectæ numero pares, & inter se æquales, Erunt tres illæ tangentes omnibus his simul sumptis maiores.

IN antecedente figura arcum AB, tangant tres rectæ A C, C D, D B, conuenientes in duobus punctis C, D, secantes ipsum bifariam in E. Accommodenturque in eodem arcu quotlibet rectæ æquales, & numero pares A F, F E, E G, G B. Dico tres AC, C D, D B, simul sumptas esse maiores rectis AF, FE, EG, GB, simul sumptis. Quoniam enim per Lemma præcedens AC, CE, maiores sunt rectis AF, FE: Item BD, DE, maiores rectis BG, G E; Erunt quoque A C, C D, D B, simul maiores rectis AF, FE, EG, GB, simul. quod ostendendum erat.

Principium Cardani.

HAEC ergo sunt tria lemmata, quæ Cardanus præmittit: quibus adiungit hoc postulatum, siue principium. Cum arcus quilibet maior sit quotcunque rectis in eo subtensis simul sumptis, & quo plures subtensæ fuerint, eo minori excessu arcus illas superet: fieri potest, vt tot subtensæ duci possint, ita vt excessus, quo arcus illas superet, minor sit quauis recta proposita. Hoc principium videtur esse manifestum, cum tam paruus arcus possit accipi, vt eius chorda illi fere æqualis sit; adeo vt sensus nullam percipere possit inter arcum, & chordam differentiam. A posteriori tamen illud con

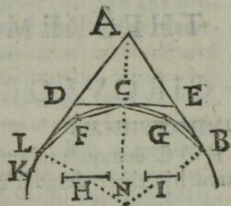
firmari

firmari poteſt per numeros. Poſita enim proportione circunferentiæ ad dia metrum ferme 3141 5926. ad 10000000. vt lib.4. cap.7. Num.5. ex probatis auctoribus retulimus, deprehendemus, ſi arcus propoſitus continue ſecetur bifariã per rectas ſubtenſas, ſemper à præcedenti exceſſu plus dimidio auferri; *a* ac proinde tandem relinqui exceſſum omni quantitate minorem. Nam arcus verbi gratia graduum 4. erit 698131. & eius chorda ex tabula ſinuum eruta 697990. ita vt arcus chordam ſuperet hoc numero 141. Summa deinde duarum chordarum graduum 2. erit 698096. quæ ſuperatur ab eodem arcu grad. 4. numero hoc 35. qui minor eſt ſemiſſe præcedentis exceſſus 141. ac proinde plus dimidio ab eo ablatum erit. Rurſus ſumma quatuor chordarum gradus 1. erit 698120. quam idem arcus 4. graduum ſuperat hoc numero 11. qui etiam minor eſt ſemiſſe proximi exceſſus 35. Item ſumma 8. chordarum, quarum quælibet 30. minutis debetur, erit 698128. exceſſus autem inter eã, & eundem arcum 4. graduum, numerus 3. qui minor quoque eſt, quam ſemiſſis proximi exceſſus 11. & ſic deinceps. Scio confirmationem hanc propoſiti principij non eſſe demonſtratiuam, cum proportio circunferentiæ ad diametrum colligatur ex eo, quod demonſtrare conamur, nimirum figuram circulo circumſcriptam habere maiorem ambitum ambitu circuli: eam tamen probabilem eſſe, nemo dubitabit, cum vix credibile videatur, (ſi illa proportio longe à vero abeſſet) exceſſus illos paulatim ita minui, vt ſemper minor numerus ſemiſſe præcedentis exceſſus relinquatur; adeo vt tandem nulla fere differentia inter arcum, & ſummam chordarum ſubtenſarum reperiatur.

a 1. decimi.

Demonſtratio Cardani.

HIS præmiſſis, tangant duæ rectæ AB, AL, arcum BCL. Dico eas eſſe maiores arcu. Sint enim, ſi fieri poteſt, non maiores, ac proinde arcus BCL, ſit vel æqualis rectis AB, AL, vel maior. Secto ergo arcu bifariam in C, ducatur DCE, tangens arcum in C. Diuiſis quoq. arcubus CB, CL, bifariam in G, F, iungantur rectæ BG, GC, CF, FL. *b* Et quia AD, AE, maiores ſunt quam DE; additis DL, EB, communibus, quæ æquales ſunt; (Nam iunctis rectis NA, NB, NL, ex centro N; quoniã tria latera trianguli ABN, tribus lateribus trianguli ALN, æqualia ſunt; *c* erunt tam anguli ad N, quam ad A, æquales; *d* ideoque arcus CB, CL, æquales erunt; ac proinde recta NA, per contactum C, tranſibit, *e* eritque ad DE, perpendicularis. Cum igitur duo anguli DAC, DCA, duobus angulis EAC, ECA, æquales ſint, & latus adiacens AC, commune; *f* erunt latera AD, AE, æqualia: proptereaque & reliquæ DL, EB, æquales erunt, cum tangentes AL, AB, ęquales ſint) erũt AL, AB, maiores tribus LD, DE, EB. Sit ergo exceſſus H. Rurſus quia arcus BL, maior eſt rectis BG, GC, CF, FL, ſit exceſſus I, qui minor ſit exceſſu H. Si namque minor non eſt, diuidemus arcus LF, FC, CG, GB, bifariam, & hos rurſus bifariam, &c. connectemusq. rectas, donec fiat exceſſus minor exceſſu H, per ſuperius principium Cardani. Quoniam igitur arcus LB, prima quantitas ſuperat ſecundam, videlicet rectas LF, FC, CG, GB, ſimul exceſſu I; Et tertia quantitas, nimirum ſumma rectarum AL, AB, ſuperat



b 20. primi.
c 8 primi.
d 26. tertij.
e 18. tertij.
f 26. primi.

rat quartam, id est, summam rectarum LD, DE, EB, excessu H: Estque excessus I, minor excessu H; Et prima quantitas, hoc est, arcus BL, ponitur non minor, quam tertia ex AB, AL conflata; item tertia AB, AL, maior, quam quarta LD, DE, EB: erit per 1. Lemma, minor proportio arcus B L, primæ quantitatis ad secundam LF, FC, CG, GB, quam tertiæ quantitatis AL, AB, ad quartam LD, DE, EB; *a* Et permutando minor erit proportio arcus L B, ad AL, AB, simul, quam rectarum LF, FC, CG, GB, simul ad rectas LD, DE, EB, simul. Sit ergo vt composita ex LF, FC, CG, GB, ad compositam ex LD, DE. EB, ita arcus BK, ad rectas AL, AB, simul: Eritque propterea minor etiam proportio arcus BL, ad AL, AB, simul, quam arcus BL, ad arcum BK; *b* ideoque arcus BK, maior erit arcu B L. Cum ergo eadem sit proportio rectarum LF, FC, CG, GB, simul ad LD, DE, EB, simul, quæ arcus BK, ad AL, AB, simul: sintque per 3. Lemma, rectæ LF, FC, CG, GB, simul minores, quam LD, DE, EB, simul; erit quoque arcus BK, minor, quam AL, AB, simul. Multo ergo minor erit arcus B L, duabus A L, AB, simul. Quare rectæ tangentes AL, AB, simul maiores sunt arcu B L, quod erat ostendendum.

a schol. 27. quinti.
b 10. quin.

EST autem hæc demonstratio Cardani admirabilis, & non absimilis illi, qua Euclid. in propos. 12. lib. 9. vtitur. In vtraque enim infertur conclusio demonstratione affirmatiua ex eius opposito, vt patet.

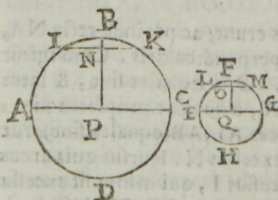
ATTVLI hanc demonstrationem Cardani, non quòd vere Geometrica sit, nisi principium illud suum admittatur, sed quod ingeniosa sit & acuta. Sine tamen hac demonstratione concedendum erit, ambitum figuræ circumscriptæ esse maiorem peripheria circuli propter demonstrationem Archimedis, cum nihil vmquam in contrarium à quoquam sit allatum, vt supra diximus.

THEOREMA 2. PROPOSITIO 2.

CIRCVLORVM diametri inter se sunt, vt circumferentiæ.

HOC demonstrauimus nos in lib. 4. cap. 7. num. 3. propos. 1. idem autem hic aliter demonstrabimus ex Pappo, hoc modo. Sint duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri A C, E G. Dico esse circunferentiam ad circunferentiam, vt est diameter ad diametrũ *c*. Quoniam enim est circulus ad circulum, vt quadratum diametri ad quadratum diametri. *d* Vt autem circulus A B C D, ad circulum EFGH, ita est quadruplum circuli ad quadruplum circuli. Igitur erit quoque quadruplum circuli ABCD, ad quadruplum circuli EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri E G. Sed rectangulum sub diametro AC, & recta, quæ circunferentiæ ABCD, sit æqualis, comprehensum, quadruplum est circuli A B C D; & rectangulum sub diametro E G, & circumfe-

c 2. duodec.
d 15. quin.



cumferentia EFGH, quadruplum circuli EFGH, ex coroll. propoſ. 2. cap. 5. Num. 1. lib. 5. Igitur erit rectangulum ſub diametro AC, & circunferentia ABCD, contentum, ad rectangulum ſub diametro EG, & circumferentia EFGH, comprehenſum, vt quadratum ex AC, ad quadratum ex EG; Et permutando erit rectangulum ſub diametro AC, & circunferentia A B C D, ad quadratum ex AC, vt rectangulum ſub diametro EG, & circunferentia EFGH, ad quadratum ex E G. *a* Eſt autem rectangulum ſub AC, & recta, quæ circunferentiæ ABCD, ſit æqualis, ad quadratum ex A C, vt recta circunferentiæ æqualis ad A C: propterea quod rectangulum, & quadratum eandem habent altitudinem A C. Eodemque modo eſt rectangulum ſub E G, & recta, quæ circunferentiæ EFGH, ſit æqualis, ad quadratum ex EG, vt recta circunferentiæ æqualis ad EG. Igitur erit, vt circunferentia ABCD, ad diametrum A C, ita circunferentia EFGH, ad diametrum EG: Et permutando circunferentia ad circunferentiã, vt diameter ad diametrum, quod demonſtrandum erat. a 1. ſexti.

SCHOLIVM.

SVNT qui putent, fruſtra à Pappo hoc theorema demonſtrari, cum videatur eſſe per ſe notum, ita eſſe circunferentiam cuiuſuis circuli ad ſuam diametrum, vt eſt circunferentia alterius circuli ad ſuam diametrum: ac proinde permutando eſſe circunferentiam ad circunferentiam, vt eſt diameter ad diametrum. Qua in re mirum in modum decipiuntur. Cum enim à Ptolemaeo (quod & à nobis propoſ. 10. Sinuum factũ eſt) demonſtretur, maiorẽ eſſe proportionẽ maioris arcus ad minorem eiuſdem circuli, quam chordæ ad chordam, (quod etiam de arcubus, & chordis in circulis inæqualibus verum eſt, niſi arcus illi ſimiles ſint, vt in ſequenti Theoremate oſtendemus) quis ſine demonſtratione concederet, eandem eſſe proportionem circunferentiæ ad circunferentiam, quæ eſt diametri ad diametrũ? Quod ſi demonſtratũ eſſet, ita eſſe arcum cuiuſuis circuli ad ſimilẽ arcũ alterius circuli, vt eſt chorda ad chordã, tũ demum conſtaret, ita eſſe circunferentiã ad circunferentiam, *b* ac proinde & ſemicircunferentiã ad ſemicircunferentiã, vt eſt diameter ad diametrum: propterea quod arcus ſemicirculorum ſimiles ſunt, quorum chordæ ſunt diametri. Verum hoc demonſtrari non poteſt, niſi prius demonſtretur, ita eſſe circunferentiã ad circunferentiã, vt eſt diameter ad diametrum, vt in Theoremate ſequenti conſtabit. Merito ergo, & non ſine cauſa, theorema præcedens à Pappo fuit demonſtratum. b 15. quinti

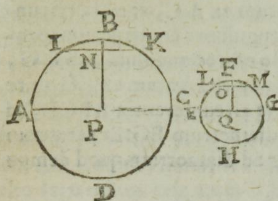
THEOR. 3. PROPOS. 3.

ARCVS cuiuſuis circuli ad arcum ſimilem alterius circuli eandem habet proportionem, quam chorda ad chordam. Et contra arcus eandem habentes proportionem, quam chordæ, ſimiles ſunt.

IN figura præcedentis propoſ. ducantur ad diametros perpendiculares

PB, QF, ex centris P,Q, diuidentes ſemicirculos in binos quadrantes:ſintque arcus BI, BK, æquales, quibus ſimiles capiantur FL, FM; adeo vt toti arcus IK, LM, ſimiles ſint, quorum chordæ IK, LM, biſariam ſectæ ſint à ſemidiametris in N, O. Dico eandem eſſe proportionem arcus IBK, ad arcum LFM, quæ eſt chordæ IK, ad chordam LM, &c. *a* Quoniam enim eſt circumferentia ABD, ad circunferentiam EFH, *b* hoc eſt, quadrans AB, ad quadrantem EF, vt diameter AC, ad diametrum EG; hoc eſt, vt ſemidiameter PB, ad ſemidiametrum QF. *c* Eſt autem, vt quadrans AB, ad quadrantem EF, ita arcus IB, ad arcum LF, cum ſimiles ponantur. Igitur erit quoque arcus IB, ad arcum LF, vt ſemidiameter PB, ad ſemidiametrum QF. Cum ergo ex Lemmate propoſ. 1. lib. 1. noſtræ Gnomonicæ, vel ex Lemmate 5. lib. 1. noſtri Aſtrolabij, ita ſe habeat PB, ſinus totus ad QF, ſinum totum, quemadmodum ſinus IN, ad ſinum LO: erit quoque arcus IB, ad arcum LF, vt ſinus IN, ad ſinum LO, *d* id eſt, duplus arcus IK, ad duplum arcum LM, vt chorda IK, ipſius IN, dupla, ad chordam LM, ipſius LO, duplam. quod eſt propoſitum.

a 2. huius.
b 15. quinti
c 15. quinti
d 15. quinti



VERVM ſit iam arcus IK, ad arcum LM, vt chorda IK, ad chordam LM. Dico arcus ſimiles eſſe. Facta enim eadem conſtructione, *e* erit quoque arcus IB, ad arcum LF, ſemiſſis ad ſemiſſem, vt IN, ad LO, ſemiſſis ad ſemiſſem. *f* Vt autem IB, ad LF, ita eſt quadrans AB, ad quadrantem EF; *g* Et vt quadrans ad quadrantem, ita eſt ſemidiameter PB, ad ſemidiametrum QF. Igitur erit quoque ſinus IN, ad ſinum LO, vt ſinus totus PB, ad ſinum totum QF: Atque idcirco ex Lemmate propoſ. 1. lib. 1 noſtræ Gnomonicæ, vel ex Lemmate 5. lib. 1. noſtri Aſtrolabij, arcus IB, LF, ſimiles erunt; ac proinde & eorum dupli IBK, LFM, ſimiles erunt. quod erat demonſtrandum.

e 15. quinti
f ſchol. 33. ſexti.
g 2. huius.

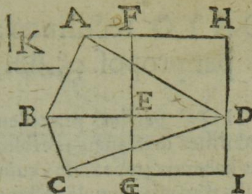
COROLLARIVM

SEQVITVR hinc, ſi arcus IBK, LFM, non ſint ſimiles, eos non habere eandem cum chordis proportionem. Si namque eandem haberent, ipſi ſimiles eſſent, vt in ſecunda parte huius propoſ. fuit oſtenſum, quod eſt abſurdum, cum ponantur non ſimiles.

PROBL. 1. PROPOS. 4.

DATO quadrilatero æquale parallelogrammum in dato angulo facilius, quam per propoſ. 45. lib. 1. Euclid. conſtituere.

SIT quadrilaterum quodcunque A B C D, & datus angulus K. Ducta diametro B D, eaq. diuisa bifariam in E, ducatur per E, recta F G, faciens in E, angulum FED, dato angulo K, æqualem. Deinde ducta per D, ipsi F G, parallela HI, & per A, C, duabus AH, CI, ipsi BD, parallelis secantibus FG, HI, in F, H, G, I, constitutum erit parallelogrammum F I, in dato angulo G, *a* qui æqualis est angulo, FED, internus externo; hoc est, angulo K. Dico idem parallelogrammum quadrilatero dato AB C D, æquale esse. *b* Quia enim parallelogrammum FD, triangulo ABD, & parallelogrammum EI, triangulo CBD, æquale est; erit totum parallelogrammum FI, toti quadrilatero ABCD, æquale, quod est propositum.



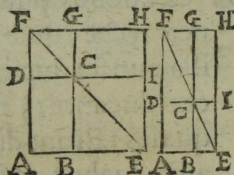
a 29. *primi.*

b *schol.* 41. *primi.*

PROBL. 2. PROPOS. 5.

DATO rectangulo supra datam rectam æquale rectangulum facilius, quam per propos. 45. lib. 1. Euclid. constituere.

SIT rectangulum A B C D, cui supra datam rectam constituendum est rectangulum æquale. Producto quolibet latere, nimirum A B, capiatur BE, æqualis datæ rectæ, siue ea sit maior latere A B, siue minor: atque ex E, per C, recta ducatur secans A D, productam in F, compleaturque rectangulum AH, & rectæ BC, DC, producantur vsque ad G, I. *c* Erit igitur complementum CH, complemento C A, æquale. Cum igitur latus C I, sit lateri B E, id est, datæ rectæ æquale: factum erit, quod proponitur.



c 43 *primi.*

A L I T E R.

Datæ rectæ BE, & duobus lateribus AB, BC, dati rectanguli, *d* inueniatur quarta proportionalis CG. *e* Nam rectangulum sub BE, prima, & C G, quarta comprehensum, rectangulum videlicet C H, æquale erit dato rectangulo AC, sub secunda AB, & tertia BC, comnprehenso. quod est propositum.

d 17 *sexti.*

e 16. *sexti.*

PROBL. 3. PROPOS. 6.

DATO rectilineo æquale rectangulum facilius, quã per propos. 45. lib. 1. Euclid. constituere.

HOC per duas præcedentes propos. facile expedietur. Nam si figura rectilinea in triangula resoluatur, constituent quælibet duo commune latus habentia trapezium, cuius latus commune est diameter. *a* Igitur si singulis trapezijs singula rectangula fiant æqualia, atque etiam vltimo triangulo, si forte numerus triangulorũ est impar. Deinde, si, vt in præcedenti propos. dictum est, vni lateri primi rectanguli, & duobus lateribus secundi, *b* inueniatur quarta proportionalis; *c* erit rectangulum sub assumpto latere in primo rectangulo, & quarta proportionali, secundo rectangulo æquale. Quocirca si alterum latus prope assumptum in primo rectangulo producatur, & ex producto abscindatur recta æqualis quartæ proportionali, compleaturque totum rectangulum, habebitur rectangulum ex duobus compositum æquale duobus primis trapezijs. Et si eidem lateri, ac duobus tertij rectanguli reperiatur rursum quarta proportionalis, & huic quartæ sumatur in priori latere producto recta æqualis, conficietur eodem pacto rectangulum ex tribus conflatum æquale tribus trapezijs, &c.

a 4. *huius.*
b 12. *sexti.*
c 16. *sexti.*

d VLTIMO porro triangulo, si quod fuerit, cõstituetur rectangulum æquale supra semissem basis, in eadem altitudine cum triangulo.

d *schol.* 41. *primi.*

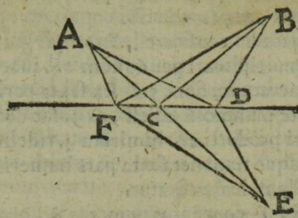
THEOR. 4. PROPOS. 7.

SI ex duobus punctis ad vnum punctum cuiusuis lineæ rectæ, quæ communis sectio sit plani per duo illa puncta ducti cum alio quopiam plano, duæ rectæ ducantur, facientes cum illa duos angulos æquales: Erunt duæ hæ rectæ breuiores quibuscunq. alijs duabus rectis, quæ ex eisdem duobus punctis ad aliud punctum eiusdem lineæ rectæ ducuntur.

EX duobus punctis A, B, ad C, punctum in recta CD, ita vt planum per CD, ductum transeat reuolutum per A, B, ducantur duæ rectæ AC, BC, facientes angulos ACF, BCD, æquales: & ex eisdem punctis A, B, ducantur primum ad aliud punctum D, ad dextram ipsius C, aliæ duæ rectæ AD, BD. Dico AC, BC, esse breuiores, quam AD, BD. Producta enim AC, versus C, fiat CE, ipsi CB, æqualis, iungaturque DE. Et quia angulus ACF, angulo BCD, ponitur æqualis, *e* estque angulus ACF, angulo ECD, ad verticem æqualis, erit quoque angulus BCD, angulo ECD, æqualis. Cum ergo

e 15. *primi.*

go & duo latera BC,CD, duobus lateribus EC,CD, æqualia ſint: *a* erit baſis DB, baſi DE, æqualis; ac proinde AD, DB, ſimul ipſis AD, DE, ſimul æquales erunt. *b* Sunt autem AD, DE, maiores quam AE, hoc eſt, quam AC,CB; quod CB, CE, poſitæ ſint æquales. Igitur & AD, BD, maiores erunt, quam AC,BC. quod eſt propoſitum. *a 4. primi.* *b 20. primi.*



DVCANTVR deinde ex punctis A,B, ad aliud punctum F, ad ſiniſtram ipſius C, aliæ duæ rectæ AF, BF. Dico rurſus AC, BC, breuiores eſſe, quam AF, BF. Producta enim rurſum AC, ſumptaque CE, ipſi CB, æquali, iungatur EF. Et quoniam anguli ACF, BCD, æquales ponuntur; *c* eſtq. ACF, angulo ECD, ad verticem æqualis; erũt quoq. anguli BCD, ECD, æquales: ac proinde & ex duobus rectis reliqui BCF, ECF, æquales erunt. Cũ ergo & duo latera BC, CF, duobus lateribus EC, CF, æqualia ſint; *d* erit quoq. baſis BF, baſi EF, æqualis: Ac proinde AF, FE, ipſis AF, BF, æquales erunt. *e* Sunt autem AF, FE, maiores, quam AE, hoc eſt, quam AC, BC, quod BC, CE, poſitæ ſint æquales. Igitur & AF, BF, maiores erunt, quam AC, CB. quod eſt propoſitum. *c 15. primi.* *d 4. primi.* *e 20. primi.*

SCHOLIVM.

QVIA ergo Natura non impedita agit per lineas breuiſſimas; fit, vt radius Solis, vel viſualis cadens ex A, in planum terſum DF, ita vt reflectatur ad punctum B, cadat neceſſario in punctum C, vbi angulus ACF, (quem Perſpectiui angulum incidentiæ dicunt.) æqualis efficitur angulo BCD, quem reflexionis appellant. Nam ſi radius caderet in D, vel F, reflecteretur que ad B, non ageret Natura per lineas breuiſſimas; cum tam AD, BD, quam AF, BF, longiores ſint, quam AC, BC, vt demonſtrauimus. quod eſt abſurdum. Atque ita demonſtratum eſt, quod Perſpectiui aſſumunt, angulum ſcilicet incidentiæ æqualem eſſe angulo reflexionis.

PROBL. 4. PROPOS. 8.

SI quis numerum mente conceperit, quot ei vnitates poſt tres operationes imperatas reliquæ ſint, conijcere.

IVBE conceptum numerum per quemcumque numerum, vt per 2. vel 3. vel 4. vel 10. &c. multiplicari, & producto adde tu quemlibet numerum à numero multiplicante numeratum. Deinde iube ex parte aliquota ſummæ totius à multiplicante numero denominata auferri ſimilem partem ali-

quotam

quotam numeri producti ex multiplicante in numerum conceptum, hoc est, ipsum numerum conceptum. Ita enim reliquus numerus erit similis pars aliquota numeri, quem adiunxisti. Cum ergo numerus adiunctus tibi notus sit, habeatque partem aliquotam à numero multiplicante denominatam, ac proinde tibi cognitam: dices reliquas vnitates illam partem aliquotam conficere. Exempli gratia. Concipiat aliquis numerum 4. iube multiplicari per 6. fiunt 24. iube addi numerum 30. à multiplicante 6. numeratum, fiunt 54. Ex sexta parte huius summę denominata à multiplicante numero 6. id est, ex 9. fac detrahi partem quoque sextam prioris numeri producti 24. nimirum 4. videlicet ipsum numerum conceptum. Ita namque remanet sexta pars numeri adiuncti 30. nimirum 5. quod in hunc modum demonstratur.

SIT conceptus numerus A, quo ducto verbi gratia in 6. gignatur B, & addito F, fiat summa C. Ex E, parte aliquota summæ C, denominata à 6. detrahatur D, pars aliquota prioris producti B, denominata quoque à 6. hoc est, ipsemet numerus conceptus A, reliquusque fiat numerus G, quem dico partem esse aliquotam numeri adiuncti F, à numero quoque 6. denominatam. Quoniam enim ita est multiplex totus C, totius E, vt ablatus B, ex C, ipsius D, ex E, ablati, quippe cum ponatur E, talis pars ipsius C, qualis D, ipsius B, denominata videlicet à 6. *a* Igitur erit quoque reliquus F, (detracto nimirum producto B, ex summa C,) ita multiplex reliqui G, (dempto scilicet D, ex E,) vt totus C, totius E, quod erat demonstrandum.

A	B	C	F
4	24	54	30
	D	E	G
	4.	9.	5.

a schol. 7. septimi.

EST autem iucundum, hoc idem conijci posse inter plures. Nam si plures concipiant mente numeros, singuli videlicet singulos, nullo eorum conscio, quem quisque numerum conceperit; & iubeas quemlibet suum numerum multiplicare per quemuis numerum à te electum; deinde addere numerum à tuo electo numeratum, quicunque ille sit; ac postremo ex parte aliquota summæ, cuius denominator est numerus à te electus, auferre similem partem ex productis singulorum, hoc est, ipsos conceptos numeros: reliquus numerus cuiusque erit similis pars numeri adiecti.

QVOD si malueris diuersos numeros, dic vt secundus suum residuum duplicet, & tertius triplicet, &c. Ita enim conijcies, primi residuum esse illam partem aliquotam numeri adiecti: secundum vero habere duplum illius, & tertium triplum, &c. Vbi vides eos residuum illud per quoscunque numeros posse multiplicare, dũmodo memor sis in conijciendis numeris, per quos numeros factæ sunt multiplicationes.

PROBLEMA 5. PROPOS. 9.

DATVM numerum quadratum in quotuis quadra-

dratos numeros partiri.

QVAMVIS problema hoc videatur fere impoſſibile: (qui enim fieri poteſt, dicet aliquis, vt quilibet numerus quadratus diuidi poſſit in quotlibet numeros, qui omnes ſint quadrati?) ſolutio tamen eius non eſt difficilis. Sit igitur quadratus numerus datus 36. diuidendus in 5. numeros quadratos. Per ea, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. Euclid. ſcripſimus, reperiantur tres numeri, quorum maioris quadratus reliquorum quadratis ſit æqualis, nimirum 5. 4. 3. Deinde dic: ſi 5. dant 4. quid dabunt 6. quadrata videlicet radix dati quadrati? Item ſi 5. dant 3. quid dabunt 6? Inuenieſque $\frac{2}{}\frac{4}{5}$. & $\frac{1}{}\frac{8}{5}$. hoc eſt, $4\frac{4}{5}$. & $3\frac{3}{5}$. radices duorum quadratorum quadrato 36. dato æqualium. Nam cum ita ſe habeat radix 6. ad inuentos duos numeros, vt 5. ad 4. & 3. ex conſtructione: fiet ex lateribus 6. $4\frac{4}{5}$. $3\frac{3}{5}$. triangulum rectangulum, ſimile nimirum triangulo rectangulo ex lateribus 5. 4. 3. conſtructo. a Igitur quadrati ex $4\frac{4}{5}$. & $\frac{3}{5}$. æquales erunt quadrato radicis 6. dato. Rurſus ſi fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita $3\frac{3}{5}$. ad aliud; (ſumendo minorem radicem inuentam, ne coincidamus cum aliqua præcedente radice iam inuenta) inuenientur alij duo numeri, quorum quadrati æquales ſint quadrato radicis $3\frac{3}{5}$. nimirum $2\frac{2}{2}\frac{2}{5}$. & $2\frac{}{2}\frac{4}{5}$. Atque ita iam (relicta radice $3\frac{3}{5}$.) inuentæ erunt tres radices $4\frac{4}{5}$. $2\frac{2}{2}\frac{2}{5}$. $2\frac{}{2}\frac{4}{5}$. quarum quadrati æquales erunt quadrato 36. propoſito. Eodem modo ſi fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita $2\frac{}{2}\frac{4}{5}$. ad aliud, reperientur duæ aliæ radices $1\frac{}{1}\frac{9}{2}\frac{1}{5}$. & $1\frac{}{1}\frac{3}{2}\frac{7}{5}$. Quare (relicta radice $2\frac{}{2}\frac{4}{5}$. cuius loco duas inuenimus) inuentæ iam erunt quatuor radices $4\frac{4}{5}$. $2\frac{2}{2}\frac{2}{5}$. $1\frac{}{1}\frac{9}{2}\frac{1}{5}$. & $1\frac{}{1}\frac{3}{2}\frac{7}{5}$ quarum numeri quadrati quadrato 36. æquales erunt. Denique ſi rurſus fiat vt 5. ad 4. & ad 3. ita $1\frac{}{1}\frac{3}{2}\frac{7}{5}$. minor radix inuenta ad aliud, reperientur duæ aliæ radices $1\frac{}{6}\frac{2}{2}\frac{3}{5}$. & $\frac{4}{6}\frac{8}{2}\frac{6}{5}$. Quocirca (relicta radice $1\frac{}{1}\frac{3}{2}\frac{7}{5}$. pro qua duas proximas inuenimus) inuentæ erunt quinque radices $4\frac{4}{5}$. $2\frac{2}{2}\frac{2}{5}$. $1\frac{}{1}\frac{9}{2}\frac{1}{5}$. $1\frac{}{6}\frac{2}{2}\frac{3}{5}$. & $\frac{4}{6}\frac{8}{2}\frac{6}{5}$. quarum quadrati numeri $23\frac{}{2}\frac{1}{5}$. $8\frac{1}{6}\frac{8}{2}\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{1}\frac{5}{5}\frac{4}{6}\frac{0}{2}\frac{6}{5}$. $1\frac{}{3}\frac{2}{9}\frac{9}{0}\frac{2}{6}\frac{7}{2}\frac{9}{5}$. & $\frac{2}{3}\frac{3}{9}\frac{6}{0}\frac{1}{6}\frac{9}{2}\frac{6}{5}$. conficiunt datum quadratum 36. Atque in hunc modum plures quadrati inueniri poterunt æquales numero 36. ſi nimirum fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita vltima radix inuenta $\frac{4}{6}\frac{8}{2}\frac{6}{5}$. quæ minima eſt, ad aliud, &c. a 47. primi.

THEOR. 5. PROPOS. 10.

PROPOSITIS duabus minutijs inæqualibus; minutia, cuius numerator ex illarum numeratoribus, denominator autem ex denominatoribus conflatur, maior quidem eſt minore, minor vero maiore.

SINT duæ minutiæ inæquales, maior $\frac{3}{5}$. & minor $\frac{4}{7}$. Iungantur tam numeratores, quam denominatores, vt fiat minutia $\frac{}{1}\frac{7}{2}$. Dico hanc maiorem eſſe, quam $\frac{4}{7}$. & minorem quam $\frac{3}{5}$. Quoniam enim maior eſt minutia $\frac{3}{5}$. quam

$\frac{4}{7}$ erit

$\frac{4}{7}$. erit per propoſ. 8. Minutiarum lib. 9. Eucl. maior proportio 3. ad 5. quam

a 27. quinti — *b 28. quinti* — *c 27. quinti*

$\frac{3}{5}$. $\frac{4}{7}$. $\frac{7}{12}$.

4. ad 7. *a* Et permutando, maior 3. ad 4. quam 5. ad 7. *b* Igitur & componendo, maior 3. 4. ſimul, hoc eſt, 7. ad 4. quam 5. 7. ſimul, id eſt, quam 12. ad 7. *c* Et permutando, maior 7. ad 12. quam 4. ad 7. Ac proinde per propoſ. 8. Minutiarum lib. 9. Euclid. maior erit minutia $\frac{7}{12}$ quam $\frac{4}{7}$ quod eſt primum.

d 27. quinti — *e 28. quinti* — *f 27. quinti*

DEINDE quia minor eſt $\frac{4}{7}$. quam $\frac{3}{5}$. erit per propoſ. 8. Minutiarum lib. 9. Euclid. minor proportio 4. ad 7. quam 3. ad 5. *d* & permutando, minor 4. ad 3. quam 7. ad 5. *e* Igitur & componendo minor 4. 3. ſimul, id eſt, 7. ad 3. quam 7. 5. ſimul, hoc eſt. quam 12. ad 5. *f* Et permutando, minor 7. ad 12. quam 3. ad 5. Ac proinde per propoſ. 8. Minutiarum lib. 9. Eucl. minor erit minutia $\frac{7}{12}$. quam $\frac{3}{5}$. quod eſt ſecundum.

THEOR. 6. PROPOS. 11.

SI duo numeri inter ſe primi non ſint ambo quadrati, aut cubi; neque eorum æquè multiplices vlli, quadrati erunt, aut cubi. Et ſi eorum æquè multiplices aliqui ſint ambo quadrati, aut cubi, etiam ipſi erunt quadrati, aut cubi.

A	B
4.	11.
C	D
12.	33

g 17. ſeptimi — *h 11. & 12. octaui.* — *i 8. octaui.* — *k 1. octaui.* — *l coroll. 2. octaui.*

SINT enim A, B, numeri inter ſe primi, & non ambo quadrati, vel cubi, quamuis vnus eorum quadratus ſit, vel cubus. ſintque eorum æquè multiplices C, D. Dico neque hos eſſe ambos quadratos, aut cubos. Sint enim, ſi fieri poteſt, ambo quadrati, vel cubi. Et quoniam idem numerus multiplicans A, & B, fecit C, & D, quod hi illorum ſint æque multiplices: *g* erit A, ad B, vt C, ad D. *h* Cadit autem inter C, & D, vnus medius proportionalis, aut duo. *i* Igitur & inter A, B, vnus cadet medius proportionalis, aut duo. Cum ergo extremi A, B, ponantur inter ſe primi; *k* erunt omnes tres, vel quatuor proportionales, minimi in ſua proportione: *l* Ac proinde A, B, ambo quadrati erũt, vel cubi. quod eſt contra hypotheſim. Non ergo C, D, ambo quadrati ſunt, aut cubi. quod erat oſtendendum.

SED ſint iam C, D, ipſorum A, B, inter ſe primorum æquè multiplices, & ambo quadrati, vel cubi. Dico etiam A, B, ambos eſſe quadratos, vel cubos. Si enim non ſunt; neque ipſi C, D, erunt ambo quadrati, vel cubi, vt demonſtratum eſt. quod cum hypotheſi pugnat.

COROLLARIVM.

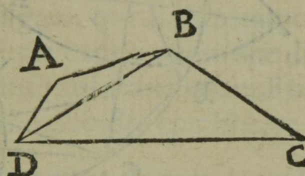
HINC fit, ſi tam Numerator, quam Denominator alicuius minutiæ fuerit

rit quadratus, aut cubus: tam Numeratorem quoque, quam Denominatorem eiusdem minutiæ ad minimos reductæ terminos, esse quadratum, vel cubum; cum minimi termini sint numeri inter se primi, habeantque eandem proportionem, quam Numerator, ac Denominator prioris minutiæ: quippe cum minutiæ sint æquales. Item si vterque numerus minutiæ cuiuspiam in minimis terminis non sit quadratus, aut cubus, neque vtrumque numerum alterius minutiæ æquiualentis esse quadratum, aut cubum.

THEOR. 7. PROPOS. 12.

IN omni quadrilatera figura rectilinea, tria latera, vt libet, assumpta, maiora sunt reliquo latere.

SIT quadrilaterum ABCD. Dico quælibet tria latera, nimirum DA, AB, BC, simul sumpta esse maiora reliquo latere D C. Ducta enim diametro BD; *a* erunt rectæ BD, B C, maiores quam D C; Sed eadem ratione A B, A D, maiores sunt quam B D. Maiores erunt ergo tres A D, AB, BC, quam duæ B D, B C; ac proinde multo maiores, quã D C. Idemque demonstrabitur simili modo de quibuscunque alijs tribus lateribus, vt constat. In omni ergo quadrilatera figura rectilinea, tria latera, vt libet, assumpta, maiora sunt reliquo latere. quod erat demonstrandum.



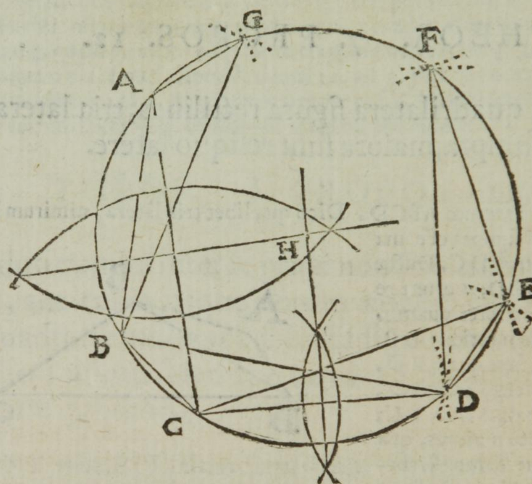
a 20. *primi.*

PROBL. 6. PROPOS. 13.

DATIS tribus punctis, per quæ circulus describendus sit, inuenire alia puncta, per quæ idem circulus transire debeat.

SOLENT interdum tria data puncta tam parum inter se distare, aut fere in recta linea iacere, vt non facile eorum centrum inueniri possit, propterea quod rectæ secantes lineas illa puncta connectentes bifariam, & ad angulos rectos, nimis oblique se in centro intersecant. Vt igitur magis exquisite centrum reperiatur, inuestiganda erunt alia duo puncta, vel plura, per quæ idem circulus incedere debeat, hoc modo. Sint data tria puncta A, B, C. Iunctis rectis AB, AC, BC, constituatur super basem B C, triangu-

lum BCD, triangulo ABC, æquilaterum, ita vt angulus D, vergat in eam partem, versus quam circunferentia describenda transire debet, lateraque æqualia non ab eodem puncto exeant, hoc est, latus CD, lateri BA, & latus BD, lateri CA, sit æquale. Quod quidem fiet, si ex C, arcus delineetur ad inter-



uallum BA, quem alius arcus ex B, ad interuallum CA, delineatus secet in D. *a* Erit enim angulus D, angulo A, æqualis: *b* ac proinde circulus per tria puncta A, B, C, descriptus transibit quoque per quartum punctum D. Eadem ratione, si super basem CD, triangulum construatur CDE, triangulo BCD, æquilaterum ordine prædicto, ita vt latus DE, lateri CB, & latus CE, lateri BD, æquale sit, inuentum erit aliud punctum E, per quod circunferentia incedat. Atque eadem arte reperietur aliud punctum F, per triangulum DEF, triangulo EDC, æquilaterum, &c. Eodem modo ex altera parte reperietur aliud punctum G, per triangulum ABG, triangulo BAC, æquilaterum, & sic deinceps. Si igitur eligantur tria puncta, ita vt rectæ ea connectentes constituant quasi angulum rectum, qualia sunt tria puncta A, C, D, & ex proximis A, C, ad quodcumque idem interuallum bini arcus describantur, & ex proximis C, D, bini alij; ac per intersectiones horum arcuum rectæ lineæ emittantur, secabunt se se in centro H, &c. Aptissima quoque essent tria puncta G, B, D, quamuis angulus DBG, acutus sit. Item tria puncta G, B, E, & C, E, F, &c.

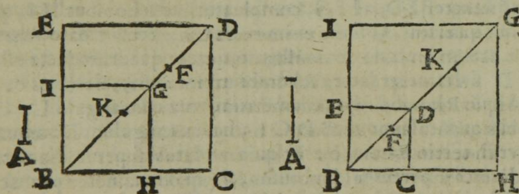
a 8. *primi.*
b *schol.* 21. *tertij.*

PROBL.

PROBL. 7. PROPOS. 14.

DATO excessu diametri Quadrati supra latus: Item dato excessu diametri Rhombi supra latus, vel lateris supra diametrum (quando illud maius est) vna cum vno Rhombi angulo: Dato præterea excessu diametri Rectanguli supra vtrumlibet laterum inæqualium, vna cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel vna cum proportione eorundem inæqualium laterum: Dato denique excessu diametri Rhomboidis supra vtrumuis laterum inæqualium, vel vtriusuis inæqualium laterum supra diametrum (quando illud maius est) vna cum vno angulo Rhomboidis, & insuper cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel insuper cum proportione duorum laterum inæqualium; Quadratum ipsum, Rhombum, Rectangulum, & Rhomboides constituere.

HOC problema, quod ad quadratum attinet, alio modo ad finem lib. 2. Euclid. absoluimus. Sit A, datus excessus diametri quadrati cuiuspiam supra latus. Fiat quodcunque quadratum BCDE, cuius diameter BD, excedat

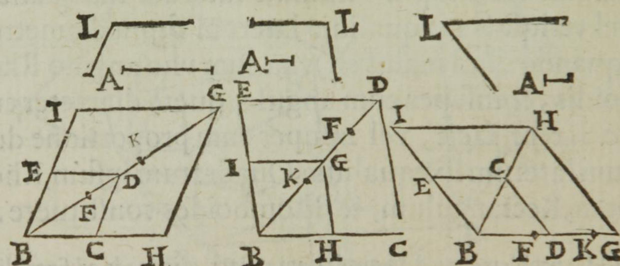


latus excessu DF; qui si æqualis fuerit dato excessui A; factum erit, quod iubetur: Si vero inæqualis, *a* fiat vt DF, ad datum excessum A, ita diameter *a 12. sexti.*
BD, ad BG, perficiaturque quadratum HI; quod dico esse id, quod quæritur. Sumpta enim recta GK, ipsi A, æquali, quoniam est per constructionem, vt tota BD, ad totam BG, ita DF, ablata ad A, hoc est, ad GK, ablatam; *b* erit quoque vt tota BD, ad totam BG, ita reliqua BF, ad reliquam *b 19. quinti*
BK. Et permutando, vt BD, ad BF, ita BG, ad BK. *c* Est autem vt BD, ad *c 7. quinti*

BF, ita BD, ad BC, (quod BF, BC, æquales ſint; cum DF, ponatur exceſſus diametri BD, ſupra latus BC.) *a* Et vt BD, ad BC, ita BG, ad BH. Igitur erit quoq. vt BG, ad BK, ita BG, ad BH; *b* Ac proinde BK, BH, æquales erunt. Diameter ergo BG, ſuperat latus BH, hoc eſt, BK, recta GK, quæ dato exceſſui A, æqualis eſt. Quod eſt propoſitum.

a 4. *ſexti.*
b 9. *quinti*

SIT deinde A, exceſſus diametri in Rhombo aliquo ſupra latus, vna cum angulo L, datus. Fiat Rhombus quicunque BCDE, habens angulum C, æqualem dato angulo L, vt in primo Rhombo, vel angulum B, vt in ſecundo. Siue ergo diameter opponi debeat dato angulo C, vt in primo Rhombo, ſiue datum angulum B, ſecare, vt in ſecundo, ducatur diameter BD, excedens latus BC, recta DF, quæ ſi æqualis fuerit dato exceſſui A, fa-



a 12. *ſexti.*

ctum erit, quod iubetur: Si vero inæqualis, *c* fiat vt DF, ad exceſſum datum A, ita diameter BD, ad BG, compleaturque Rhombus HI, quem dico eſſe, eum, qui quæritur. Abſciſſa enim recta GK, exceſſui dato A, æquali, adhibenda eſt eadem omnino demonſtratio, quæ in quadrato facta eſt.

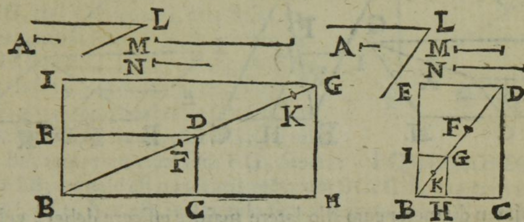
QVOD ſi diameter latere Rhombi minor fuerit, ſit datus exceſſus A, lateris in aliquo Rhombo ſupra diametrum, vna cum angulo L. Conſtruatur Rhombus quantuſcunque BDCE, habens angulum D, æqualem dato angulo L, vt in tertio Rhombo. Et quia vt latus ſuperet diametrum, ducenda eſt diameter per angulos obtuſos, *d* (quod diameter per acutos angulos ducta ſemper maior eſt Rhombi latere) ducatur diameter BC, quam latus BD, excedat recta DF, quæ ſi æqualis fuerit exceſſui dato A, factum erit, quod iubetur: Si vero inæqualis; fiat vt DF, ad exceſſum A, ita BD, latus ad BG, compleaturque Rhombus GI, circa eandem diametrum, quem dico eſſe quæſitum. Abſciſſa namque recta GK, æquali exceſſui A: fiet demonſtratio, vt in quadrato, vt perſpicuum eſt, ſi loco diametrorum BD, BG, in quadrato, ſumantur hic latera BD, BG.

d 19 *primi.*

TVNC autem latus Rhombi maius erit diametro (vt hoc etiam obiter moneamus) cum ſemiſsis anguli obtuſi maior fuerit angulo acuto eiuſdem Rhombi. Nam ſi in tertio Rhombo angulus CBD, qui ſemiſsis eſt anguli obtuſi B, vt in ſchol. propoſ. 34. lib. 1. Euclid. oſtendimus, maior ſit angulo

gulo acuto D; *a* erit latus BD, hoc eſt, CD, maius diametro B C, in triangulo B C D. Quando autem ſemiſſis anguli obtuſi fuerit minor angulo acuto, vt in Rhombo ſecundo; *b* erit diameter latere maior in triangulo B C D. a *19. primi.* b *19. primi.*

TERTIO ſit datus exceſſus A, diametri rectanguli alicuius ſupra alterum laterum inæqualium, vna cum angulo L, quem diameter cum eo latere conſtituit, uel vna cum proportione M, ad N, quam illud latus ad alterum habet. Si ergo angulus L, eſt ſemirecto minor, vel certè proportio M, ad N, maioris inæqualitatis, vt in priori rectangulo, erit A, exceſſus diametri ſupra maius latus: Si vero angulus L, eſt maior ſemirecto, vel

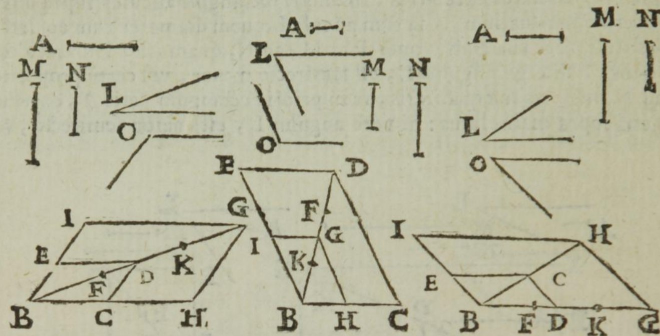


proportio M, ad N, minoris inæqualitatis, erit A, exceſſus diametri ſupra minus latus. Conſtituatur ergo angulus CBD, angulo L, æqualis, fiatque rectangulum BCDE, circa aſſumptam diametrum B D. Vel fiat B C, quantacunque ad CD, perpendicularem, vt M, ad N: completoque rectangulo C E, ducatur diameter BD, excedens latus BC, recta DF, quæ ſi fuerit æqualis dato exceſſui A, conſtructum erit rectangulum C E, quod quæritur: Si vero inæqualis, fiat vt DF, ad exceſſum datum A, ita B D, ad B G, compleaturque rectangulum HI, quod erit quæſitum. Abſciſſa enim recta GK, æquali exceſſui A, demonſtrabitur propoſitum, vt in quadrato.

QVARTO & vltimo ſit in aliquo Rhomboide datus exceſſus A, diametri ſupra vtrumuis inæqualium laterum, vna cum angulo Rhomboidis O, & inſuper cum angulo L, quē diameter cū latere, cuius exceſſus ſumptus eſt, efficit, vel inſuper cū proportione M, ad N, quā latus illud ad alterum latus habet. Cōſtituatur angulus BCD, in prima figura, vel CBE, in ſecūda, dato angulo O, æqualis. Deinde ſiue diameter dato angulo C, opponi debeat, vt in prima figura, ſiue datum angulum CBE, ſecare, vt in ſecunda, fiat ad B, angulus CBD, angulo L, dato æqualis, ſecetque CD, rectam B D, in D: vel fiat vt M, ad N, ita BC, ad CD; ac Rhomboides compleatur CE, cuius diameter latus BC, excedat recta D F. quæ ſi æqualis fuerit dato exceſſui A, factum erit, quod iubetur. Si vero inæqualis, fiat vt D F, ad exceſſum A, ita BD, ad BG, compleaturque Rhomboides H I, circa eandem diametrum BD, quod dico eſſe quæſitum. Nam ſi reſecetur GK, exceſſui A, æqualis, adhibenda eſt eadem demonſtratio, quæ in præcedentibus.

QVOD ſi diameter Rhomboidis cuiuſpiam minor fuerit latere maiore, vt

vt in tertia figura. Sit datus excessus A, lateris maioris in aliquo Rhomboide supra diametrum, vna cum angulo O, Rhomboidis, & insuper cum



angulo L, quem diameter cum illo latere maiore efficere debet, vel insuper cum proportione M, ad N, quam maius latus ad minus habet. Constituatur angulus BDC, dato angulo O, æqualis: Et si est acutus, fiat in B, angulus DBC, angulo L, æqualis, (si datus angulus Rhomboidis foret obtusus, nimirum DBE, constituendus esset angulus DBC, in ipso angulo dato) secetque recta BC, rectam DC, in C; vel fiat vt M, ad N, ita B D, ad DC; ac Rhomboides compleatur DE, cuius latus BD, diametrũ BC, superet rectaDF, quæ si æqualis fuerit dato excessui, *a* factũ erit, quod iubetur: Si vero inæqualis, fiat vt DF, ad A, ita BD, ad BG, perficiaturque Rhomboides G I, quod dico esse quæ situm. Nam si capiatur GK, æqualis ipsi A, demonstrabitur propositum, vt supra in quadrato, si loco diametrorum BD, BG, quadrati, accipiantur hic latera BD, BG, vt perspicuum est.

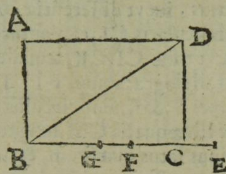
TVNC autem latus maius diametrum excedet, quando angulus, quem diameter cum minore latere efficit, maior est acuto angulo Rhomboidis. Nã
a 19. primi si in tertia figura angulus B C D, maior est angulo D; *a* erit recta BD, maior, quam BC.

THEOR. 8. PROPOS. 15.

IN rectangulo parallelogrammo, sumptis excessibus, quibus diameter duo latera superat; Rectangulum sub differentia excessuum, & minore excessu bis sumptum, vna cum quadrato minoris excessus bis sum-

sumpto, æquale est quadrato rectæ, qua minus latus minorem excessum superat.

SIT rectangulum AC, cuius diametro BD, æqualis sit recta BE, vt excessus minor, quo diameter maius latus BC, superat, sit CE; Sumpta autem BF, æquali minori lateri CD, vt EF, excessus sit, quo diameter BD, vel illi æqualis BE, minus latus CD, vel illi æqualem BF, superat: ac proinde CF, sit differentia excessuum EC, EF. *a* Et quia latera BC, CD, maiora sunt latere BD, hoc est, recta BE, dempta communi BC, erit reliqua CD, maior, quam reliqua CE; ideoque & BF, æqualis ipsi CD, maior erit, quam CE. Abscissa ergo FG, ipsi CE, æquali, erit BG, excessus, quo minus latus BF, minorem excessum FG, superat. Dico rectangulum bis sumptum sub FC, differentia excessuũ, ^ vna cum quadrato minoris excessus CE, bis sumpto, æquale esse quadrato rectæ BG, qua minus latus BF, minorem excessum FG, superat. *b* Quoniam enim quadratum rectæ BE, æquale est quadratis rectarum BC, CE, vna cum rectangulo bis sub BC, CE, hoc est, rectangulo semel sumpto sub BC, & recta ipsius CE, dupla: *c* Est autem rectangulum sub BC, & dupla ipsius CE, ~~æquale rectangulis sub BF, & dupla ipsius CE~~, æquale rectangulis sub BF, & dupla ipsius CE, & sub FC, & dupla ipsius CE; hoc est, rectangulo sub BF, & CE, bis vna cum rectangulo sub FC, & CE, bis; Erit quadratum rectæ BE, siue rectæ BD, æquale quoque quadratis rectarum BC, CE, vna cum rectangulis sub BF, CE, bis, & sub FC, CE, bis; Ac proinde & quadrata rectarum BC, CD, *d* quæ quadrato rectæ BD, æqualia sunt, æqualia erunt quadratis rectarum BC, CE, vna cum rectangulis sub BF, CE, bis, & sub FC, CE, bis. Ablato ergo communi quadrato rectæ BC, erit reliquum quadratum rectæ CD, hoc est, rectæ BF, æquale reliquis rectangulis sub BF, CE, bis, & sub FC, CE, bis, vna cum quadrato rectæ CE. Addito igitur communi quadrato rectæ FG, erunt quadrata rectarum BF, FG, æqualia rectangulis sub BF, CE, bis, & sub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarum CE, FG. *e* Sed quadrata rectarum BF, FG, æqualia sunt rectangulo sub BF, FG, bis, vna cum quadrato rectæ BG. Igitur rectangulum quoque sub BF, FG, hoc est, sub BF, CE, bis, vna cum quadrato rectæ BG, æquale erit rectangulis sub BF, CE, bis, & sub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarum CE, FG. Ablato ergo communi rectangulo sub BF, CE, bis sumpto; erit reliquum quadratum BG, æquale reliquo rectangulo sub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarum CE, FG: hoc est, rectangulum sub FC, differentia excessuum, & CE, minore excessu bis sumptum, vna cum quadrato minoris excessus CE, bis sumpto, æquale est quadrato rectæ BG, qua minus latus BF, minorem excessum FG, superat. quod erat demonstrandum.



a 20. *primi.*

^ et CE, minore excessu

b 4. *secundi*

c 1. *secundi*

d 47. *primi.*

e 7. *secundi*

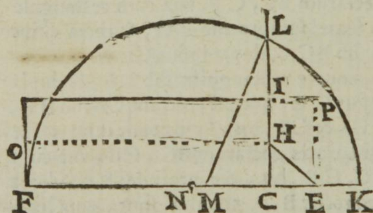
PRO-

PROBL. 8. PROPOS. 16.

DATIS duobus excessibus, quibus diameter rectanguli vtrumque latus superat, vtrumque latus, & diametrum inuenire.

SIT datus excessus FE, diametri supra latus minus, & CE, supra maius, ita vt differentia excessuum sit FC. Ex C, educatur ad FE, perpendicularis CL, capianturque CH, HI, EK, minori excessui CE, æquales, ita vt totæ CI, CK, æquales sint, vt pote ipsius CE, duplæ, perficiaturque parallelogrammum FI. Diuisa deinde FK, bifariam in N, describatur ex N, per F, & K, semicirculus FLK, secans CL, in L. Ducta denique HE, sumatur illi æqualis CM, iungaturq. recta LM. Dico LM, differentiam esse inter minus latus quæsitum, & minorem excessum datum CE, ita vt CE, addita ad LM, efficiat minus latus; cui si addatur FC, differentia datorum excessum, fiat maius latus. (Est enim differentia excessuum diametri supra vtrumque latus rectanguli æqualis excessui maioris lateris supra minus: vt in figura præcedentis propos. patet; vbi diameter est BD, vel BE; excessus maior FE, quo diameter minus latus BF, superat; excessus minor CE, quo eadem diameter maius latus BC, superat: estque FC, differentia excessuum, excessus, quo maius latus BC, superat minus BF,) Ac tandem maiori lateri inuento adijciatur minor excessus CE, vt diameter habeatur. quæ omnia ita demonstrabuntur. Per præcedentem, rectangulum sub FC, differentia excessuum, & CE, minori excessu bis sumptum, hoc est, rectangulum FI, vna cum quadrato rectæ CE, bis etiam sumpto, hoc est, vna cum quadrato rectæ HE, vel CM, æquale est quadrato rectæ, qua minus latus quæsitum, minorem excessum CE, superat. Cum ergo quadratum rectæ CL, æquale sit rectangulo FI, vt ex demonstratione vltimæ propos. lib. 2. Eucl. constat; erunt quoque quadrata rectarum CL, CM, æqualia quadrato eiusdem rectæ, qua minus latus quæsitum superat minorem excessum CE, *a* Ac proinde cum quadratis rectarum CL, CM, sit æquale quadratum rectæ LM: erit quoque quadratum rectæ LM, æquale quadrato rectæ, qua minus latus quæsitum minorem excessum CE, superat. Est ergo LM, excessus minoris lateris quæsiti supra minorem excessum CE. Ideoque recta ex LM, CE, conflata erit minus latus quæsitum: cui si addatur FC, differentia excessuum, fiet maius latus quæsitum: cui si tandem minor excessus CE, adijciatur, conflabitur diameter quæsita. quæ omnia demonstranda erant.

a 47. primi.



CO-

COROLLARIVM.

ITAQVE recta LM, cuius quadratum æquale est rectangulo FI, sub FC, differentia excessuum, & dupla minoris excessus CE, comprehenso, vna cum duplo quadrati excessus minoris CE, addita minori excessui C E, efficit minus latus quæsitum, &c.

IMMO quia quadratum rectæ, CL, rectangulo FI, sub FC, differentia excessuum, & CK, duplo minoris excessus CE, comprehenso æquale est, vt in demonstratione dictum est; & rectangulum CP, duplum est quadrati excessus minoris CE, hoc est, quadrato rectæ C M, æquale: erit quadratum rectæ LM, toti rectangulo FP, sub maiori excessu FE, & E P, dupla minoris excessus CE, contento æquale; a ideoque LM, media proportionalis erit inter maiorem excessum, ac duplum minoris excessus. Quocirca si inter maiorem excessum, & duplum minoris excessus sumatur media proportionalis LM, habebitur rursus differẽtia inter minus latus, & minorẽ excessum, &c. a 17. sexti.

SCHOLIVM

HOC problema, vna cum antecedente Theoremate in Gallia, vnde mihi transmissum est, ab ingenioso quodam Geometra demonstratum fuit, cuius nomen, si mihi esset cognitum, hic libenter ascriberem. Idem tamen problema ad finem lib. 2. Euclid. ex Marino Ghetaldo Patritio Ragusino aliter quoque demonstrauimus non infeliciter.

PROBL. 9. PROPOS. 17.

DATO excessu diametri rectanguli supra maius latus, & excessu maioris lateris supra minus: vtrumque latus, ac diametrum inuenire.

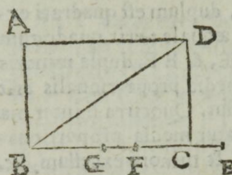
QVONIAM, vt in præcedenti problem. dictum est, excessus maioris lateris supra minus, ęqualis est differẽtiæ inter excessus diametri supra vtrũque latus: fit vt excessus diametri supra maius latus, additus ad excessum maioris lateris supra minus, conficiat excessum diametri supra minus latus. Quare cum cogniti sint excessus diametri supra vtrumque latus, reliqua cognoscentur, vt in præmisso problemate traditum est.

PROBL. 10. PROPOS. 18.

SECTA linea recta vtcunque, adiungere ei versus vtramuis partem lineam rectam, ita vt quadratum totius rectæ compositæ æquale sit quadrato rectæ

adiunctæ; vna cum quadrato rectæ, quæ ex adiuncta, & proximo segmento prioris lineæ conflatur.

IN figura propos. 15. sit recta EF, secta in C, vtcunque, oporteatque ei versus F, adiungere rectam, ita vt quadratum totius compositæ sit æquale quadrato adiunctæ, vna cum quadrato rectæ ex segmento F C, & adiuncta compositæ. Statuantur E F, E C, excessus, quibus diameter alicuius rectanguli vtrumque latus superat. Atque ex propos. 16. inueniatur minus latus B F. Dico rectam BF, ipsi EF, adiunctam efficere, quod proponitur. Fiat enim rectangulum AC, sub BC, & CD, ipsi BF, æquali comprehensum. Et quia F C, differentia excessuum addita minori lateri inuento BF, facit maius latus, vt propos. 16. dictum est, erit B E, diametro BD, æqualis, quandoquidem excedit minus latus BF, vel C D, recta E F, & maius recta E C. *a* Quoniam vero quadratum rectæ BE, hoc est, diametri BD, æquale est quadrato rectæ CD, id est, adiunctæ B F, vna cum quadrato rectæ BC, compositæ ex adiuncta BF, & proximo segmento FC, liquido constat id, quod proponitur.



a 47. *primi.*

PROBL. 11. PROPOS. 19.

DATIS duabus rectis inæqualibus, quarum maior diametrum quadrati ex minore descripti non superet: maiorem ita secare in duas partes inæquales, vt earum quadrata simul sumpta quadrato minoris lineæ sint æqualia.

SINT datæ duæ rectæ AB, maior, & AC, minor, ita vt A B, non sit maior diametro quadrati ex AC, descripti. Erigatur perpendicularis A D, maiori AB, æqualis: Et ducta recta BD, secetur bifariam in E, iungaturque recta AE, *b* quæ ad B D, perpendicularis erit: diuidetque angulum rectum A, bifariam in duos semirectos: *c* Sunt autem & B, D, semirecti. *d* Igitur latera E A, E B, æqualia sunt; ac proinde AB, diameter erit quadrati rectæ A E. Et quoniam AB, ponitur non maior diametro quadrati minoris AC, non erit AC, minor quam AE, sed vel maior, vel æqualis. Si namque minor esset AC, quam AE, sumpta ipsi æquali AL, ductaque LM, ipsi EB, parallela, esset AM, diameter quadrati minoris AL, ideoque maior AB, superaret diametrum quadrati ex minore descripti. quod non ponitur. Sit ergo primum AC, maior quam AE, productaque AE, vt AF, ipsi AC, sit æqualis, de-

b *schol.* 26. *primi*
c 2. *coroll.* 32. *primi.*
d 6. *primi.*

deſcribatur ex A, per C, F, circulus ſecans B D, in H, N, demittaturque HI, ad A B, perpendicularis. Dico maiorem AB, ita eſſe ſectam in I, vt quadrata rectarum A I, IB, æqualia ſint quadrato minoris A O. Quoniam enim angulus I, rectus eſt, & B, ſemirectus: erit quoque H, in triangulo BHI, ſemirectus; *a* ideoque latera BI, H I, æqualia erunt. *b* Cum ergo, ducta recta AH, quadrata rectarum AI, I H, quadrato rectæ A H, æqualia ſint; erunt quoque quadrata ſegmentorum A I, I B, æqualia quadrato rectæ AH, hoc eſt, quadrato rectæ A C. quod eſt propoſitum. a 6. primi. b 47. primi.

SIT deinde minor linea data AK, æqualis ipſi AE, ita vt maior A B, diametro quadrati ex minore A E, deſcripti æqualis ſit. Demittatur perpendicularis EG, *c* quæ & baſem AB, & angulum rectum E, diuidet bifariam in ſemirectos. Dico AB, ita eſſe ſectam in G, vt quadrata ſegmentorum æqualium AG, GB, æqualia ſint quadrato minoris A K, vel A E. *d* Erunt enim rurſus latera EG, GB, æqualia, ob ſemirectos angulos æquales B, & E, in triangulo BEG. *e* Cum ergo quadrata rectarum AG, GE, æqualia ſint quadrato rectæ A E, erunt quoque quadrata ſegmentorum AG, G B, æqualia quadrato AE, vel minoris lineę AK. quod eſt propoſitum. c ſchol. 26. primi d 6. primi. e 47. primi.

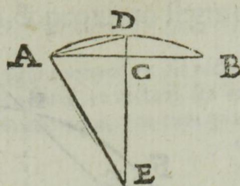
SI ex altera ſectione N, demittatur perpendicularis NO, erit AB, ſecta in O, vt in I, ita vt etiam quadrata ſegmentorum B O, O A, æqualia ſint quadrato minoris AC, vel AH. *f* Cum enim rectæ B D, B A, ſectæ ſint proportionaliter in H, I, & N, O, ſintque æquales BH, ND; *g* (propterea quod perpendicularis AE, ſecat HN, bifariam. Ablatis ergo æqualibus EH, EN, ex æqualibus EB, E D, reliquæ B H, D N, æquales erunt) erunt quoque B I, A O, æquales; nec non BO, AC, &c. f 2. ſexti. g 3. tertij.

PROBLEMA 12. PROPOS. 20.

DATA chorda alicuius arcus, vna cum perpendiculari, quæ ex medio puncto chordæ ad arcum vſque educitur: quot gradus, vel palmos, tam arcus, quam ſemidiameter circuli complectitur, inuenire.

SIT data chorda AB, palmorum 74. & perpendicularis CD, ex medio puncto C, educta palmorum 10. Iuncta recta A D; quoniam in triangulo rectangulo ACD, latera AC, CD, nota ſunt, quod C D, ſit 10. & A C,

a 8. triang. rectil.



37. semissis nimirum chordæ A B, 74. *a* Si fiat vt C D, 10. ad sinum totum 100000. ita AC,37. ad aliud; inuenietur A C, 370000. tangens anguli A D C; ac proinde ipse angulus erit gr.74.min.53.fere. Et si concipiatur duci AE ad centrum E, erit quoque angulus D A E, gr. 74. min. 53. fere; *b* quippe cum anguli ADE, DAE, æquales sint. Quod si vtriusque summa gr. 149. min. 46. fere, detrahatur ex duobus rectis, hoc est, ex gr. 180. reliquus fiet tertius angulus E, in centro gr. 30. min. 14. fere, ac totidem grad. erit arcus A D; ideoque eius duplus ADB, grad. 60.min.28. ferme.

b 5.primi.

c 35.tertij.

c QVIA vero quadratum ex AC, æquale est rectangulo sub CD, & reliqua parte diametri: si AC,37. palm. ducatur in se, & productus numerus 1369. diuidatur per C D, palm. 10. prodibit reliqua pars diametri palm. $136\frac{9}{10}$. ac proinde addita C D, palm. 10. tota diameter erit palm. $146\frac{9}{10}$. & semidiameter pal. $73\frac{9}{20}$. Si igitur fiat vt 7. ad 22. ita $146\frac{9}{10}$. palmi ad aliud; reperietur per 1. regulam Num. 2. cap. 7. lib. 4. huius, circunferentia circuli palm. $430\frac{9}{35}$. Ergo si rursus fiat, vt tota circunferentia gr. 360. ad palmos $430\frac{9}{35}$. ita arcus ADB, gr. 60. min. 28. ad aliud, inuenietur hic arcus pal. $72\frac{54513}{189000}$. hoc est, $72\frac{10}{39}$. paulo amplius.

THEOR. 9. PROPOS. 21.

IN omni triangulo quadratum maximi lateris minus est, quam duplum summæ quadratorum ex reliquis duobus lateribus descriptorum.

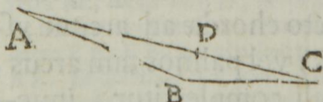
d 47.primi.

e 13 secd

f 20.primi.

g 4 secundi.

IN triangulo ABC, maximum latus sit AC, & angulus oppositus B, obtusus. Si namque rectus esset, vel acutus; *d* esset quadratum rectæ A C, vel æquale duobus quadratis rectarum AB, BC; *e* vel minus: ac proinde multo minus duplo summæ quadratorum AB, B C. Ex maiore latere A C, dematur AD, recta æqualis lateri A B. *f* Et quia duo latera A B, B C, maiora sunt latere A C; erit reliqua CD, minor latere B C; ac proinde duo quadrata AD, DC, minora duobus quadratis AB, B C. Est autem quadratum AC, minus duplo quadratorum AD, D C: *g* propterea, quod æquale est duobus quadratis A D, D C, vna cum rectangulo bis sub



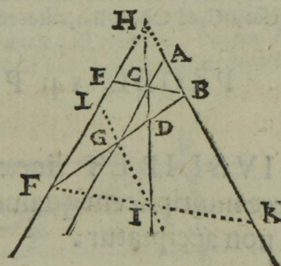
AD, DC;

AD,DC, quod quidem rectangulum bis, minus est duobus quadratis AD, DC, ex Lemmate propos. 39. lib. 10. Euclid. Multo ergo minus erit quadratum AC, duplo quadratorum AB, BC. quod erat demonstrandum.

PROBL. 13. PROPOS. 22.

DATIS tribus rectis vtcunque in plano non parallelis, nisi quando extremæ à media æqualiter distant, rectam lineam ducere, & quidem per datum punctum in media, si omnes tres in vno puncto conueniant; ita vt eius segmenta inter mediam, & extremas sint inter se æqualia, vel datam habeant proportionem.

SINT tres rectæ AB, CD, EF. Ducatur vtcunque recta BF, secans omnes tres. qua secta bifariam in G; si quidem punctum G, cadet in mediam, factum erit, quod iubetur. Si vero G, cadet extra lineam mediam CD, agatur per G, alteri extremarum, nimirum ipsi EF, (dummodo ei non æquidistet media CD) parallela AG, secans mediam in C. Cum enim CD, ponatur non æquidistare ipsi EF, secabit vtique productam EF, & proinde eius quoque parallelam AG. Quod si CD, ipsi EF, æquidistaret, ducenda esset per G, ipsi AB, parallela. Postremo ex B, puncto ductæ rectæ BF, sumpto in extrema AB, cui non æquidistat AG, ducatur per C, vbi parallela AG, mediam CD, secat, recta BC, secans EF, in E. Dico rectas BC, CE, æquales esse. Cum enim in triangulo BEF, recta CG, sit basi EF, parallela: *a* erit vt BG, ad GF, ita BC, ad CE; Sed BG, ipsi GF, per constructionem, æqualis est. Igitur & BC, ipsi CE, æqualis erit. *a 2. sexti.*

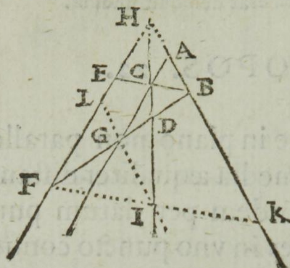


QVOD si per G, agatur ipsi AB, parallela GI, secans mediam CD, in I; erit ducta FIK, secta quoque bifariam in I: propterea quod in triangulo FBK, recta GI, basi BK, æquidistat; *b* ideoque sicut BF, in G, diuisa est bifariam, ita quoque FK, in I, bifariam secabitur. *b 2. sexti.*

EX his patet, cur media linea non debeat vtrique extremæ æquidistare, sed vel neutri, vel alteri tantum. Nam si vtrique æquidistaret, *c* recta per G, ducta parallela alterutri extremarum, æquidistaret quoque mediæ, ac proinde eam non secaret. Quod si neutri æquidistet, duci poterit per G, *c 30. primi.*

paral-

parallela vtri libet extremarum. Si vero vni extremarum æquidistet, ducenda erit per G, alteri parallela.



IAM vero si tres datæ rectæ coeāt in eodem pūcto productæ, vt in H, facilius erit problema, etiamsi in media linea detur punctum C, per quod duci debeat linea. Ducta enim per datum punctum C, in media, alterutri extremarum, vt ipsi HF, parallela CA, secante alteram extremam in A; & ipsi HA, æqualis capiatur AB, secabitur ducta BCE, in C, bifariam: *a* quippe cum sit BC, ad CE, vt recta BA, ad rectā AH, &c. Sic etiam si detur punctum I, in media; ducta per I, alterutri extremarum, vt ipsi HB, parallela LI, sumptaque ipsi HL, æquali LF, secabitur ducta FIK, in I, bifariam; *b* propterea quod est FI, ad IK, vt FL, ad LH, &c.

a 2. sexti.

b 2. sexti.

EADEM ratione ducemus lineam, quæ à media secetur in duas partes datam habentes proportionem. Si namque ducta BF, vtcunque secetur in datam proportionem in G, & reliqua fiant, vt supra; *c* erit rursus vt FG, ad GB, ita EC, ad CB; Vel vt BG, ad GF, ita BC, ad CE, prout videlicet proportio data est FG, ad GB, vel BG, ad GF. Sic etiā si tres rectæ datæ coeāt in H; ducta GA, ipsi EF, parallela, fiatque HA, ad AB, vt antecedens datæ proportionis ad consequens: si ducatur BCE, *d* erit EC, ad CB, vt HA, ad AB. Et si fiat HA, ad AB, vt consequens datæ proportionis ad antecedens, erit rursus BC, ad CE, vt BA, antecedens ad consequens AH.

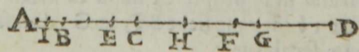
c 2. sexti.

d 2. sexti.

PROBL. 14. PROPOS. 23.

CVIVSLIBET lineæ, quamuis minimæ, exhibere multiplicem quamcumque, etiamsi circino ipsa non accipiatur.

SIT sumenda verbi gratia lineolæ AB, tripla. Extenso circino quantumlibet ex A, ad C, sumantur ipsi AC, duæ æquales CF, FD, vt tota AD, ipsius AC, sit tripla. Item ipsi CB, sumantur tres æquales DG, GH, HE. Dico AE, esse ipsius AB, triplam. Quoniam enim tam multiplex est tota AD, totius AC, quam multiplex est ablata DE, ablatę CB, nimirum tripla: erit quoque ita multiplex reliqua EA, reliquæ AB, vt tota totius, videlicet tripla. quod est propositum.



PROBL.

PROBL. 15. PROPOS. 24.

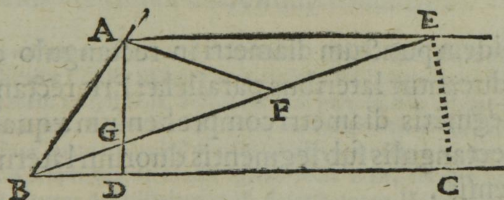
EX qualibet lineola, quamuis minima, auferre partem, vel partes imperatas.

IN figura præcedentis propos. sit ex lineola AB, detrahenda tertia pars. Per præcedentem sumatur ipsius AB, tripla AE, quæ, si videbitur nimis exigua, multiplicetur, vt libet. In exemplo quadruplicata est vsque ad D; ita vt AD, sit ipsius AB, duodecupla: (quod scietur, si numerus partium AE, nimirum 3. ducatur in numerum partium ipsius AD, ipsi AE, æqualium, nimirum in 4.) ac proinde si AB, diuisa esse intelligatur in 3. partes, tota AD, continebit tales partes 36. Quocirca si in instrumento partium lib. 1. cap. 1. constructo, interuallum AD, statuatur inter partes 36. 36. Deinde interuallum inter 35. 35. (nimirum tota AD, vna parte minus) transferatur ex D, ad I, erit AI, tertia pars ipsius AB, hoc est, pars trigesima sexta totius AD. Cum ergo AB, contineat tres trigesimas sextas partes totius AD, erit AG, ipsius AB, pars tertia. quod est propositum.

PROBL. 16. PROPOS. 25.

ANGVLVM datum rectilineum in tres æquales partes partiri.

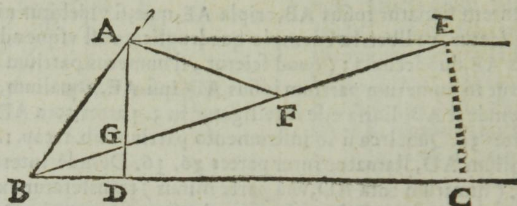
PROBLEMA hoc veteres Geometras diu, multumque exagitauit, neque ab vllo ad hanc vsque diem Geometrice est solutum. Pappus Alexandrinus inter alios illud soluere conatus est per descriptionem hyperboles.



Nos idem absoluemus per lineam Conchoideos, quam lib. 6. propos. 15. huius ex Nicomede descripsimus, hoc modo. Sit datus angulus acutus ABC: Demissa autem ex quouis puncto A, ad BC, perpendiculari AD, sumatur ipsius AB, dupla DC; Et polo B, interuallo autem DC, describatur linea

con-

Conchoideos CE, secans rectam AE, ipsi BC, ductam parallelam in E, ducaturque recta BE. Dico angulum CBE, esse tertiam partem dati anguli ABC; hoc est, angulum ABE, duplum esse anguli CBE, adeo vt diuiso angulo ABE, bifariam, totus angulus ABC, sectus sit in tres partes æquales. Quoniã enim ex descriptione Conchoideos, recta GE, ipsi DC, æqualis est; ac proinde ipsius AB, dupla: si secetur bifariam in F, erit vtraque semissis



ipsi AB, æqualis. a Quia vero circulus ex F, circa GE, descriptus transit per angulum rectum GAE, erit quoque ducta FA, vtrique semissi FE, FG, ideoque & ipsi AB, æqualis. b Igitur tam anguli FAE, FEA, quam AFB, ABF, æquales erunt. c Est autem externus AFB, duobus internis FAE, FEA, æqualis: ideoque ipsius FEA, duplus. Igitur & ABF, eiusdem FEA, d hoc est, alterni CBE, duplus erit.

a schol. 31. tertij.
b 5. primi.
c 32. primi.
d 29. primi

SI angulus datus rectus est, diuidetur in tres æquales angulos, vt in scholio propos. 32. lib. 1. Euclid. tradidimus.

SI vero est obtusus, secabimus eum bifariam, & semissem alterutram in tres partes æquales, vt docuimus hoc loco. Nam duæ partes tertiæ illius semissis efficient propositi anguli obtusi tertiam partem, vt perspicuum est.

Vid: Vitell. opt. lib. 1 prop. 28.

PROBL. 17. PROPOS. 26.

SI per idem punctum diametri in rectangulo duæ lineæ ducantur lateribus parallelæ: Erit rectangulum sub segmẽtis diametri comprehensum æquale duobus rectangulis sub segmentis duorum laterum comprehensis.

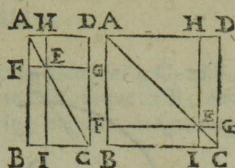
IN rectangulo BD, per E, punctum diametri AC, ductæ sint FG, HI, lateribus parallelæ. Dico rectangulum sub AE, EC, æquale esse rectangulis sub AF, FB, & sub BI, IC. e Quoniam enim quadratum ex AC, æquale est quadratis ex AE, EC, vna cum rectangulo bis sub AE, EC. f Sunt autem quadrata ex AB, BC, quadrato ex AC, æqualia; erunt quoque duo quadrata

e 4. secundi
f 47. primi.

ex AE,

ex AE,EC, vna cum rectangulo bis ſub AF, EC, æqualia quadratis ex AB, BC. *a* Sed quadratum ex AB, æquale eſt quadratis duobus ex AF, FB, vna cum rectangulo bis ſub AF, FB; Et quadratum ex BC, æquale eſt duobus quadratis ex BI,IC, vna cum rectangulo bis ſub BI, IC. Igitur duo quadrata ex AE, EC, vna cum rectangulo bis ſub AE,EC,æqualia erunt quatuor quadratis ex AF,FB, BI, IC, vna cum rectangulis bis ſub AF, FB, & ſub BI, IC. *b* Cum ergo quadratum ex AE, quadratis ex AF, FE, hoc eſt, ex AF,BI: & quadratum ex EC, quadratis ex EI, IC, hoc eſt ex FB, IC: æquale ſit; Erunt quatuor quadrata ex AF,BI, FB, IC, vna cum rectangulo bis ſub AE, EC, æqualia quatuor quadratis ex AF,FB,BI,IC,vna cum rectangulis bis ſub AF,FB,& ſub BI, IC; Ablatisque vtrobique prædictis quatuor quadratis communibus, erit reliquum rectangulum bis ſub AE,EC, reliquis rectangulis bis ſub AF, FB, & ſub BI,IC, æquale. Ideoque rectangulum ſemel ſub AE,EC,rectangulis ſemel ſub AF,FB,& ſub BI,IC,erit æquale.quod erat demonſtrandum.

a 4. *ſecundi*



b 47. *primi*

COROLLARIVM.

ITAQVE in quadrato, vt in poſteriori figura,rectangulum ſub ſegmentis diametri AE,EC,comprehenſum æquale eſt duobus complementis DE, BE,quippe cum complementa ſub ſegmentis laterum comprehendantur.

PROBL. 18. PROPOS. 27.

DATO centro Ellipſis in linea in infinitum producta, vna cum duobus punctis ad eaſdem partes axis, vel centri, per quæ tranſire dicatur Ellipſis: vtrumque axis vtriuſque extremum inuenire.

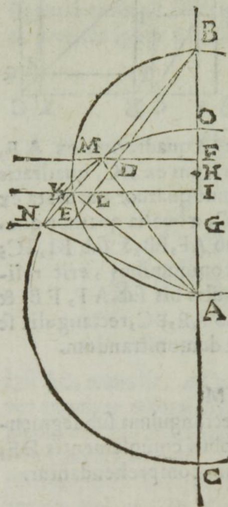
HOC problema conicum eſt,& acutum. Sit A, centrum,id eſt,punctum medium alicuius Ellipſis in linea axis maioris BC, quantacunque: Et duo puncta in eadem Ellipſi D,E, verſus eandem partem,hoc eſt,ſiue ſupra centrum A,ſiue infra; è quibus ad BC,perpendiculares ducantur DF,EG:Eritque DF,minor quam EG,quod perpẽdicularis remotior à centro minor ſemper ſit, quam propinquior. Ducta igitur recta ED, ſecabit lineam axis in B. Secta autem AB,bifariam in H, deſcribatur ex H, circa AB,ſemicirculus AKB. Diuiſa quoque FG, inter ductas perpendiculares bifariam in I, ducatur IK,ad AB, perpendicularis ſecans circumferentiam in K, & rectam BE, in L. Ducta quoque recta BK, ſecante perpendiculares DF, EG, in M, N, iungantur rectæ AM, AK,AN. *c* Et quoniam eſt, vt FI,ad IG, æqualem ita MK,ad KN, erit quoque MK, ipſi KN,æqualis. Igitur duo latera AK, KM,duobus lateribus AK, KN,æqualia erunt. Cum ergo & angulos æqua- c 2. *ſexti*.

 les

a 31. tertij.
b 4. primi.

les comprehendant, vt pote rectos, *a* quod angulus A K B, in semicirculo rectus sit; *b* erunt bases A M, A N, æquales. Circulus igitur ex A, per N, descriptus transibit per M, secabitque BC, in O, & C. Dico OC, esse axem Ellipsis maiorem. *c* Cum enim sit, vt M D, ad D F, ita N E, ad EG, transibit necessario Ellipsis, quæ per O, D, C, describitur, (posse autem Ellipsim describi circa O C, tamquam axem maiorem, per punctum D, constat ex ijs, quæ ad finem scholij propos. 8. lib. 1. Gnomonices, & in scholio Lemmatis 50. lib. 1. Astrolabij scripsimus) per punctum E, ex scholio Lemmatis 51. Astrolabij: Ac proinde Ellipsis per data puncta D, E, circa centrum A, descripta transibit per O, C: ita vt ab Ellipsi per O, D, C, descripta non differat. Alioquin Ellipsis Ellipsim in 8. punctis secaret, nimirum in D, E, & alijs duobus respondentibus ex altera parte axis: deinde in alijs 4. infra centrum respondentibus. quod est absurdum *d* quippe cum Ellipsis Ellipsim in 4. tantum punctis secet.

c schol. 4.



d 25. quinti Apollonij.

THEOR. 10. PROPOS. 28.

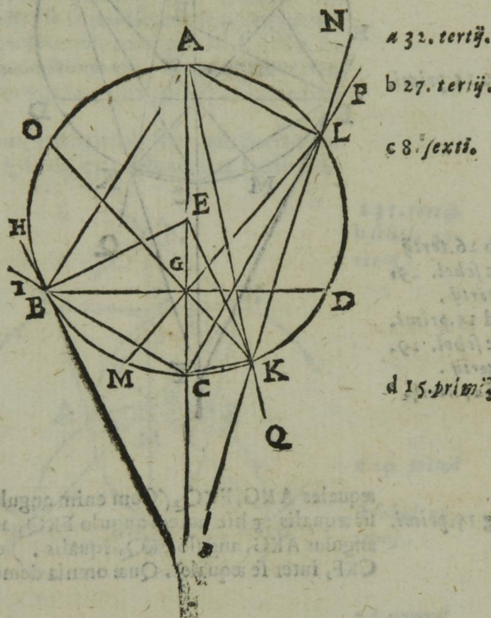
SI in circuli diametro producta punctum sumatur, ab eoque recta circulum tangens ducatur; à puncto autem contactus chorda ducatur ad diametrum perpendicularis: Recta ex eodem contactus puncto ad vtrumlibet extremum diametri ducta diuidet angulum à tangente, & prædicta chorda perpendiculari comprehensum bifariam. Item si ab eodem puncto in diametro producta assumpto recta ducatur circulum secans, & ab alterutro sectionis puncto ad intersectionem diametri cum prędicta chorda perpendiculari recta iungatur: Recta ex eodem sectionis puncto ad vtrumlibet diametri extremum ducta secabit quoque angulum à linea secante, & illa alia,

quæ

quæ per interſectionẽ diametri cum prædicta chorda perpendiculari ducitur, bifariam.

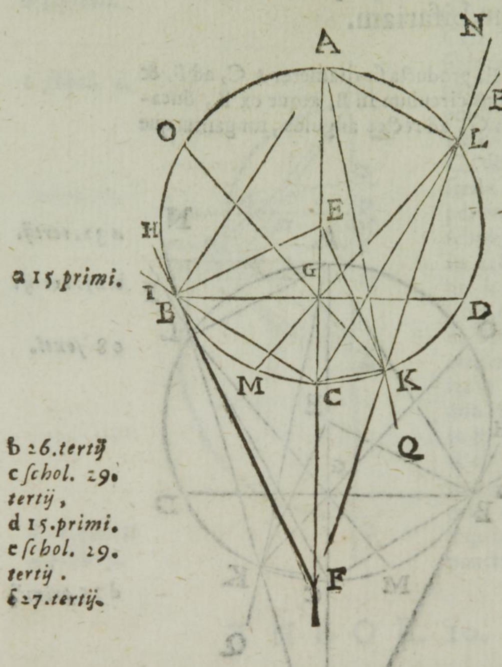
IN circulo ABCD, cuius centrum E, producta ſit diameter A C, ad F, & ex F, ducatur primum recta FH, tangens circulum in B, atque ex B, ducatur chorda B D, ſecans diametrum in G, ad rectos angulos, iunganturque ad extrema diametri rectæ BC, B A. Dico tam angulos CBF, CBG, quam (producta FB, ad H,) angulos ABH, ABG, eſſe æquales. *a* Quoniam enim angulus CBF, angulo BAC, in alterno ſegmento æqualis eſt, *b* & angulus C BD, eidem angulo BAC, æqualis, ob arcus æquales C B, C D; *c* (vel etiam angulus CBG, angulo BAC, æqualis eſt; quod BG, in triãgulo rectangulo A B C, ad baſem AC, perpendicularis ſit) erunt anguli CBF, C B G, inter ſe quoque æquales. Producta autem C B, ad I, ſi ex rectis angulis A B C, ABI, tollantur æquales CBG, H B I, (*d* cum enim C B F, æqualis ſit angulo H B I, ad verticem: & angulus C B G, angulo C B F, oſtenſus æqualis; erit quoque angulus CBG, angulo HB I, æqualis.) erunt quoque reliqui anguli A B G, A B H, inter ſe æquales. quod eſt primum.

a 32. *tertij.*
b 27. *tertij.*
c 8. *ſexti.*
d 15. *primi.*



DEINDE ducatur recta F N, ſecans circulum in K, L, ductiſque rectis KGO, LGM, per G, iungantur tam rectæ KC, KA, quam LC, LA, ad extrema diametri Dico rurſus, tam angulos CLF, CLG, quam ALG, ALN: Item tam CKF, CKG, quam AKG, AKL, eſſe æquales. Ductis enim ex centro rectis E B, EK; *e* erit angulus EBF, rectus: *f* Igitur erit FB, media proportionalis inter EF, FG: *g* Ideoque rectangulum ſub EF, FG, quadrato ex FB, æquale erit; *h* Eſt autem eidem quadrato ęquale quoque rectangulum ſub LF, FK. Igitur rectangulum ſub EF, FG, rectangulo ſub L F, FK, æquale erit: *i* Ac proinde erit vt EF, prima ad FK, ſecundam, ita LF, tertia ad FG, quartam. Quare cum triangula EFK, LFG, habeant latera circa communem angulum F, proportionalia; k erunt anguli FEK, FLG, homologis lateribus FK, FG, oppoſiti æquales. *l* Eſt autem angulus FEK, in centro anguli CLK, ad circunfe-

e 18. *tertij.*
f *coroll.* 8. *ſexti.*
g 17. *ſexti.*
h 36. *tertij.*
i 16. *ſexti.*
k 6. *ſexti.*
l 20. *tertij.*



rentiam, (cum habeant eandem basem CK,) duplus. Igitur & angulus FLG, eiusdem anguli CLK, duplus erit; Ac proinde angulus F L G, sectus erit bifariam à recta L C, hoc est, anguli C L F, C L G, æquales erunt. Producta autem C L, ad P, si ex rectis angulis ALC, ALP, demantur æquales anguli CLG, PLN, (Cum enim CLF, ostensus sit æqualis angulo CLG, *a* & CLF, æqualis sit angulo PLN, ad verticem, erit quoque C L G, eidem angulo P L N, æqualis.) erunt quoque reliqui anguli ALG, ALN, æquales. Rursus quia anguli CLK, CLM, ostensi sunt æquales; *b* erunt arcus CK, CM, æquales. *c* Igitur anguli CGK, C G M: *d* Ideoque & anguli AGO, A G L, ad verticem æquales erunt: *e* Ac proinde arcus etiam A O, A L, æquales erunt: *f* ideoque & anguli AKO, AKL, erunt æquales. Producta autem AK, ad Q, si ex rectis angulis C K A, CKQ, auferantur æquales AKG, FKQ, (Cum enim angulus A K G, angulo A K L, ostensus sit æqualis: *g* hic autem angulo FKQ, ad verticem sit æqualis; erit quoque angulus AKG, angulo FKQ, æqualis.) erunt etiam reliqui anguli C K G, CKF, inter se æquales. Quæ omnia demonstranda erant.

a 15. primi.

b 26. tertij
c schol. 29. tertij,
d 15. primi.
e schol. 29. tertij.
f 27. tertij.

g 15. primi.

SCHOLIVM.

HOC Theorema valde vtile est ad descriptionem paralleli cuiusuis circuli maximi per datum punctum in Astrolabio, vt ex propos. 18. lib. 2. Astrolabij perspicuum est: cum multa ibi demonstrari possint per hoc Theorema, sine ijs, quæ ex Astrolabij descriptione pendent.

THEOR. 11. PROPOS. 29.

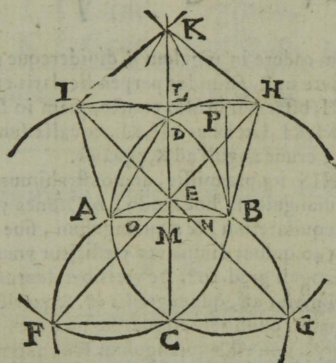
DESCRIPTIONEM Pentagoni æquilateri, & æquianguli supra datam rectã ab Alberto Durero

tra-

traditam, & quam omnes fere Architecti, atque artifices approbant, falsam esse, demonstrare.

PRAXIS hæc est. Sit data recta A B. Ex centris A, B, & interuallo eodem A B, describantur duo circuli se se intersecantes in C, D. Ducta autem CD, quantacunque, describatur eodem interuallo AB, ex C, per A, B, circulus rectam CD, in E, & priores circulos secans in F, G. Item ducantur ex F, G, per E, rectæ secantes priores circulos in H, I. Denique eodem interuallo ex H, I, duo arcus descripti se se intersecent in K, iunganturque rectæ AI, IK, KH, HB. Putat ergo *Durerus*, pentagonum A B H K I, esse æquilaterum, & æquiangulum. quod falsum est. Nam æquilaterum quidem est, ex descriptione, non autem æquiangulum. quod vt manifestum fiat, demonstranda sunt prius nonnulla,

1 ARCVS tres FA, AB, BG, sextæ partes circuli sunt, quod rectæ eos subtendentes semidiametri sint circuli FABG, ex constructione. Igitur FAB G, semicirculus est, cuius diameter F G; *a* ideoque angulus FEG, in semicirculo rectus: *b* Et diameter F G, rectæ A B, parallela, ob arcus A F, BG, æquales. Et quoniam, vt constat ex demonstratione praxis scholij propos. 10. & 11. lib. 1. Euclid. recta CD, secat rectam AB, bifariã in M, & ad angulos rectos; *c* secabit eadem parallela quoque FG, ad angulos rectos in C. *d* Eadem quoque C D, secabit arcum A B, bifariam in E, ac propterea toti arcus EF, EG, æquales erunt, videlicet quadrantes; *e* ideoque rectæ EF, EG, latera sunt quadrati in circulo FABG, descripti, eiusque diameter F G. *f* Igitur anguli F, G, semirecti erunt: ac proinde cum anguli ad C, recti sint, *g* erunt quoque OEM, NEM, semirecti; ideoque & E O M, E N M, semirecti. *h* Ac proinde tam latera E M, M O, quam EM, MN, æqualia: atque idcirco & OM, NM, inter se æqualia erunt; nec non & totæ OB, NA, æquales erunt. *i* Immo & EO, EN, erunt æquales, quod latera E M, M O, lateribus E M, M N, æqualia sint, comprehendantque angulos æquales, vtpote rectos.



a 31. *tertij.*
b *schol.* 27. *tertij.*
c 29. *primi*
d *schol.* 27. *tertij.*
e 6. *quarti*
f *schol.* 34. *primi.*
g 32. *primi*
h 6. *primi.*
i 4. *primi.*

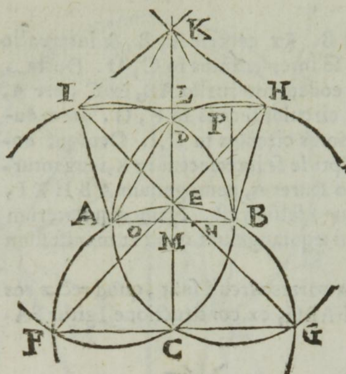
2 DEINDE quia latera AN, AI, lateribus BO, BH, æqualia sunt; suntque anguli N, O, semirecti æquales, & vterque reliquorum angulorum I, H, minor recto; *k* quod vterque minor sit semirecto ad O, & N; propterea quod tam latus AN, minus est latere AI, quam latus B O, latere B H: erunt per ea, quæ ad finem lib. 1. Euclid. demonstrauimus, tam bases N I, OH, quam anguli A, B, & I, H, æquales. Igitur duo anguli A, B, in pentagono æquales inter se sunt.

k 19. *primi.*

3 RVR-

a 5.*primi.* 3 RVRSVS demptis OE, NE, æqualibus ex æqualibus OH, NI, reliquæ rectæ E H, E I, æquales sunt: *a* erunt anguli EIH, EHI, æquales, ac proinde semirecti, cũ HEI, sit rectus: *b* Sunt autem & anguli H, I, in Isoscele KIH, æquales. Igitur toti anguli H, I, in pentagono æquales sunt.

b 5.*primi.*



4 POSTREMO cum latera EL, EI, lateribus EL, EH, sint æqualia, contineantque angulos æquales semirectos; *c* erunt & bases LI, LH, æquales, & anguli ad L, ideoque recti. Ex quo efficitur, *d* rectas AB, HI, esse parallelas: *e* quod etiã constat ex eo, quod alterni anguli INA, NIH, æquales sint; nimirum semirecti. Hinc etiam sequitur, rectam CDL, productam cadere in angulum K, diuidereque eum bifariam. Si enim dicatur non cadere in K, *f* diuidet perpendicularis ex K, ad HI, demissa basem Isoscelis KIH, bifariam in alio puncto, quam in L, quod est absurdum. Quia ergo latera KI, KL, lateribus KH, KL, æqualia sunt, & basis IL, basi HL, ostensa æqualis: *g* erunt anguli ad K, ęquales.

c 4. *primi.*

d 28.*primi.*

e 27.*primi.*

f *schol.* 26. *primi.*

g 8.*primi.*

HIS ita præmissis, demonstrabimus iam pentagonum ABHKI, non esse æquiangulum, hoc modo. *h* Omnes 5. anguli in pentagono quolibet, siue sit æquilaterum, & æquiangulum, siue non, æquales sunt 6. rectis, hoc est, gr. 540. quibus diuisis per 5. efficitur vnus angulus pẽtagoni æquilateri, & æquianguli grad. 108. At vterlibet duorum angulorum A, B, in pentagono Dureri maior est, quam grad. 108. & vterlibet duorum H, I, minor, & angulus K, maior quolibet reliquorum quatuor, vt ostendemus. Igitur pentagonum Dureri non est æquiangulum. Hoc autem ita fiet perspicuum.

h *schol.* 32. *primi.*

QVONIAM posito sinu toto AB, 10000000. eius semissis BM, sinus videlicet grad. 30. est 5000000. cui si addatur MO, id est, ME, sinus versus grad. 30. nimirum 1339746. fiet tota BO, 6339746. Quia ergo in triangulo BHO, duo latera dantur BH, 10000000. & BO, 6339746. vna cum angulo O, grad. 45, nec non cum specie anguli H, qui supra ostensus fuit recto minor: *i* Si fiat,

i 15. triang. rectil.

Vt latus BH, 10000000.	*ad* 7071068. *sinum anguli O, grad.* 45.	*Ita latus BO,* 6339746.	*ad aliud,*

inuenietur sinus anguli BHO, 4482877 $\frac{1}{2}$. ferme, qui in tabula sinuum offeret ipsum angulum grad. 26. min. 38. cui si addatur angulus BOH, grad. 45. fiet summa angulorum H, O, grad. 71. min. 38. quę summa dempta ex duobus rectis, id est, ex grad. 180. relinquet angulum OBH, grad. 108. min. 22.

Igitur

Igitur vterque angulus A,B,in pentagono maior est vero angulo pentagoni grad. 108.

DEINDE ducta BP, ad H I, perpendiculari, si iterum statuatur BH, sinus totus 10000000.erit HP,3150970. anguli HBP,grad. 18. min. 22. qui relinquitur, si rectus angulus ABP,grad. 90. detrahatur ex angulo A B H, inuento grad.108.min.22.Si igitur addatur PL,5000000. *a* cum sit æqualis ipsi BM,semissi sinus totius, fiet tota HL, sinus anguli H K L, 8150970. Ac propterea angulus ipse erit grad.54.min.36.qui duplicatus dabit totum angulum H K I, grad. 109. min. 12. maiorem vero angulo pentagoni grad.108. a 34.*primi.*

I A M vero si summa trium angulorum A,B,K,inuentorum, nimirum grad.325.min.56. auferatur ex grad. 540. summa omnium 5. angulorum pentagoni, reliqua fiet summa angulorum H, I, grad.214.min.4. Ac proinde vterque erit grad. 107. min. 2. minor vero angulo pentagoni grad. 180. Non ergo æquiangulum est Dureri pentagonum, sed solum æquilaterum. Omnes tamen 5. anguli conficiunt summam grad.540.sicut in pentagono æquilatero, atque æquiangulo, vt hæc formula indicat.

Angulus	A	Grad.	108	min.	22
	B	Grad.	108	min.	22
	H	Grad.	107	min.	2
	I	Grad.	107	min.	2
	K	Grad.	109	min.	12
Summa			540	min.	0

S C H O L I V M.

S V N T alij nonnulli,qui ad interuallũ cuiusuis rectæ AB, descriptis ex centris A,B,duobus circulis se intersecantibus in C, D, vt in superiori figura,ducunt rectam AD,affirmantq. AD, latus esse pentagoni in circulo,cuius semidiameter DM, inscripti. sed toto coelo aberrant. Est enim AD, minus latere pentagoni circuli prædicti. *b* Nam quia latus pentagoni potest & latus hexagoni, & latus decagoni circuli eiusdem: *c* Potest autem AD,rectas DM, MA; *d* & DM, latus est hexagoni in circulo, cuius semidiameter DM, esset AM, latus decagoni in eodem circulo. quod falsum est. Quoniam enim latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quod duo latera decagoni supra latus Pentagoni constituant Isosceles *e* in quo duo latera maiora sunt latere pentagoni: Erit AM, semissis ipsius A B, vel A D, minor latere decagoni. Igitur A D, minor est latere pentagoni; *f* quando, quidem latus pentagoni potest & latus hexagoni D M, & latus decagoni quod maius est,quam AM,semissis ipsius AD,vt diximus.

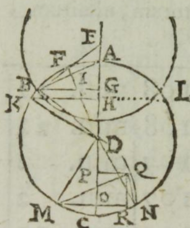
b 10. *tertij-decimi.*
c 47.*primi.*
d *coroll.*15. *quarti.*
e 20. *primi*
f 10. *tertij-decimi.*

THEOR. 12. PROPOS. 30.

INVENTIONEM lateris heptagoni in dato cir-

culo non rectè à quibuſdam tradi, demonſtrare.

CAROLVS Marianus Cremonenſis totum vnum libellum edidit de inuentione lateris heptagoni in circulo dato, in quo probare conatur, latus heptagoni reperiri hac ratione. Sit circulus ABC, cuius centrum D, diameter CA, in qua producta capiatur AE, æqualis quartæ parti ſemidiametri AD, ita vt AE, quinta pars ſit rectæ DE. Deſcripto autem ex E, ad interuallum ſemidiametri A D, circulo ſecante datum circulum in B, iungatur recta A B, quam dicit eſſe latus heptagoni, quod falſum eſſe, ita oſtendemus. Si AB, eſſet verum latus heptagoni, & ducta BE, æquali ſemidiametro D B, (quod fiet, ſi ex B, ad interuallum ſemidiametri recta DE, ſecetur in E,) ſecante arcum A B, in F, diuideretur arcus AB, in F, vel angulus A D B, bifariam. quod tamen in eius deſcriptione non contingit, vt demonſtrabitur. Non ergo eius linea A B, verum latus eſt heptagoni. Ductis enim rectis D B, D F, ſi A B, eſt ſeptima pars circunferentiæ, continebit tam angulus ADB, quam DEB, (a qui æquales ſunt) $\frac{2}{7}$. vel $\frac{4}{14}$. duorum rectorum. b Ergo reliqui DAB, DBA, ſimul continebunt $\frac{5}{7}$. vel $\frac{10}{14}$. duorum rectorum. Ac proinde vterque ipſorum continebit $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. c Cum ergo DAB, æqualis ſit duobus E, & A B E, continebunt etiam hi ſimul $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. Continet autem E, ſolus $\frac{4}{14}$ duorum rectorum. Igitur ABE, continebit $\frac{1}{14}$. duorum rectorum. d Et quia ADF, duplus eſt ipſius ABE, propter eandem baſem A F, continebit angulus ADF, $\frac{2}{14}$. id eſt, $\frac{1}{7}$. duorum rectorum. Cum ergo totus ADB, complectatur $\frac{2}{7}$. vt dictum eſt, continebit quoque B D F, $\frac{1}{7}$. duorum rectorum; ideoque æquales erunt ADF, BDF,



a 5. primi.
b 32. primi.
c 32. primi.
d 20. tertij

SED iam AB, ſit inuenta per conſtructionem prædicti auctoris; eritque EB, æqualis ipſi DB. Si ergo AB, eſſet verum latus heptagoni, caderet D I, perpendicularis, diuidens nimirum angulum ADB, bifariam, in F, quod verum non eſt. Poſita enim BE, 4. erit tota CE, 9. & DE, 5. e Cum ergo ſit, vt BD, ad DE, ita BF, ad FE; (quod angulus ADB, ſectus ſit bifariam) erit componendo, ſumma ex BD, DE, nimirum 9. ad DE, 5. vt B E, ad F E. Si igitur fiat, vt 9. ad 5. ita BE, 4 ad aliud, inuenietur FE, $2\frac{2}{9}$. ac propterea rectangulum ſub B E, 4. & EF, $2\frac{2}{9}$. erit $8\frac{8}{9}$. & rectangulum ſub CE, 9. & EA, 1. erit 9. quod eſt abſurdum; f cum hæc rectangula ſint æqualia. Non ergo recta D I, cadit in punctum F, interſectionis rectæ B E, cum arcu AB, quandoquidem rectangulum ſub BE, EF, æquale non eſt rectangulo ſub C E, E A, ſed minus: Ac proinde non recte illa ratione latus heptagoni inuenitur.

e 3. ſexti.
f 1. corol. 36 tertij.

ALBERTVS Durerus ad KL, latus trianguli æquilateri (ſumptis videlicet arcubus AK, AL, quorum vterque ſextam partem circunferentiæ contineat) perpendicularem ducit A H, dicitque K H, ſemiſſem illius lateris eſſe latus heptagoni. quod ſimiliter falſum eſt. Nam KH, omnino æqualis

eſt

eſt rectæ AB, quam proxime demonſtrauimus non eſſe latus heptagoni. Si enim iungeretur recta AK, fieret triangulum æquilaterum AKD. *a* Igitur perpendicularis KH, diuidet AD, biſariam: Ac proinde poſita DK, vel DA, 4. erit DH, 2. Quocirca ſi detrahemus 4. quadratum DH, ex 16. quadrato DK, *b* reliquum erit quadratum KH, 12. At tantum etiam depreh endemus eſſe quadratum AB. Quoniam enim quadratum BE, eſt 16. hoc eſt, $\frac{64}{4}$. & quadratum EG, $\frac{25}{4}$. (Nam perpendicularis BG, ſecat in Iſoſcele EBD, baſem ED, biſariam. Cum ergo ED, ſit 5. erit DG, $2\frac{1}{2}$. cuius quadratum eſt $\frac{25}{4}$.) *c* erit quadratum BG, $\frac{39}{4}$. Sed quadratum AG, eſt $\frac{9}{4}$. quod recta AG, ſit $1\frac{1}{2}$. *d* Igitur quadratum AB, erit $\frac{48}{4}$. id eſt, 12. quod eſt propoſitum.

a ſchol. 26. primi.
b 47. primi.
c 47. primi.
d 47. primi.

FRANCISCVS Fluſſas Candalla vir nobiliſſimus, ac doctiſſimus conatus eſt conſtruere triangulum Iſoſceles habens vtrumuis angulorum æqualium ad baſem triplum reliqui anguli, vt beneficio ipſius in dato circulo heptagonum inſcribatur, vt in ſcholio propoſ. 16. lib. 4. Euclid. tradidimus. Ita ergo ſcribit. Sit triangulum æquilaterum DMN, in quo perpendicularis DO, ad baſem ſecetur biſariam in P. Deſcripto deinde ex M, per N, D, circulo, quem ſecet perpendicularis PQ, in Q, iungantur rectæ QN, MQ. Dicit igitur, in Iſoſcele MNQ, vtrumlibet angulorum N, Q, triplum eſſe anguli M. quod falſum eſſe, hinc intelligi poteſt. Demiſſa perpendiculari QR, pro ſinu arcus QN, vel anguli N, poſito ſinu toto MQ, vel MN, 10000000. *e* Quoniam latus DN, potētia ſeſquitertium eſt perpendicularis DO, ſi fiat vt 4. ad 3. ita 100000000000000. quadratum lateris DN, ad aliud, reperietur quadratum DO, 75000000000000. *f* quod cum ſit quadruplum quadrati PO, vel QR, erit quadratum QR, 18750000000000. ipſumque latus QR, erit 4330127. vero minus, vel 4330128. vero maius, cui in tabula ſinuum (adhibita parte proportionali) reſpondent grad. 25. min. 39. ſec. 32. pro arcu QN, vel angulo NMQ, quo ablato ex duobus rectis, ſiue ex grad. 180. reliqua erit ſumma angulorum æqualium ad baſem QN, grad. 154. min. 20. ſec. 28. atque idcirco vterque complectetur grad. 77. min. 10. ſec. 14. qui maior eſt, quam triplus anguli NMQ, grad. 25. min. 39. ſec. 32. cum hic angulus triplicatus efficiat tantummodo grad. 76. min. 58. ſec. 36. Falſum ergo eſt, quod Candalla nititur probare. Paralogiſmos tum Caroli Mariani, tum Candallæ, quos committunt, non eſt huius loci manifeſtare: ſatis nobis eſt, indicaſſe eos non rectè deſcripſiſſe heptagonum æquilaterum, & æquiangulum.

e 12. quarti decimi.
f ſchol. 4. ſecundi

THEOR. 13. PROPOS. 31.

OCTOGONVM æquilaterum & æquiangulum circulo inſcriptum medio loco proportionale eſt in-

ter quadratum eidem circulo circumſcriptum, & quadratum inſcriptum.

HOC Theorema eſt Orontij, quod facile ita demonſtrabitur. Sit circulus ABCD, cuius centrum E; duæ diametri AC, BD, ſecantes ſe ſe in E, ad angulos rectos. Iunctis ergo rectis AB, BC, CD, DA, erit quadratum circulo inſcriptum ABCD, vt ex demonſtratione propoſ. 6. lib. 4. Eucl. conſtat. Ducantur quoque per A, B, C, D, perpendiculares ad diametros coeuntes in F, G, H, I, eritque quadratum circulo circũſcriptum FGHI, vt patet ex demonſtratione propoſ. 7. lib. 4. Euclid. Ductis autem diametris FH, GI, *a* ſecabũtur quadrantes AB, BC, CD, DA, bifariam; propterea quod anguli in centro ſunt omnes æquales, *b* nimirum ſemirecti: *c* ac proinde & latera quadrati inſcripti diuiſa erũt bifariam, & ad angulos rectos. Et ſi iungantur rectæ, AK, KB, &c. deſcriptum erit octogonum intra circulum. Dico ita eſſe quadratum exterius ad octogonum, vt octogonum ad quadratum interius. Quoniam enim triangula AEF, EAL, æquiangula ſunt, quod rectos habeãt angulos, & ſemirectos: *d* Erit EF, ad FA, hoc eſt, ad EK, (eſt nãq. EK, ipſi EA, hoc eſt, ipſi AF, æqualis) vt EA, hoc eſt, vt EK, ad AL, hoc eſt, ad EL, *e* q AL, EL, ſint æquales, propter angulos ſemirectos A, E, in triãgulo AEL. Sunt ergo tres rectæ EF, EK, EL, cõtinue proportionales. Igitur & triangula AEF, AEK, AEL, continue erunt proportionalia: *f* cum baſibus EF, EK, EL, ſint proportionalia; *g* Ac proinde & eorum octupla continue erunt proportionalia, quadratum videlicet FGHI, octogonum AKBCDA, & quadratum ABCD; quippe cum prædicta triangula ſint harum figurarum octauæ partes, vt liquet. Octogonum igitur medio loco proportionale eſt inter quadrata FGHI, ABCD, quod demonſtrandum erat.

a 27. tertij.

b ſchol. 34. primi.

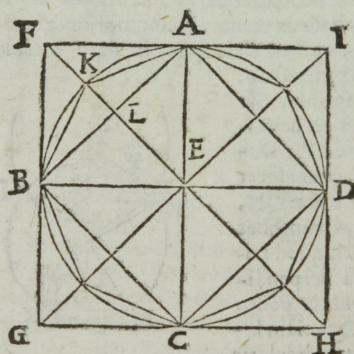
c ſchol. 27. tertij.

d 4. ſexti.

e 6. primi.

f 1. ſexti.

g 15. quinti



THEOR. 14. PROPOS. 32.

SI ex diametro quadrati detrahatur ipſius latus: Reliqua linea erit latus alterius quadrati, cuius diameter eſt linea, quæ relinquitur, ſi latus inuentum bis

ex diametro prioris quadrati auferatur; vel si idem latus inuentum ex prioris quadrati latere tollatur.

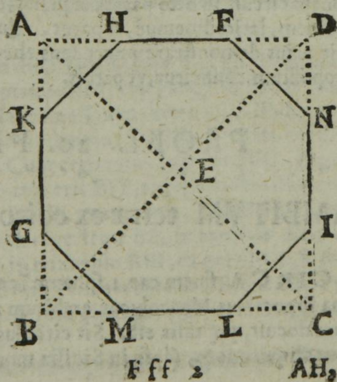
EX diametro BD, quadrati ABCD, abscindatur recta BE, lateri AB, æqualis, & ex eadem diametro dematur reliqua DE, bis vsque ad F, ita vt EF, sit ipsi DE, æqualis: vel (quod idem est) reliqua DE, siue EF, illi æqualis ex latere AB, hoc est, ex BE, auferatur. Dico DE, vel EF, latus esse quadrati, cuius diamerer BF. Ductis enim per F, rectis GH, IK, parallelis ipsis AD, AB; *a* erunt GK, HI, circa diametrum quadrata. Dico rectam EF, vel DE, æqualem esse lateri BG, quadrati GK, cuius diameter BF, reliqua fuit post detractionem DE, bis ex diametro BD. *b* Quoniam enim quadratum ex DF, duplum est quadrati ex IF, siue ex AG, *c* & quadruplum quadrati ex EF; si quadratum ex DF, ponatur 4. erit quadratum ex AG, 2. & quadratum ex EF, 1. Ac proinde quadratum ex AG, duplum erit quadrati ex EF. *d* Est autem & quadratum ex BF, quadrati ex BG, duplum. *e* Igitur erit vt recta AG, ad rectam EF, ita recta BF, ad rectam BG; quandoquidem quadrata earum proportionalia sunt, habentia nimirum proportionem duplam. Capiatur BL, ipsi BF, æqualis ita vt reliqua LA, reliquæ FE, æqualis sit. Erit igitur quoque AG, ad AL, vt BF, siue BL, ad BG; Et diuidendo GL, ad LA, vt GL, ad BG. *f* Quocirca AL, siue EF, & BG, æquales sunt, quod erat ostendendum.

a coroll. 4. secundi.
b schol. 47. primi.
c schol. 4. secundi.
d schol. 47. primi.
e 22. sexti.
f 9. quinti.

PROBL. 19. PROPOS. 33.

OCTOGONVM æquilaterum, & æquiangulum ad datam altitudinem, latitudinemve constituere.

SIT ad altitudinem datam AB, construendum octogonum æquilaterum, & æquiangulum. Descripto ex AB, quadrato ABCD, ductisque diametris AC, BD, se in E, secantibus bifariam, & ad angulos rectos; abscindantur ad interuallum EA, ex quatuor angulis quadrati rectæ æquales AF, AG; DH, DI; BK, BL; CM, CN, iunganturque rectæ HK, GM, LI, NF. Dico octogonũ FHKGMLIN, esse æquilaterum, & æquiangulum. Quoniam enim rectæ



AH, AK; BG, BM; CL, CI; DF, DN, relinquūtur post detractionem rectæ AE, ex lateribus æqualibus quadrati ABCD, ipsæ inter se æquales erunt; ideoque & earum quadrata erunt æqualia. *a* Cū ergo quadratum ex KH, æquale sit quadratis ex AH, AK, ipsum duplum erit tam quadrati ex AH, quam quadrati ex AK. Quia vero AB, diameter est quadrati ex AE, descripti, abscissaque est recta BK, lateri AE, æqualis; *b* erit reliqua AK, latus quadrati, cuius diameter GK, quæ relinquitur post detractionem ipsius AK, bis ex diametro AB, vel ex latere AG, semel. *c* Igitur & quadratū ex GK, duplū erit quadrati ex KA: ac proinde quadrata ex KH, KG, æqualia inter se erunt; ideoq. & rectæ KH, KG, æquales erunt. Eadem ratione ostendemus, eandem GK, æqualem esse rectæ GM; & GM, æqualem rectæ ML, & sic de cœteris. Æquilaterum ergo est octogonum. *d* Quoniam autem bini anguli ad H, K, G, M, L, I, N, F, æquales sunt duobus rectis; *e* suntque anguli acuti versus angulos quadrati omnes inter se æquales: *f* immo semirecti, quod KH, GM, &c. sint diametri quadratorum ex lateribus AH, GB, &c. descriptorum: Erunt reliqui anguli obtusi in octogono æquales; ideoque octogonum æquiangulum etiam est. quod est propositum.

a 47. primi.
b 32. huius.
c schol. 47. primi.
d 13. primi.
e 4. primi.
f schol. 34. primi.

A H F D
K N
E
G I
B M L C

SCHOLIVM.

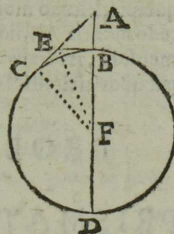
HÆC praxis, quam ante aliquot annos a quodam architecto sine demonstratione tamen accepi, pulcherrima est: quippe quæ non requirat diuisionem circuli in octo partes æquales, & describat octogonum ad datam altitudinem, latitudinemuè, vt patet. Quam praxem vt demonstrarem, oportuit prius demonstrare præcedens theorema. Ex eo enim facile problema propositum conficitur, vt patuit.

PROBL. 20. PROPOS. 34.

AMBITVM terræ ex edito aliquo monte metiri.

CIRCA finem cap. 1. sphæræ Ioan. de Sacro bosco proposui rationem, qua Franciscus Maurolycus ambitum terræ ex edito aliquo monte inuestigare docuit, quę talis est. Sit circulus terræ BCD, in quo eligatur editissimus aliquis mons, (ipse in Sicilia montem Aetnam ad hoc negotium cen-

fuit eligendum) cuius altitudo A B, inquiratur vel per Quadrantē, vt lib. 2. problem. 2. 3. & 4. docuimus, vel per Quadratum Geometricum, vt lib. 3. problem. 6. 7. 8. & 9. Vel potius vt in scholio problem. 7. ac 9. tradidimus. Deinde ex A, vertice montis mensuretur totum illud spacium pelagi, seu terræ, (vbi tamen montes non sint) quod inde conspicitur, ita vt radius AC, maris vel terræ superficiem contingat in C. Hoc autem fiet per ea, quæ in problematibus citatis tradita sunt. Ex his postea explorat magnitudinem lineæ tangentis A C; *a* propterea quod eius quadrato æqualia sunt quadrata AB, BC, (sumpto spacio BC, pro linea recta) *b* cuius quadratum æquale est rectangulo sub AD, AB. quo diuiso per A B, altitudinem montis, prodibit in Quotiente recta AD; ex qua si dematur altitudo montis A B, nota relinquetur diameter terræ B D. *c* Ac proinde circumferentia BCD, cognita fiet.



a 47. *primi.*

b 36. *tertij.*

c *coroll. 2. de Dimens. ciculi lib. 4. huius.*

SED quia in hac ratione metiendi ambitus terrestris assumitur, arcum BC, à linea recta non differre. quod verum non est, quando mons tam altus est, vt spacium 200. vel 300. milliariorum cerni possit, quod tunc arcus B C, iuxta ambitum à Ptolemæo positum contineat grad. 3. min. 11. vel grad. 4. min. 48. Ac proinde non recte linea tangens AC, ex lateribus AB, BC, colligitur. Adde quod per problemata lib. 2. & 3. citata inuenitur perpendicularis BE, in plano, ad quod mons est ad angulos rectos: Redigemus rationem hanc ad meliorem formam multis vijs, hoc modo. Deprehenso angulo A, per Quadrantem, vel Quadratum, quando radius visualis per dioptram circulum terræ tangit. Quod tum denique certissime fiet, cum per dioptram conspicitur Sol, aut alia stella, quando oritur, vel occidit. Deprehenso, inquā, angulo A, inuenienda erit perpendicularis BE, per problemata paulo ante citata. *d* Et recta AE, ex duabus AB, BE. Si enim ad AE, adijcietur BE, hoc est, EC, *e* quæ ipsi BE, æqualis est, nota fiet tota tangens A C, ex qua, vt supra dictum est, & diameter terræ BD, & circunferentia inuestigabitur. Quin etiam cognito angulo A, ac proinde & eius complemento E, *f* reperietur tam latus BE, *g* quam basis AE, sine problematibus ex lib. 2. & 3. citatis, &c.

d 47. *primi.*

e 2. *coroll. 36. tertij.*

f 4. triang. rectil.

g 5. triang. rectil.

VEL sic agemus. Cognito per dioptram angulo A, cognitus etiam erit (ducta recta FC, *h* quæ ad AC, perpendicularis erit) angulus F, eius complementum in centro. Quia vero ducta recta FE, duo latera EC, CF, duobus lateribus EB, BF, æqualia sunt, comprehenduntque angulos æquales, nempe rectos: *i* erunt anguli ad F, æquales. Cum ergo totus angulus BFC, cognitus sit, vt proxime diximus; cognitus etiam erit BFE, tamquam semissis ipsius: ac proinde & eius complementum B E F, notum erit. Igitur in triangulo ABE, ex angulis A, F, & latere AB, k reperietur BE, in partibus altitudinis mōtis AB, notæ. Atque eodē modo in triangulo BEF, ex angulis E, F, & latere BE, cognoscetur semidiameter BF, in partibus lateris BE, hoc est, in partibus altitudinis montis AB; ideoque & tota diameter BD, nota fiet, & ex hac ambitus terræ quod est propositum.

h 18. *tertij.*

i 4. *primi.*

k 4. triang. rectil.

DENIQVE hoc etiam modo idem assequemur. Cognito per dioptram an-

angulo A,quando radius visualis terram contingit, cognitus etiam erit angulus AFC,eius complementum. Ergo huius anguli secans AF, cognita erit in partibus sinus totius FC. Ex qua secante, si dematur sinus totus BF, nota relinquetur altitudo montis AB, in partibus sinus totius BF. Si igitur fiat vt altitudo montis AB, nota in partibus sinus totius ad eandem AB, notam in data mensura, ita sinus totus BF, ad aliud; proueniet semidiameter BF, nota in partibus altitudinis montis, &c.

PROBLEMA 21. PROPOS. 35.

PRISMATI cuicunque Cylindrum æqualem, & Pyramidi Conum æqualem: Ac viciſſim Cylindro Priſma æquale, & Cono æqualem Pyramidem conſtituere.

SI baſi priſmatis, vel pyramidis conſtruatur circulus æqualis, per ea, quæ ad finem lib. 7. ſcripſimus: Et ſuper hunc circulum extruatur cylindrus vel conus eiuſdem altitudinis cum priſmate, vel pyramide; erit cylindrus priſmati, & conus pyramidi æqualis. Cum enim tam baſes, quam altitudines æquales ſint: producatur autem priſma, & Cylindrus ex baſe in altitudinem multiplicata, & pyramis, atque conus ex tertia parte baſis in altitudinem multiplicata, vt lib. 5. cap. 1. declarauimus; manifeſtum eſt, cylindrum priſmati, & conum pyramidi eſſe æqualem.

SI viciſſim baſi cylindri, vel coni conſtituatur quadratum, aut alia quæuis rectilinea figura æqualis, per ea, quæ ad finem lib. 7. diximus, & ſuper hoc quadratum, aut figuram rectilineam fiat priſma, vel pyramis eiuſdem altitudinis cum cylindro, vel cono, erit priſma cylindro, & pyramis cono æqualis, quod eſt propoſitum.

PROBL. 22. PROPOS. 36.

DATO Cylindro, aut priſmati æqualem conum, vel pyramidem ſub eadem altitudine. Et viciſſim dato cono vel pyramidi æqualem cylindrum, aut priſma eiuſdem altitudinis conſtituere.

a 16. ſexti huius.
b 10. duodecimi.
c coroll. 7. duodec.
d 11. & 6. duodec.

a SI tam baſis cylindri, quam priſmatis tripletur, & ſuper triplicatam extruatur conus, vel pyramis eiuſdem altitudinis, factum erit, quod in prima parte proponitur. *b* Cum enim cylindrus triplus ſit coni eandem cum illo baſem, & altitudinem habentis: *c* Item priſma triplum pyramidis eandem cum illo baſem, atque altitudinem habentis; *d* Sit autem & conus ex-

structus

structus eiusdem illius coni triplus; nec non & pyramis constructa eiusdem illius pyramidis tripla. *a* Erit tam conus extructus cylindro æqualis, quam pyramis constructa prismati, quod est propositum. a 9. quinti.

b SI vicissim bases coni, & pyramidis in tripla proportione minuantur, & super tertias has partes cylindrus erigatur, & prisma: Erit tam cylindrus dato cono, quam prisma datæ pyramidi æquale. *c* Quoniam enim tam conus datus, quam cylindrus extructus, triplus est coni eandem basem, altitudinemque habentis cum cylindro extructo. *d* Item tam data pyramis, quam prisma extructum, triplum est pyramidis eandem habentis basem, atque altitudinem cum prismate extructo. *e* Erit tam cylindrus extructus dato cono æqualis, quam prisma constructum datæ pyramidis æquale. quod est propositum. b 16. sexti huius. c 11. & 10. duodec. d 6. et 7. duodecimi. e 9. quinti.

COROLLARIVM I.

QVIA igitur *f* omne prisma in cylindrum, & pyramis in conum conuertitur: Et contra cylindrus in prisma, & conus in pyramidem: *g* Item cylindrus in conum, & prisma in pyramidem: Et contra conus in cylindrum, & pyramis in prisma conuerti potest; fit vt indifferenter tam cylindrus, quam prisma transmutari possit in pyramidem, aut conum, ac pyramis in cylindrum, aut prisma æquale. f 35. huius. g 36. huius.

COROLLARIVM II.

EX his etiam manifeste colligitur, omnem cylindrum, ac prisma; similiter & conum, ac pyramidem cõuerti posse in parallelepipedũ rectangulum, cuius basis sit quadrata. *h* Nam conuerso cylindro, aut cono, vel pyramide in prisma qualecunque, si basi prismatis fiat quadratum æquale, & supra illud erigatur parallelepipedum eiusdem altitudinis; *i* erit hoc parallelepipedum priori æquale, ac proinde & proposito cylindro, vel cono, aut pyramidi. h 35. & 36. huius. i 2. coroll. 7. 7. duodec.

PROBL. 23. PROPOS. 37.

DATVM cylindrum, vel prisma: Similiter datum conum, vel pyramidem cuiuscunque altitudinis, in æqualem sub data qualibet alia altitudine, & supra basem quotcunque angulorum, reuocare.

IN proportione, quã data altitudo ad altitudinem propositi solidi habet, *k* augeatur vel minuatur basis eiusdem solidi dati. Nam solidum supra hanc basem auctam, vel diminutam secundum datam altitudinem constructum, erit id, quod quæritur. *l* Erit enim æquale dato solido: quippe cum altitudines cum basibus reciprocæ sint. Quod si basi constructi solidi fiat æqualis basis quotcunque angulorum & supra eam constituatur solidum sub data altitudine; erit hoc etiam solidum solido proposito æquale. k 16. sexti huius. l 15. & 9. duodec.

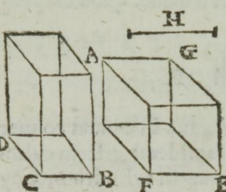
PRO-

PROBL. 24. PROPOS. 38.

DATO parallelepipedo rectangulo cubum æqualem describere.

a 14. secūdi
b 2. corol. 7. duodec.

SI parallelepipedum non habet basem quadratam, *a* fiat eius basi quadratum æquale B C D, supra quod erigatur parallelepipedum rectangulum eiusdem altitudinis A B, cum parallelepipedo dato, *b* quod æquale erit dato parallelepipedo. Huic ergo cubum æqualem construemus hac arte. Inter BC, latus quadrati BD, & AB, altitudinem parallepipedi, inueniantur duę mediæ proportionales EF, H: ita vt sit BC, ad E F, quemadmodum E F, ad H, & H, ad A B. Et super E F, propinquiorem lateri BC, construatur cubus EFG. *c* qui parallelepipedo ABCD, ęqualis erit.



c lemma 18. sexti huius
d 36. vnde.

QVOD si forte accidat, tres dimensiones parallelepipedi dati, cuius basis quadrata non sit, esse continue proportionales; *d* erit cubus ex media descriptus parallelepipedo æqualis.

COROLLARIVM.

e 2. coroll. 36. huius

e CVM igitur omnis cylindrus, omne prisma, conus, ac pyramis in rectangulum parallelepipedum possit commutari, liquido constat, cuilibet solido eiusmodi, cubum posse construi æqualem.

PROBL. 25. PROPOS. 39.

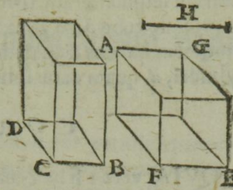
DATO cubo æquale parallelepipedum rectangulum sub data altitudine, vel supra datam basem construere.

f 11. sexti.
g 36. vnde.

SIT in præcedenti figura datus cubus E F G, & primum data altitudo AB, sub qua construendum sit parallelepipedum rectangulum cubo æquale. *f* Altitudini AB, & lateri cubi EF, reperiatur tertia proportionalis B C. Et fiat rectangulum BD, comprehensum sub tertia proportionali B C, & recta CD, lateri cubi EF, æquali; erigaturque supra BD, parallelepipedum rectangulum sub data altitudine AB. quod dico cubo esse æquale. Quoniam enim parallelepipedum rectangulum ABD, continetur sub tribus rectis AB, CD, BC, hoc est, sub AB, EF, BC, continue proportionalibus; *g* erit parallelepipedum æquale cubo ex media EF, descripto. quod est propositum.

SIT deinde data basis BD, quæ si non est parallelogrammum, *a* reuocetur ad parallelogrammum æquale. Et quam proportionem habeat basis data BD, ad basem cubi dati, eam habet latus cubi EF, ad rectam AB. (quod fiet, si supra latus cubi EF, fiat rectangulum æquale basi BD, & super alterum latus huius rectanguli aliud rectangulum æquale quadrato lateris cubi EF. *b* Nam tunc erit, vt primum rectangulum, id est, basis BD, ad secundum rectangulum, id est, ad quadratum, vel basem cubi, ita primi rectanguli basis, videlicet EF, ad basem secundi rectanguli.) Nam si supra basem BD, erigatur parallelepipedum in altitudine inuenta AB, *c* erunt parallelepipedum, & cubus æqualia: quippe cum bases, & altitudines sint reciprocæ, ex constructione. quod est propositum.

a 45. *primi.*



b 1. *sexti.*

c 34. *vnde.*

COROLLARIVM.

d QVONIAM igitur cuilibet cylindro, prismati, cono, ac pyramidi parallelepipedum rectangulum constitui potest æquale: *e* si huic parallelepipedo fiat cubus æqualis; *f* & huic cubo parallelepipedum rectangulum sub data altitudine, vel base data æquale: commutatus erit cylindrus, prisma, conus, ac pyramis in parallelepipedũ rectangulũ æquale datæ altitudinis, vel basis.

d *coroll.* 38. *huius.*
e 38. *huius.*
f 39. *huius.*

PROBL. 26. PROPOS. 40.

SPHAERAE datæ cubum æqualem: Et dato cubo æqualem sphæram constituere.

QVONIAM per propos. 32. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro, Cylindrus rectus, cuius basis est maximus sphæræ circulus, & altitudo diametro eiusdem sphæræ æqualis, sesquialteram habet proportionem ad sphæram: *g* Habet autem idem cylindrus ad cylindrum eiusdem basis, cuius altitudo contineat $\frac{2}{3}$. diametri sphæræ, proportionem quoque sesquialteram; *h* erit posterior hic cylindrus sphæræ æqualis. Si igitur huic cylindro *i* fiat cubus æqualis; erit idem hic cubus datæ sphæræ æqualis. quod est propositum.

g 14. *vnde.*
h 9. *quinti.*
i *coroll.* 38. *huius.*

VEL quia per eandem propos. 32. Archimedis, sphæra quadrupla est coni, cuius basis est maximus sphæræ circulus, & altitudo semidiametro sphæræ æqualis: k Est autem eiusdem coni quadruplus etiam conus eiusdem altitudinis, basem habens circuli maximi in sphæra quadruplam, hoc est, basem habens circulum, cuius semidiameter æqualis diametro maximi circuli; *l* erit posterior hic conus sphæræ æqualis. *m* Si igitur huic cono fiat cubus æqualis, erit hic idem cubus sphæræ datæ æqualis. quod est propositum.

k 11. *duodecimi.*
l 9. *quinti.*
m *coroll.* 38. *huius.*

a 35. huius. SIT viciſſim dato cubo fabricanda ſphæra æqualis. *a* Fiat cubo, tanquam Priſmati, cylindrus æqualis. Deinde ſphæra fabricetur, habens diametrum ſeſquialteram altitudinis cylindri. *b* Hæc enim ſphæra cylindro, ac proinde cubo dato æqualis erit: propterea quod cylindrus eiuſdem baſis altitudinem habens æqualem diametro ſphæræ, *c* ſeſquialter eſt tam prioris cylindri, *d* quam datæ ſphæræ. quod eſt propoſitum.

b 9. quinti

c 14. duodec.

d 32. lib. 1. de ſph. et cyl.

COROLLARIVM I.

e 25. ſexti. QVIA vero *e* ſi baſi cubi fiat æqualis figura quotcunque laterum, ſiue ea regularis ſit, ſiue non; & ſupra hanc figuram erigatur ſolidum rectangulum ad altitudinem cubi, *f* ſolidum hoc cubo eſt æquale: fit vt ſphæræ datæ conſtrui poſſit æquale ſolidum rectangulum ſupra baſem quotlibet angelorum; *g* ſi nimirum prius conſtruatur cubus æqualis: deinde huic cubo ſolidum rectangulum æquale, vt proxime dictum eſt. *h* Item quia cuicunque priſmati pyramis conſtrui poteſt æqualis; ſi cubo, qui ſphæræ eſt æqualis, tanquã priſmati, fiat pyramis æqualis; erit quoque eadem pyramis ſphæræ æqualis. *i* Immo quoniã cuilibet cylindro conus fieri poteſt æqualis: ſi cylindrus extruatur ſphæræ æqualis, ſupra baſem videlicet maximo circulo in ſphæra æqualem, & cuius altitudo contineat $\frac{2}{3}$. diametri, vt ad initium huius propoſ. oſtendimus: Deinde huic cylindro conus æqualis; conſtitutus erit conus quoque datæ ſphæræ æqualis.

f 2. coroll. 7. duodec.

g 40. huius.

h 36. huius.

i 36. huius.

k 37. huius. VICISSIM *k* quia cuilibet priſmati conſtrui poteſt cubus æqualis: *l* Si huic cubo fiat æqualis ſphæra, erit eadem hæc ſphæra conſtituta æqualis dato priſmati ſupra baſem quotcunque angulorum.

l 40. huius.

COROLLARIVM II.

QVIN etiam colligitur, poſſe ſphæram conſtrui æqualem cuilibet corpori regulari. Nam de cubo quidem oſtenſum eſt hac propoſ. 40. De Tetraedro vero, ſiue Pyramide regulari patet. Nam ſi Pyramidi *m* fiat Parallelepipedum æquale: *n* Et huic parallelepipedo cubus æqualis; Ac tandem huic cubo fabricetur ſphæra æqualis; erit eadem hæc ſphæra Tetraedro, ſiue pyramidi regulari æqualis. De Octaedro autem, Icoſaedro, & Dodecaedro ita res peragetur. Si omnibus baſibus corporis regularis fiat quadratum æquale, per ea, quæ ad finem lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ lib. 4. huius Geometriæ cap. 4. Num. 4. tradidimus; & ſuper hoc quadratum fiat pyramis habens altitudinem æqualem perpendiculari è centro corporis ad quamlibet baſem ductæ, hoc eſt, altitudini vnius pyramidis ex ijs, in quas corpus diuiditur è centro: *o* Erit hæc pyramis corpori regulari æqualis; *p* quippe cum ita ſe habeat tam pyramis hæc quadrilatera ad vnam pyramidem corporis regularis, quam omnes pyramides corporis regularis ad vnam pyramidem, vt baſis illius, vel baſes omnium pyramidum corporis, ad vnam baſem; propterea quod in Octaedro proportio eſt vtrobique octupla: In Icoſaedro, vigecupla: Et in Dodecaedro, duodecupla. Quare ſi toti illi pyramidi cubus conſtruatur æqualis, vt paulo ante de Tetraedro dictum eſt: atque huic tandem cubo ſphæra æqualis fabricetur; erit eadem ſphæra illi pyramidi, hoc eſt, corpori regulari æqualis.

m 2. coroll. 36. huius.

n 38. huius.

o 9. quinti.

p 6. duodec.

PROBL.

PROBL. 27. PROPOS. 41.

DVOBVS aut pluribus cubis vnum cubum æqualem efficere.

SI supra basem superiorem primi cubi, *a* construatur parallelepipedum rectangulum secundo cubo ęquale, vt fiat vnum parallelepipedum duobus cubis ęquale: Et supra huius parallelepipedi basem superiorem aliud parallelepipedum æquale tertio cubo, & sic deinceps, si plures adsint cubi, constructum erit parallelepipedum propositis cubis æquale. Huic ergo *b* si fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur.

a 39. *huius.*

b 38. *huius.*

SCHOLIVM.

EADEM arte quotlibet figuris solidis non cubis, construetur cubus æqualis: *c* si nimirum reuocentur ad vnum parallelepipedum, &c.

c 37. *huius.*

PROBL. 28. PROPOS. 42.

DATO cubo, corpus regulare, quod ex quinque elegeris, æquale construere.

SIT datus cubus, cuius latus A, cui verbi gratia construendum sit æquale Dodecaedrum. *d* Fiat quodcunque Dodecaedrum, cuius latus B: cui per ea, quæ in 2. coroll. præcedentis propos. dicta sunt, fiat æqualis cubus, cuius latus C. *e* Et tribus lateribus C, A, B, reperiatur quarta proportionalis D. Dico Dodecaedrum supra latus D, constructum, æquale esse dato cubo lateris A. Quoniã enim, vt ex demonstratione propos. 37. lib. 11. Euclid. patet, ita est cubus lateris C, ad cubum lateris A, vt Dodecaedrum lateris B, ad Dodecaedrum lateris D: Est autem per constructionem, cubus lateris C, æqualis Dodecaedro lateris B; *f* erit quoque cubus lateris A, Dodecaedro lateris D, ęqualis. quod est propositum.

C. A. B. D.

d 17. *tertij-decimi.*

e 12. *sexti.*

f 14. *quinti.*

PROBL. 29. PROPOS. 43.

EX maiori cubo detrahere minorem, residuoque cubum ęqualem exhibere.

SVPRA basem maioris cubi *g* construatur parallelepipedum cubo mino-

g 39. *huius.*

ri ęquale. Et ex latere cubi maioris abscindatur recta æqualis altitudini constructi parallelepipedi. Si enim per punctum abscissionis ducatur planum basibus cubi parallelum, detractum erit parallelepipedum parallelepipedo constructo æquale, cum habeat eandem basem & altitudinem cum illo, hoc est, minori cubo æquale. *a* Si igitur reliquo parallelepipedo fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur.

a 38. *huius.*

SCHOLIVM.

b 1. & 2. *coroll.* 36. *huius.*
c 38. *huius*

IDEM fieri potest in alijs figuris solidis; *b* si prius reducantur ad parallelepipeda rectangula, quando non sunt parallelepipeda. *c* & deinde parallelepipeda ad cubos, &c.

PROBL. 30. PROPOS. 44.

DATIS duabus, aut pluribus sphæris, sphæram vnam æqualem constituere.

d 40. *huius.*
e 41. *huius.*
f 40. *huius.*

SPHAERIS propositis *d* construantur cubi æquales: *e* His deinde vnus cubus æqualis fiat, qui etiam sphęris datis erit æqualis. *f* Si igitur huic cubo extruatur sphæra æqualis; factum erit, quod iubetur.

PROBL. 31. PROPOS. 45.

EX maiori sphæra minorem sphęram detrahere, residuoque sphæram æqualem exihibere.

g 40. *huius.*
h 43. *huius.*
i 40. *huius.*

g VTRAQVE sphæra in cubum reuocetur. *h* Detracto deinde minore ex maiore, *i* si residuo sphæra fiat æqualis; factum erit, quod proponitur.

PROBL. 32. PROPOS. 46.

DATVM cubum, aut parallelepipedum, secundum proportionem datam secare.

k 32. *vnde.*
l 1. *sexti.*

SI namque vnum latus in base cubi, aut parallelepipedi secetur secundum datam proportionem, & per punctum sectionis ducatur planum duabus basibus erectis solidi parallelum, diuidens ipsum solidum in duo parallelepipeda: habebunt hæc parallelepipeda datam proportionem. k Habent enim proportionem inter se eandem, quam bases. *l* Cum ergo bases habeant eandem proportionem, quam segmenta lateris secundum datam pro-

por-

portionem diuisi; constat id, quod propositum est.

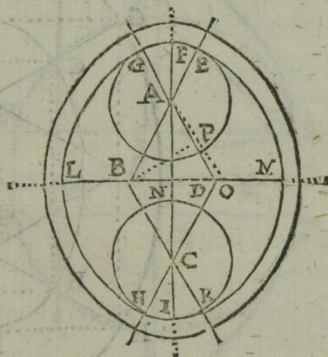
SCHOLIVM.

NON aliter prisma quodlibet, aut cylindrus secundum datam proportionem secabitur, si altitudo in datam secetur proportionem, & per punctum sectionis planum ducatur basibus parallelum. Hoc enim secabit *a* tam prisma, *b* quam cylindrum in datam proportionem. a *schol.* 14. *duodec.* b 14. *duode.*

PROBL. 33. PROPOS. 47.

FIGVRAM Ellipsi similem, quam ouatam dicunt, circino describere.

LIBET miscellaneorum hunc librum peruulgato illo problemate concludere, quo artifices ope circini describere solent figuram ouatam Ellipsi similem, ita vt nullibi anguli appareant: cum non raro eiusmodi figura à Geometris in suis delineationibus adhibeatur. Docui quidem in lib. 1. nostrę Gnomonicæ in scholio propos. 8. qua ratione vera Ellipsis, quæ conica sectio est, describenda sit: Sed hic similem figuram ex segmentis circulorum constantem describendam proponimus. Ita ergo, vt ex varijs scriptoribus colligitur, agemus. Construantur duo triangula æquilatera, vel Isoscelia supra basem communem A C, in diuersas partes ABC, ADC. (Aequilatera venustiorem faciunt figuram, vt experientia te docebit) productisque lateribus, describantur ex A, C, duo arcus EFG, HIK, vsque ad latera producta. Si namque ex B, D, per E, K, G, H, alij arcus describantur, *c* tangent hi priores arcus in punctis E, K, G, H: ac proinde illos non secabunt, constitutaque erit figura ouata. d 15. *primi.* c *schol.* 13. *tertij.*



BENE autem vides, ex eisdem centris A, C, B, D, describi posse varias figuras, prout arcus E F G, H I K, maiores fuerint, aut minores, vt in figura apparet.

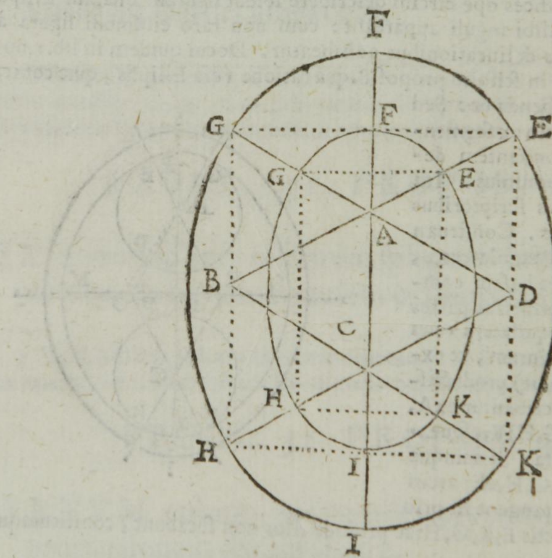
QVOD si triangula constituta sint Isoscelia, poterunt latera AB, CB, &c. vel maiora fieri base AC, vel minora. In figura nostra sunt minora.

POTES etiam, si placet, primo loco ex centris B, D, describere arcus EMK, GLH, ad quodcunque interuallum, pro latitudine figuræ describendę; deinde

deinde ex centris A, C, minores arcus delineare EFG, HIK.

QVIN etiam ſine conſtructione triangulorum idem efficiemus hoc modo. Ductis duabus rectis AC, BD, ad angulos rectos ſe ſecantibus in N; ſumptiſque æqualibus NA, NC, quantiſcunque pro longitudine figuræ, deſcribantur ex A, C, arcus circulorum EFG, HIK, parui, aut magni, prout deſideras extremitates figuræ ſecundum longitudinem habere anguſtiores, latioreſue. Deinde acceptis alijs duabus rectis æqualibus NB, ND, quantiſcunque, (quo autem puncta B, D, remotiora fuerint ab N, eo anguſtior figura euadet: & quo minus remota, eo latior. Sed vſus magiſter optimus facile docebit, quantæ debeant eſſe rectæ NB, ND,) ducantur ex B, D, per centra A, C, rectæ ſecantes priores arcus in E, K, &c. Nam ſi ex B, D, per puncta E, K, &c. alij duo arcus deſcribantur, perfecta erit figura Ellipſi ſimilis.

VT autem videas, venuſtiores figuras deſcribi, ſi triangula ABC, ADC, ſint æquilatera, quæ fere ratio ab artificibus ſeruari ſolet, deſcripſimus hic duas figuras. In minori eſt latus BA, rectæ AE, duplum, in maiori vero æquale, &c.



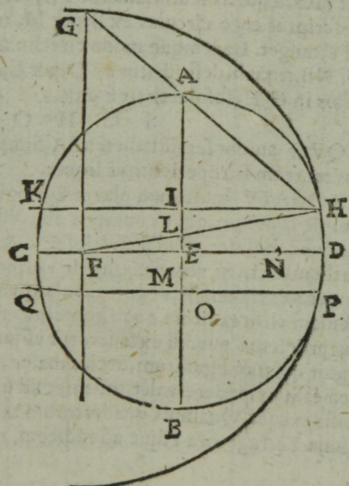
Area figuræ ouatæ hic deſcriptæ.

IAM vero area figuræ ouatæ, beneficio trianguli æquilateri deſcriptæ, quam artifices non raro expetunt, facile inuenietur, hoc modo. Sector BEK, eſt ſexta pars circuli, cuius ſemidiameter BE, nota, nimirum latus trianguli æquilateri BEK, quod eſt in maiori figura duplum lateris AB, aſſum-

pti

pti ad libitum: in minori vero sesquialterum est eiusdem lateris AB. Inuenta ergo area illius circuli, vt lib. 4. ca. 7. docuimus, si ex eius sexta parte dematur triangulum æquilaterum BEK, cuius area reperietur per ea, quæ in eodem lib. 4. cap. 2. Num. 5 tradita sunt: reliquum fiet segmentum EK, ac proinde & GH, notum. Item sector AGE, est pars duodecima circuli, cuius semidiameter AG, nota, nimirum vel æqualis lateri assumpto AB, vel semissis ipsius. Si igitur ex duodecima parte areæ illius circuli auferatur area Isoscelis AGE, quæ reperietur per ea, quæ lib. 4. cap. 2. Num. 4. scripsimus: remanebit segmentum GFE, notum, ideoque & segmentum HIK. Quocirca si quatuor segmentis cognitis adijciatur area rectanguli EGHK, cognita erit area totius figuræ. Cognoscetur autem area huius rectanguli ex doctrina cap. 1. lib. 4. cum latus EK, chorda sit sextæ partis circuli, hoc est, semidiametro æquale: at EF, sit sinus grad 60. id est, semissis chordæ grad. 120.

VERVM quia hac ratione describi nequit figura ad datam longitudinem, latitudinemque; (quoniam si longitudo eligatur FI, ignotum erit, quanta sit futura latitudo: propterea quod arcus ex B, D, descripti raro transeũt per electa pũcta latitudinis: Si vero eligatur latitudo LM, in prima figura ignorabitur futura lõgitudo: quippe cũ arcus ex A, C, descripti raro etiam per electa pũcta lõgitudinis trãseant: vt perspicuum est.) docebimus cum Ioan. Baptista Benedicto, quo pacto, data tam longitudine, quam latitudine figura Ellipsi similis describenda sit. Sit ergo data longitudo AB, & latitudo CD, quæ se bifariam, & ad rectos angulos secent in E. Ex latitudine CD, abscindatur recta DF, quantacunque vltra E, maior tamen interuallo inter punctum F, & A, extremum longitudinis. Hoc enim nisi fiat, describi non poterit figura ouata. Deinde centro F, & interuallo FD, describatur circulus DG, qui necessario vltra punctum A, transibit, quippe cum semidiameter FD, maior posita sit interuallo FA. Ducta autem FG, longitudini AB, parallela secante circulum descriptũ in G; ducatur ex G, per A,



recta secans eundem circulum in H, puncto, è quo ducatur HIK, latitudini CD, parallela, iungaturq. HF, secans AB, longitudinem in L; eruntq. FG, FH, æquales è centro F, ad circunferentiam. *a* Et quia triangula HGF, HAL, similia sunt; *b* erit vt GF, ad FH, ita AL, ad LH. Cum ergo GF, ipsi FH, sit æqualis; erit quoque AL, ipsi LH, æqualis. Circulus ergo AH, ex L, per A, descriptus transibit per H, *c* ibique priorem circulum DG, tanget

a *coroll. 4. sexti.*
b 4. *sexti.*
c *schol. 13. tertij.*

get. Si igitur capiatur EO, æqualis ipsi EI, & EM, ipsi EL, ducaturque POQ, per O, rectæ CD, parallela, atque ex M, centro, interuallo autem LH, vel MP, circulus PBQ, describatur, tanget hic quoque priorem circulum in P. Si denique sumpta EN, ipsi EF, æquali, describatur ex N, ad interuallum FD, prioris circuli circulus KCQ, tanget hic circulos HAK, PBQ, in K, Q, perfectaque erit figura ouata.

SED quia, vt dictũ est, constatque ex descriptione, nisi latitudo CD, tanta sit, vt ex ea abscindi possit recta DF, maior interuallo FA, figura hac ratione describi nequit; adeo vt longitudo, ac latitudo ad libitũ assumi nõ possint; instituetur operatio alio modo, sumpta quacunque longitudine AB, & latitudine CD. Secent se in prima figura longitudo, latitudoque FI, LM, datæ mutuo bifariam in N, & ad angulos rectos, & sumantur rectæ FA, IC, æquales, & minores semisse latitudinis LN; describanturque ex A, & C, per F, & I, circelli EFG, HIK. Sumpta deinde MO, semidiametro AF, æquali, iungatur OA, ex O, ad centrum A, quam bifariam, & ad angulos rectos in P, secet recta PB, secans LM, etiam productum, si opus est, in B. ducaturque BA, vsque ad circulum GFE. Et quoniam dua latera OP, PB, duobus lateribus AP, PB, æqualia sunt, angulosque continent rectos, id est, æquales: *a* erunt bases OB, AB, æquales; additisque æqualibus OM, AE, (sumpta namque fuit MO, æqualis semidiametro FA, vel IC,) totæ BE, BM, æquales erunt. Descriptus ergo circulus ex B, per M, transibit per E, *b* ibique circellum GFE, tanget. Eodemque modo circellum HIK, tanget. Si igitur sumpta ND, ipsi NB, æquali, describatur ex D, per L, circulus tangens eosdem priores circellos in G, H, absoluta erit figura.

a 4. primi.

b schol. 13. tertij.

SCHOLIVM.

QVO autem semidiameter FA, sumpta fuerit minor, quam MN, eo certius centrum B, reperietur, vt liquet.

ROGATV multorum placet Epilogi loco apponere tabulam quadratorum, & cuborum, qui ex numeris ab 1. vsque ad 1000. producuntur: propterea quod huiusce tabulæ multiplex, & insignis est vsus cum in alijs rebus Mathematicis, tũ vero maxime in radicibus quadratis, & cubicis ex magnis numeris extrahendis, vt post tabulam paucis exponam. Non extendi autem tabulam vltra radicem 1000. contentus radicibus tres figuras non superantibus: propterea quod si extẽderetur vsque ad radicem 10000. vt radices haberentur quatuor figurarum, decies maior tabula conficienda esset. Si quis tamen eam extendere volet, inueniet ad finem tabulæ regulas, quibus id facile possit exequi. Quamuis quadratorum tabulam Doctissimus Maginus in sua tabula Tetragonica vsque ad radicem. 10000. promouerit.

SEQVITVR TABVLA QVADRATORVM, & Cuborum, quorum radices maiores non sunt, quam 1000.

TABVLA

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
1	1	1	41	1681	68921	81	[illegible]	531441
2	4	8	42	1764	74088	82	6724	551368
3	9	27	43	1849	79507	83	6889	571787
4	16	64	44	1936	85184	84	7056	592704
5	25	125	45	2025	91125	85	7225	614125
6	36	216	46	2116	97336	86	7396	636056
7	49	343	47	2209	103823	87	7569	658503
8	64	512	48	2304	110592	88	7744	681472
9	81	729	49	2401	117649	89	7921	704968
10	100	1000	50	2500	125000	90	8100	729000
11	121	1331	51	2601	132651	91	8281	753571
12	144	1728	52	2704	140608	92	8464	778688
13	169	2197	53	2809	148877	93	8649	804357
14	196	2744	54	2916	157464	94	8836	830584
15	225	3375	55	3025	166375	95	9025	857375
16	256	4096	56	3136	175616	96	9216	884736
17	289	4913	57	3249	185193	97	9409	912673
18	324	5832	58	3364	195112	98	9604	941192
19	361	6859	59	3481	205379	99	9801	970299
20	400	8000	60	3600	216000	100	10000	1000000
21	441	9261	61	3721	226981	101	10201	1030301
22	484	10648	62	3844	238328	102	10404	1061208
23	529	12167	63	3969	250047	103	10609	1092727
24	576	13824	64	4096	262144	104	10816	1124864
25	625	15625	65	4225	274625	105	11025	1157625
26	676	17576	66	4356	287496	106	11236	1191016
27	729	19683	67	4489	300763	107	11449	1225043
28	784	21952	68	4624	314432	108	11664	1259712
29	841	24389	69	4761	328509	109	11881	1295029
30	900	27000	70	4900	343000	110	12100	1331000
31	961	29791	71	5041	357911	111	12321	1367631
32	1024	32768	72	5184	373248	112	12544	1404928
33	1089	35937	73	5329	389017	113	12769	1442897
34	1156	39304	74	5476	405224	114	12996	1481544
35	1225	42875	75	5625	421875	115	13225	1520875
36	1296	46656	76	5776	438976	116	13456	1560896
37	1369	50653	77	5929	456533	117	13689	1601613
38	1444	54872	78	6084	474552	118	13924	1643032
39	1521	59319	79	6241	493039	119	14161	1685159
40	1600	64000	80	6400	512000	120	14400	1728000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
121	14641	1771561	161	25921	4173281	201	40401	8120601
122	14884	1815848	162	26244	4251528	202	40804	8242408
123	15129	1860867	163	26569	4330747	203	41209	8365427
124	15376	1906624	164	26896	4410944	204	41616	8489664
125	15625	1953125	165	27225	4492125	205	42025	8615125
126	15876	2000376	166	27556	4574296	206	42436	8741816
127	16129	2048383	167	27889	4657463	207	42849	8869743
128	16384	2097152	168	28224	4741632	208	43264	8998912
129	16641	2146689	169	28561	4826809	209	43681	9129329
130	16900	2197000	170	28900	4913000	210	44100	9261000
131	17161	2248091	171	29241	5000211	211	44521	9393931
132	17424	2299968	172	29584	5088448	212	44944	9528128
133	17689	2352637	173	29929	5177717	213	45369	9663597
134	17956	2406104	174	30276	5268024	214	45796	9800344
135	18225	2460375	175	30625	5359375	215	46225	9938375
136	18496	2515456	176	30976	5451776	216	46656	10077696
137	18769	2571353	177	31329	5545233	217	47089	10218313
138	19044	2628027	178	31684	5639752	218	47524	10360232
139	19321	2685619	179	32041	5735339	219	47961	10503459
140	19600	2744000	180	32400	5832000	220	48400	10648080
141	19881	2803221	181	32761	5929741	221	48841	10793861
142	20164	2863288	182	33124	6028568	222	49284	10941048
143	20449	2924207	183	33489	6128487	223	49729	11089567
144	20736	2985984	184	33856	6229504	224	50176	11239424
145	21025	3048625	185	34225	6331625	225	50625	11390625
146	21316	3112136	186	34596	6434856	226	51076	11543176
147	21609	3176523	187	34969	6539203	227	51529	11697083
148	21904	3241792	188	35344	6644672	228	51984	11852352
149	22201	3307949	189	35721	6751269	229	52441	12008989
150	22500	3375000	190	36100	6859000	230	52900	12167000
151	22801	3442951	191	36481	6967871	231	53361	12326391
152	23104	3511808	192	36864	7077888	232	53824	12487168
153	23409	3581577	193	37249	7189057	233	54289	12649337
154	23716	3652264	194	37636	7301384	234	54756	12812904
155	24025	3723875	195	38025	7414875	235	55225	12977875
156	24336	3796416	196	38416	7529536	236	55696	13144256
157	24649	3869893	197	38809	7645373	237	56169	13312053
158	24964	3944312	198	39204	7762392	238	56644	13481272
159	25281	4019679	199	39601	7880599	239	57121	13651919
160	25600	4096000	200	40000	8000000	240	57600	13824000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
241	58081	13997521	281	78961	22188041	321	103041	33076161
242	58564	14172488	282	79524	22425768	322	103684	33386248
243	59049	14348907	283	80089	22665187	323	104329	33698267
244	59536	14526784	284	80656	22909304	324	104976	34012224
245	60025	14706125	285	81225	23149125	325	105625	34328125
246	60516	14886936	286	81796	23393656	326	106276	34645976
247	61009	15069223	287	82369	23639903	327	106929	34965783
248	61504	15252992	288	82944	23887872	328	107584	35287552
249	62001	15438249	289	83521	24137569	329	108241	35611289
250	62500	15625000	290	84100	24389000	330	108900	35937000
251	63001	15813251	291	84681	24642171	331	109561	36264691
252	63504	16003008	292	85264	24897088	332	110224	36594368
253	64009	16194277	293	85849	25153757	333	110889	36926037
254	64516	16387064	294	86436	25412184	334	111556	37259704
255	65025	16581375	295	87025	25672375	335	112225	37595375
256	65536	16777216	296	87616	25934336	336	112896	37933056
257	66049	16974593	297	88209	26198073	337	113569	38272753
258	66564	17173512	298	88804	26463592	338	114244	38614472
259	67081	17373979	299	89401	26730899	339	114921	38958219
260	67600	17576000	300	90000	27000000	340	115600	39304000
261	68121	17779581	301	90601	27270901	341	116281	39651821
262	68644	17984728	302	91204	27543608	342	116964	40001688
263	69169	18191447	303	91809	27818127	343	117649	40353607
264	69696	18399744	304	92416	28094464	344	118336	40707584
265	70225	18609625	305	93025	28372625	345	119025	41063625
266	70756	18821096	306	93636	28652616	346	119716	41421736
267	71289	19034163	307	94249	28934443	347	120409	41781923
268	71824	19248832	308	94864	29218112	348	121104	42144192
269	72361	19465109	309	95481	29503629	349	121801	42508549
270	72900	19683000	310	96100	29791000	350	122500	42875000
271	73441	19902511	311	96721	30080231	351	123201	43243551
272	73984	20123648	312	97344	30371328	352	123904	43614208
273	74529	20346417	313	97969	30664297	353	124609	43986977
274	75076	20570824	314	98596	30956144	354	125316	44361864
275	75625	20796875	315	99225	31255875	355	126025	44738875
276	76176	21024576	316	99856	31554496	356	126736	45118016
277	76729	21253933	317	100489	31855013	357	127449	45499293
278	77284	21484952	318	101124	32157432	358	128164	45882712
279	77841	21717639	319	101761	32461759	359	128881	46268279
280	78400	21952000	320	102400	32768000	360	129600	46656000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
361	130321	47045881	401	160801	64481201	441	194481	85766121
362	131044	47437928	402	161604	64964808	442	195364	86350888
363	131769	47832147	403	162409	65450827	443	196249	86938307
364	132496	48228544	404	163216	65939264	444	197136	87528384
365	133225	48627125	405	164025	66430125	445	198025	88121125
366	133956	49027896	406	164836	66923416	446	198916	88716536
367	134689	49430863	407	165649	67419143	447	199809	89314623
368	135424	49836032	408	166464	67917312	448	200704	89915392
369	136161	50243409	409	167281	68417929	449	201601	90518849
370	136900	50653000	410	168100	68921000	450	202500	91125000
371	137641	51064811	411	168921	69426531	451	203401	91733851
372	138384	51478848	412	169744	69934528	452	204304	92345408
373	139129	51895117	413	170569	70444997	453	205209	92959677
374	139876	52313624	414	171396	70957944	454	206116	93576664
375	140625	52734375	415	172225	71473375	455	207025	94196375
376	141376	53157376	416	173056	71991296	456	207936	94818816
377	142129	53582633	417	173889	72511713	457	208849	95443993
378	142884	54010152	418	174724	73034632	458	209764	96071912
379	143641	54439939	419	175561	73560059	459	210681	96702579
380	144400	54872000	420	176400	74088000	460	211600	97336000
381	145161	55306341	421	177241	74618461	461	212521	97972181
382	145924	55742968	422	178084	75151448	462	213444	98611128
383	146689	56181887	423	178929	75686967	463	214369	99252847
384	147456	56623104	424	179776	76225024	464	215296	99897344
385	148225	57066625	425	180625	76765625	465	216225	100544625
386	148996	57512456	426	181476	77308776	466	217156	101194696
387	149769	57960603	427	182329	77854483	467	218089	101847563
388	150544	58411072	428	183184	78402752	468	219024	102503232
389	151321	58863869	429	184041	78953589	469	219961	103161709
390	152100	59319000	430	184900	79507000	470	220900	103823000
391	152881	59776471	431	185761	80062991	471	221841	104487111
392	153664	60236288	432	186624	80621568	472	222784	105154048
393	154449	60698457	433	187489	81182737	473	223729	105823817
394	155236	61162984	434	188356	81746504	474	224676	106496424
395	156025	61629875	435	189225	82312875	475	225625	107171875
396	156816	62099136	436	190096	82881856	476	226576	107850176
397	157609	62570773	437	190969	83453453	477	227529	108531333
398	158404	63044792	438	191844	84027672	478	228484	109215352
399	159201	63521199	439	192721	84604519	479	229441	109902239
400	160000	64000000	440	193600	85184000	480	230400	110592000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
481	231361	111284641	521	271441	141420761	561	314721	176558481
482	232324	111980168	522	272484	142236648	562	315844	177504328
483	233289	112678587	523	273529	143055667	563	316969	178453547
484	234256	113379904	524	274576	143877824	564	318096	179406144
485	235225	114084125	525	275625	144703125	565	319225	180362125
486	236196	114791256	526	276676	145531576	566	320356	181321496
487	237169	115501303	527	277729	146363183	567	321489	182284263
488	238144	116214272	528	278784	147197952	568	322624	183250432
489	239121	116930169	529	279841	148035889	569	323761	184220009
490	240100	117649000	530	280900	148877000	570	324900	185193000
491	241081	118370771	531	281961	149721291	571	326041	186169411
492	242064	119095488	532	283024	150568768	572	327184	187149248
493	243049	119823157	533	284089	151419437	573	328329	188131517
494	244036	120553784	534	285156	152273304	574	329476	189119224
495	245025	121287375	535	286225	153130375	575	330625	190109375
496	246016	122023936	536	287296	153990656	576	331776	191102976
497	247009	122763473	537	288369	154854153	577	332929	192100033
498	248004	123505992	538	289444	155720872	578	334084	193100552
499	249001	124251499	539	290521	156590819	579	335241	194104539
500	250000	125000000	540	291600	157464000	580	336400	195112000
501	251001	125751501	541	292681	158340421	581	337561	196122941
502	252004	126506008	542	293764	159220088	582	338724	197137368
503	253009	127263527	543	294849	160103007	583	339889	198155287
504	254016	128024064	544	295936	160989184	584	341056	199176704
505	255025	128787625	545	297025	161878625	585	342225	200201625
506	256036	129554216	546	298116	162771336	586	343396	201230056
507	257049	130323843	547	299209	163667323	587	344569	202262003
508	258064	131096512	548	300304	164566592	588	345744	203297472
509	259081	131872229	549	301401	165469149	589	346921	204336469
510	260100	132651000	550	302500	166375000	590	348100	205379000
511	261121	133432831	551	303601	167284151	591	349281	206425071
512	262144	134217728	552	304704	168196608	592	350464	207474688
513	263169	135005697	553	305809	169112377	593	351649	208527857
514	264196	135796744	554	306916	170031464	594	352836	209584584
515	265225	136590875	555	308025	170953875	595	354025	210644875
516	266256	137388096	556	309136	171879616	596	355216	211708736
517	267289	138188413	557	310249	172808693	597	356409	212776173
518	268324	138991832	558	311364	173741112	598	357604	213847192
519	269361	139798359	559	312481	174676879	599	358801	214921799
520	270400	140608000	560	313600	175616000	600	360000	216000000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
601	361201	217081801	641	410881	263374721	681	463761	315821241
602	362404	218767208	642	412164	264609288	682	465124	317214568
603	363609	219256227	643	413449	265847707	683	466489	318611987
604	364816	220348864	644	414736	267089984	684	467856	320013504
605	366025	221445125	645	416025	268336125	685	469225	321419125
606	367236	222545016	646	417316	269586136	686	470596	322828856
607	368449	223648543	647	418609	270840023	687	471969	324242703
608	369664	224755712	648	419904	272097792	688	473344	325660672
609	370881	225866529	649	421201	273359449	689	474721	327082769
610	372100	226981000	650	422500	274625000	690	476100	328509000
611	373321	228099131	651	423801	275894451	691	477481	329939371
612	374544	229220928	652	425104	277167808	692	478864	331373888
613	375769	230346397	653	426409	278445077	693	480249	332812557
614	376996	231475544	654	427716	279726264	694	481636	334255384
615	378225	232608375	655	429025	281011375	695	483025	335702375
616	379456	233744896	656	430336	282300416	696	484416	337153536
617	380689	234885113	657	431649	283593393	697	485809	338608873
618	381924	236029032	658	432964	284890312	698	487204	340068392
619	383161	237176659	659	434281	286191179	699	488601	341532099
620	384400	238328000	660	435600	287496000	700	490000	343000000
621	385641	239483061	661	436921	288804781	701	491401	344472101
622	386884	240641848	662	438244	290117528	702	492804	345948408
623	388129	241804367	663	439569	291434247	703	494209	347428927
624	389376	242970624	664	440896	292754944	704	495616	348913664
625	390625	244140625	665	442225	294079625	705	497025	350402625
626	391876	245314376	666	443556	295408296	706	498436	351895816
627	393129	246491883	667	444889	296740963	707	499849	353393243
628	394384	247673152	668	446224	298077632	708	501264	354894912
629	395641	248858189	669	447561	299418309	709	502681	356400829
630	396900	250047000	670	448900	300763000	710	504100	357911000
631	398161	251239591	671	450241	302111711	711	505521	359425431
632	399424	252435968	672	451584	303464448	712	506944	360944128
633	400689	253636137	673	452929	304821217	713	508369	362467097
634	401956	254840104	674	454276	306182024	714	509796	363994344
635	403225	256047875	675	455625	307546875	715	511225	365525875
636	404496	257259456	676	456976	308915776	716	512656	367061696
637	405769	258474853	677	458329	310288733	717	514089	368601813
638	407044	259694072	678	459684	311665752	718	515524	370146232
639	408321	260917119	679	461041	313046839	719	516961	371694959
640	409600	262144000	680	462400	314432000	720	518400	373248000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
721	519841	374805361	761	579121	440711081	801	641601	513922401
722	521284	376367048	762	580644	442450728	802	643204	515849608
723	522729	377933067	763	582169	444194947	803	644809	517781627
724	524176	379503424	764	583696	445943744	804	646416	519718464
725	525625	381078125	765	585225	447697125	805	648025	521660125
726	527076	382657176	766	586756	449455096	806	649636	523606616
727	528529	384240583	767	588289	451217663	807	651249	525557943
728	529984	385828352	768	589824	452984832	808	652864	527514112
729	531441	387420489	769	591361	454756609	809	654481	529475129
730	532900	389017000	770	592900	456533000	810	656100	531441000
731	534361	390617891	771	594441	458314011	811	657721	533411731
732	535824	392223168	772	595984	460099648	812	659344	535387328
733	537289	393832837	773	597529	461889917	813	660969	537367797
734	538756	395446904	774	599076	463684824	814	662596	539353144
735	540225	397065375	775	600625	465484375	815	664225	541343375
736	541696	398688256	776	602176	467288576	816	665856	543338496
737	543169	400315553	777	603729	469097433	817	667489	545338513
738	544644	401947272	778	605284	470910952	818	669124	547343432
739	546121	403583419	779	606841	472729139	819	670761	549353259
740	547600	405224000	780	608400	474552000	820	672400	551368000
741	549081	406869021	781	609961	476379541	821	674041	553387661
742	550564	408518488	782	611524	478211768	822	675684	555412248
743	552049	410172407	783	913089	480048687	823	677329	557441767
744	553536	411830784	784	614656	481860304	824	678976	559476224
745	555025	413493625	785	616225	483736625	825	680625	561515625
746	556516	415160936	786	617796	485587656	826	682276	563559976
747	558009	416832723	787	619369	487443403	827	683929	565609283
748	559504	418508992	788	620944	489303872	828	685584	567663552
749	561001	420189749	789	622521	491169069	829	687241	569722789
750	562500	421875000	790	624100	493039000	830	688900	571787000
751	564001	423564751	791	625681	494913671	831	690561	573856191
752	565504	425259008	792	627264	496793088	832	692224	575930368
753	567009	426957777	793	628849	498677257	833	693889	578009537
754	568516	428661064	794	630436	500566184	834	695556	580093704
755	570025	430368875	795	632025	502459875	835	697225	582182875
756	571536	432081216	796	633616	504358336	836	698896	584277056
757	573049	433798093	797	635209	506261573	837	700569	586376253
758	574564	435519512	798	636804	508169592	838	702244	588480472
759	576081	437245479	799	638401	510082399	839	703921	590589719
760	577600	438976000	800	640000	512000000	840	705600	592704000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadratus.	Cubi	Radices	Quadratus.	Cubi	Radices	Quadratus.	Cubi
841	707281	594823321	881	776161	683797841	921	848241	781229961
842	708964	596947688	882	777924	686128968	922	850084	783777448
843	710649	599077107	883	779689	688465387	923	851929	786330467
844	712336	601211584	884	781456	690807104	924	853776	788889024
845	714025	603351125	885	783225	693154125	925	855625	791453125
846	715716	605495736	886	784996	695506456	926	857476	794022776
847	717409	607645423	887	786769	697864103	927	859329	796597983
848	719104	609800192	888	788544	700227072	928	861184	799178752
849	720801	611960049	889	790321	702595369	929	863041	801765089
850	722500	614125000	890	792100	704969000	930	864900	804357000
851	724201	616295051	891	793881	707347971	931	866761	806954491
852	725904	618470208	892	795664	709732288	932	868624	809557568
853	727609	620650477	893	797449	712121957	933	870489	812166237
854	729316	622835864	894	799236	714516984	934	872356	814780504
855	731025	625026375	895	801025	716917375	935	874225	817400375
856	732736	627222016	896	802816	719323136	936	876096	820025856
857	734449	629422793	897	804609	721734273	937	877969	822656953
858	736164	631628712	898	806404	724150792	938	879844	825293672
859	737881	633839779	899	808201	726572699	939	881721	827936019
860	739600	636056000	900	810000	729000000	940	883600	830584000
861	741321	638277381	901	811801	731432701	941	885481	833237621
862	743044	640503928	902	813604	733870808	942	887364	835896888
863	744769	642735647	903	815409	736314327	943	889249	838561807
864	746496	644972544	904	817216	738763264	944	891136	841232384
865	748225	647214625	905	819025	741217625	945	893025	843908625
866	749956	649461896	906	820836	743677416	946	894916	846590536
867	751689	651714363	907	822649	746142643	947	896809	849278123
868	753424	653972032	908	824464	748613312	948	898704	851971392
869	755161	656234909	909	826281	751089429	949	900601	854670349
870	756900	658503000	910	828100	753571000	950	902500	857375000
871	758641	660776311	911	829921	756058031	951	904401	860085351
872	760384	663054848	912	831744	758550528	952	906304	862801408
873	762129	665338617	913	833569	761048497	953	908209	865523177
874	763876	667627624	914	835396	763551944	954	910116	868250664
875	765625	669921875	915	837225	766060875	955	912025	870983875
876	767376	672221376	916	839056	768575296	956	913936	873722816
877	769129	674526133	917	840889	771095213	957	915849	876467493
878	770884	676836152	918	842724	773620632	958	917764	879217912
879	772641	679151439	919	844561	776151559	959	919681	881974079
880	774400	681472000	920	846400	778688000	960	921600	884736000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
961	923521	887503681	975	950625	926859375	989	978121	967361669
962	925444	890277128	976	952576	929714176	990	980100	970299000
963	927369	893056347	977	954529	932574833	991	982081	973242271
964	929296	895841344	978	956484	935441352	992	984064	976191488
965	931225	898632125	979	958441	938313739	993	986049	979146657
966	933156	901428696	980	960400	941192000	994	988036	982107784
967	935089	904231063	981	962361	944076141	995	990025	985074875
968	937024	907039232	982	964324	946966168	996	992016	988047936
969	938961	909853209	983	966289	949862087	997	994009	991026973
970	940900	912673000	984	968256	952763904	998	996004	994011992
971	942841	915498611	985	970225	955671625	999	998001	997002999
972	944784	918330048	986	972196	958585256	1000	1000000	1000000000
973	946729	921167317	987	974169	961504803			
974	948676	924010424	988	976144	964430272			

DE DIFFERENTIIS QVADRATORVM & cuborum, & de continuatione tabulæ eorundem.

Differētiæ quadratorū

QVONIAM quadrati numeri creantur per continuam additionem numerorum imparium, vt Arithmetici demonſtrant: fit vt differentia inter quemlibet quadratum, & proxime inſequentem ſit dupla radicis minoris, addita inſuper vnitate. Itaq. duobus modis tabula quadratorum componi poteſt, & continuari. Vno modo ſi omnes numeri impares ordine ponãtur, initio ſumpto ab 1. Nam 1. dat primum quadratum 1. Et ex 1. & 3. fit ſecundus 4. cui ſi addatur ſequens impar 5. fit tertius 9. & ſi addatur impar ſequens 7. fit quartus quadratus 16. atque ita deinceps. Habet autem quilibet quadratus radicem tot vnitatum, quot numeri impares ipſum conficiunt. Vt quia ſolus impar 1. dat primum quadratum 1. propterea eius radix eſt 1. Deinde quia duo impares 1. & 3. conficiunt ſecundum quadratum 4. erit eius radix 2. Sic quia duodecim numeri impares 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23 cōponūt quadratū 144. erit eius radix 12. & ſic de cæteris.

Compoſitio tabulæ quadratorum.

Numeri impares	Quadrati.	Radices.
1	1	1
3	4	2
5	9	3
7	16	4
9	25	5
11	36	6
13	49	7
15	64	8
17	81	9
19	100	10
21	121	11
23	144	12

Atque in hunc modum ſi ſemper ſequens numerus impar adijciatur ad quadratum præcedentem, conflatur ſequens numerus quadratus, continuabiturque tabula in infinitum: ſi tamen prius ſeries numerorum imparium continuetur. Radices ſerie numerorum naturali progrediuntur.

ALIO modo condi poterit tabula quadratorum, & in infinitum continuari, ſine numerorum imparium ſerie, ſi omnes radices ponantur ordine, vt in tabula vides. Cum enim primus quadratus ſit 1. cuius radix 1, ſi hæc radix duplicata, addita inſuper 1. addatur primo quadrato 1. fit ſecundus 4. cuius radix 2. Hæc duplicata, & inſuper addita 1. ſi adijciatur ſecundo quadrato 4 fit tertius 9. cuius radix 3. quæ duplicata, & inſuper addita 1. facit 7. Si igitur addantur 7. ad quadratum 9. fit quartus quadratus 16. & ſic in infinitum.

NVMERI autem cubi gignuntur quoque ex additione numerorum imparium

parium, hoc modo. Descriptâ serie imparium numerorum ab 1. incipientium, primus 1. dat primum cubum 1. cuius radix 1. Duo deinde sequentes 3. 5. coaceruati præbent secundum cubum 8. cuius radix 2. Tres insequentes 7. 9. 11. exhibent tertium cubum 27. cuius radix 3. Atque eundẽ in modum sequentes quatuor impares conficient quartum cubum, & insequentes quinque quintum, & sic deinceps in infinitum. Quilibet autem cubus radicem habet tot vnitatum quot impares numeri coaceruati ipsum componunt.

Generatio cuborum.

Numeri impares	Cubi	Radices
1	1	1
3		
5	8	2
7		
9		
11	27	3
13		
15		
17		
19	64	4
21		
23		
25		
27		
29	125	5

PRODVCITVR quoque cubus cuiuscunque radicis, si ea radix in suum quadratum ducatur. Vt cubus radicis 16. est 4096. genitus ex radice 16. multiplicata in 256. quadratũ eiusdem radicis.

VERVM quia permolestum est, tam seriem numerorum imparium in tot terminis continuare, vt ex eorum additione omnes cubi generentur, vt dictum est, quam radices oẽs per suos quadratos multiplicare: obseruauit Ioan. Baptista Villalpandus nostræ Societatis sacerdos Theologus, ac Mathematicus egregius, cuius eruditionis in rebus Mathematicis specimen præclarum extat in apparatu Vrbis, ac Templi Hierosolimitani, præsertim vero in multiplici duarum mediarum proportionalium inter duas rectas inuentione; obseruauit inquam pulcherrimam proprietatem cuborum numerorum, per quam differentiæ cuborum ordine sine magna difficultate reperiuntur, quæ postea ordine ad cubos præcedentes additæ conficiunt cubos insequentes. Res autem sic se habet. In columna sinistra scribatur progressio Arithmetica, quæ à 6. incipiat, & per 6. progrediatur. In secunda columna reponantur numeri, qui ex numeris primæ columnæ componuntur hac arte. Iuxta 6. ponatur 1. Deinde 7. qui numerus ex 1. & 6. conflatur. Post hæc numerus 19. ex 7. & 12. coaceruatus. Atque ita deinceps quilibet bini numeri primæ, ac secundæ columnæ simul additi conficient numerum inferiorem in secunda columna. In tertia deinde columna collocentur omnes cubi, qui per continuam additionem numerorum secundæ columnæ, quæ quidem differentias cuborum continet, colliguntur hac ratione. Primus cubus est 1. cui si addas sequentem differentiam 7. fa-

Differentię cuborũ quo modo reperiantur.

Constructio tabulę cuborum.

cies secundum cubum 8. & addendo differentiam sequentem 19. conflabis tertium cubum 27. & ita deinceps. Semper enim in tabella apposita iuxta

Progreſsio ſenarij	Differentię cuborũ	Cubi	Radices
6	1	1	1
12	7	8	2
18	19	27	3
24	37	64	4
30	61	125	5
36	91	216	6
42	127	343	7
48	169	512	8
54	217	729	9
60	271	1000	10
66	331	1331	11
72	397	1728	12
78	469	2197	13
84	547	2744	14
90	631	3375	15
96	721	4096	16

quemlibet cubum ponitur differentia, qua à præcedenti cubo differt. In quarta denique columna ſcribantur ordine cuborum radices.

EAEDEM differentiæ cuborum in ſecunda columna deſcriptæ inuenientur quoque hoc modo. Radicis propoſitæ quadratum triplicetur, addaturque radix triplicata, atque inſuper 1. Conflatus enim numerus erit differentia, qua cubus propoſitæ radicis ab inſequenti cubo differt. Vt ſi deſideretur differentia inter cubum 216. radicis 6. & cubum proxime maiorem. Quadratum radicis 6. eſt 36. triplum eius eſt 108. cui ſi addatur triplum radicis, videlicet 18. & inſuper vnitas, conflabitur differentia 127. quæſita. Atque hoc modo, ſi continuentur differentiæ cuborum ope progreſſionis ſenarij, extendetur tabula cuborum, quãtum libuerit. Sunt autem, vt vides, numeri progreſſionis ſenarij ſextupli radicum cuborum, ſinguli ſingularum. Vt 60, ſextuplus eſt radicis 10.

QVIA

QVIA vero diximus, cubos gigni ex additione numerorum imparium, nimirum primum esse 1. secundum ex duobus sequentibus 3.5. confici, & tertium ex tribus sequentibus 7.9.11. &c. ita vt quilibet ex tot imparibus coacervetur, quot vnitates in eius radice continentur; si curiosus quispiam nosse desideret, (quod scire non iniucundum est) quotnam sint illi numeri impares propositum cubum componentes, hoc est, à quonam impari illi impares incipiant, & in quo desinant, consequetur id hoc artificio. Radix propositi cubi, si impar est, multiplicetur per semissem numeri proxime minoris, & duplo producti addatur 1. Numerus enim conflatus erit primus imparium quæsitorum. Quod si radix fuerit par, ducatur eius semissis in numerum proxime minorem radice, & duplo producti adijciatur 1. Rursus enim primus imparium, qui quæruntur, conficietur. Exempli gratia. Propositus sit cubus 125. cuius radix 5. ac proinde ex quinque numeris imparibus coacervatus. Duco radicem 5. quia est impar, in 2. semissem numeri 4. proxime minoris, efficioque 10. duplico, fiunt 20. & addita 1. fit primus imparium 21. Ergo quinque impares quæsiti sunt. 21.23. 25. 27. 29. qui in vnam summam collecti constituunt cubum 125. Rursus datus sit cubus 1728. cuius radix 12. ideoque ex 12. imparibus numeris coagmentatus. Semissem radicis, quia par est, nimirũ 6. duco in 11. numerũ proxime minorẽ radice, numerũque productum 66. duplico, addoque 1. Numerus enim compositus 133. erit primus 12. imparium, quos quærimus. Ergo omnes 12. erunt hi. 133. 135. 137. 139. 141. 143. 145. 147. 149. 151. 153. 155. conficientes cubum 1728. Qui numeri impares datum cubum componant

REGVLA hæc sic demonstratur. Quando radix impar per semissem numeri proxime minoris multiplicatur, vel semissis radicis paris per numerum proxime minorem radice, producitur summa terminorum seriei naturalis numerorum ab 1. vsq. ad numerum proxime minorem radice, vt in progressione Arithmetica diximus, hoc est, numerus terminorum imparium, qui primum imparem quæsitum præcedunt in serie numerorum imparium; cum primus sit vnus, deinde sequantur duo, postea tres &c. Igitur ea summa indicat, quotum locum occupet impar numerus imparem quæsitum antecedens: quia vero is locus duplicatus, dempta 1. ex duplo, exhibet vltimum illum imparem, si ad eundem duplicatum addatur 1. efficietur primus imparium quæsitorum. Verbi gratia, si quæratur primus septem imparium, qui conficiunt cubum 343. cuius radix 7. quærimus prius summam 6. terminorum seriei naturalis, quæ est 21. quod fit, si ad 6. addo 1. & summam 7. id est, radicem imparem, ducam in 3. semissem 6. terminorum. Igitur impar numerus præcedens primum quæsitum ponitur in 21. loco. Duplico, addoque 1. fit primus impar quæsitus 43. Sunt ergo septem quæsiti, 43.45.47.49.51.53. 55. qui constituunt cubum 343.

SED vt certi simus, quando radix est magna, num primus imparium recte sit inuentus, ne cogamur omnes impares continuare, quod laboriosum est, inuestigabimus vltimum ex primo, deinde summã omnium, hoc modo. Differentiã progressionis numerorũ impariũ, nimirum 2. ducemus in numerum terminorum, minus vno, productumque primo inuento addemus. Conflatus enim numerus erit postremus imparium quæsitorum. Si igitur ad hunc apponamus primum, & summæ semissem in numerum terminorum, id est, in radicem

radicem cubi propositi ducamus, producetur propositus cubus, si primus imparium rectè inuentus est. Vt in proximo cubo 343. cuius radix 7. si ad 43. primum imparem inuentum addamus 12. numerum scilicet productum ex 2. in radicem 7. minus vno, fit septimus numerus impar quæsitus 55. ad quem si apponatur primus 43. fiunt 98. Et si huius numeri semissis 49. ducatur in radicem 7. producetur cubus 343. &c.

ALIA etiam ratione perfacili eosdem numeros impares datum cubum componentes reperiemus hoc modo. Sit datus cubus 117649. cuius radix 49. ac proinde reperiendi 49. numeri impares, quorum summa sit 117649. Ponamus primum imparem esse 1 ℞. id est, 1. Radicem (vt in Algebra fieri solet) Et quia differentia numerorum imparium est 2. erit secundus impar 1 ℞. † 2. hoc est, 1 ℞ plus 2. tertius 1 ℞. † 4. Et ne cogamur continuare omnes 49. terminos, ducemus differentiam 2. in 48. numerum terminorum, minus vno, & ad productum 96. addemus primum, quem posuimus esse 1. ℞. Ita enim fiet vltimus terminus quæsitus 1 ℞. † 96. cui si addamus primum, videlicet 1 ℞. fit summa 2 ℞. † 96. cuius semissis 1 ℞ † 48. ducta in 49. numerum terminorum, facit numerũ 49 ℞ † 2352. qui æquatur cubo proposito 117649. Ablatis ergo vtrinque 2352. remanebunt 49. ℞. æquales numero 115297. quo diuiso per 49. fit Quotiens 2353. pro primo impari quæsito. quod vt probemus, ducemus differentiam imparium, nimirum 2. in 48. numerum terminorum, minus vno, productumque 96. primo 2353. addemus, vt conficiamus vltimum terminum 2449. Deinde primum huic adijciemus, & summæ 4802. semissem 2401. in 49. numerum terminorum ducemus, procreabiturq. numerus 117649. qui dato cubo æqualis est. Recte ergo primus impar inuentus est.

VSVS PRAECEDENTIS TABVLAE quadratorum, & cuborum in radicibus extrahendis.

INTER alias vtilitates habet superior tabula quadratorum, & cuborum egregium vsum in radicibus quadratis, & cubicis extrahendis; quippe cum per eam statim expediantur tria prima puncta ad sinistram, simulque tres figuræ radicis inueniantur: quod vno, aut altero exemplo planum fiet.

SIT primum extrahenda radix quadrata ex apposito numero. Primum

1 1 7 6 8 9 0 1 4 5 (3 4 3 0 5.

quæro inter quadratos numerum 117689. trium punctorum, quem quia non inuenio, capio proxime minorem quadratum 117649. eiusque radicem 343 in Quotiente pono. Inuẽto autẽ quadrato subtracto ex numero 117689. trium punctorum, remanent 40. Ergo sequens punctum erit 4001. quo (relicta figura 1.) diuiso per 686, duplum radicis inuentæ, reperitur Quotiens 0. eritque vltimum punctum 400145. quo (relicta etiam figura 5.) diuiso per 6860, duplum radicis inuentæ, inuenitur Quotiens 5. Est ergo tota radix $34305\frac{57120}{68611}$.

SIT

SIT deinde ex apposito numero extrahenda radix cubica. Primum in-

4 2 5 0 9 5 4 9 6 1 3 0 7 (1 6 1 9 9

ter cubos quæro numerum 4250954. trium primorum punctorum, quem quia non reperio, accipio cubum proxime minorem 4173281. cum sua radice 161. qui cubus ex tribus punctis subtractus relinquit 77673. ita vt sequens punctum sit 77673961.

PARO ergo diuisorem, vt lib. 6. ad finem propos. 19. docuimus, multiplicando radicis inuentę quadratum ex eadem tabula excerptum, nimirum 25921. per 300. qui erit 7776300. per quem si meum punctum diuido, reperio Quotientem 9. & facta operatione remanent 7295302. adeo vt vltimum punctum sit 7295302307.

DENIQVE paro nouum diuisorem, multiplicando radicis 1619. inuentę quadratum 2621161. per 300 qui erit 786348300. per quem si vltimum meum punctum diuido, inuenio Quotientem 9. Facta autem operatione, remanent 214232708. absolutaque est extractio.

NEQVE vero negligendum videtur non inutile compendium in extractione cubica, quod est eiusmodi. Quando nouus diuisor parandus est, ne cogamur totius radicis inuentæ quadratum supputare, diuidemus radicem inuentam in duas partes, ita vt vna pars sit vltima figura Quotientis inuenta, nimirum inuenta quarta figura 9. in dato exemplo, partiemur radicē inuētam 1619. in 1610. & 9. quas partes bis scribemus, vt in apposita formula vides. Si igitur singulas partes in singulas partes ducemus, producetur quadratus quæsitus radicis 1619. vt ad propos. 1. lib. 2. Eucl. demonstrauimus. Verbi gratia quia præcedens quadratum numeri 161. fuit 25921. appositis duabus cifris, habebimus productum 2592100. ex 1610. in 1610. cui si addemus 14490. bis numerum videlicet productum ex 1610. in 9. vel ex 9. in 1610. & insuper 81. productum ex 9. in 9. conficiemus 2621161. quadratum radicis inuentæ 1619. Eadem ratione si huius numeri 16199. quadratum desideremus, diuidemus eum in 16190. 9. bis, vt in hac formula vides. Deinde quia iam quadratum habuimus 2621161. numeri 1619. appositis duabus cifris, habebimus 262116100. quadratum numeri 16190. cui si addemus 145710. bis, productum videlicet ex 16190. in 9. vel ex 9. in 16190. & insuper 81. productum ex 9. in 9. efficiemus 262407601. quadratum numeri 16199. & sic de cæteris. Hoc ergo compendium reddet faciliorem cubicæ radicis extractionem, cum semper præcedentis radicis inuentæ quadratum habeamus, & appositis duabus cifris, quadratum conficiamus eiusdem radicis, apposita ei vna cifra, &c.

1610.	9.
1610.	9.

16190.	9.
16190.	9.

BENE autem vides, si tabula superior extenderetur, vt haberentur quadrati, & cubi radicum 4. aut 5. figurarum, multo faciliorem effici extractionē radicum. Sed quia tabula excresceret hac ratione in immensum, cōtenti fuimus tabula, in qua radices habent 3. figuras ad summum, cum eam quilibet ex ijs, quæ diximus, extendere possit, & continuare.

FINIS OCTAVI LIBRI.

INDEX ALPHABETICVS

RERVM, AC VERBORVM.



Area

Cor-

D

G

H

I

de-

N

O

P

Pro-

Q

cto

461

463

Saccus

S

aquis

T

INDEX.

V

FINIS.

REGESTVM.

† a b c.

A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z.

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Sſ Tt Vu Xx Yy Zz.

Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iii Kkk Lll Mmm Nnn.

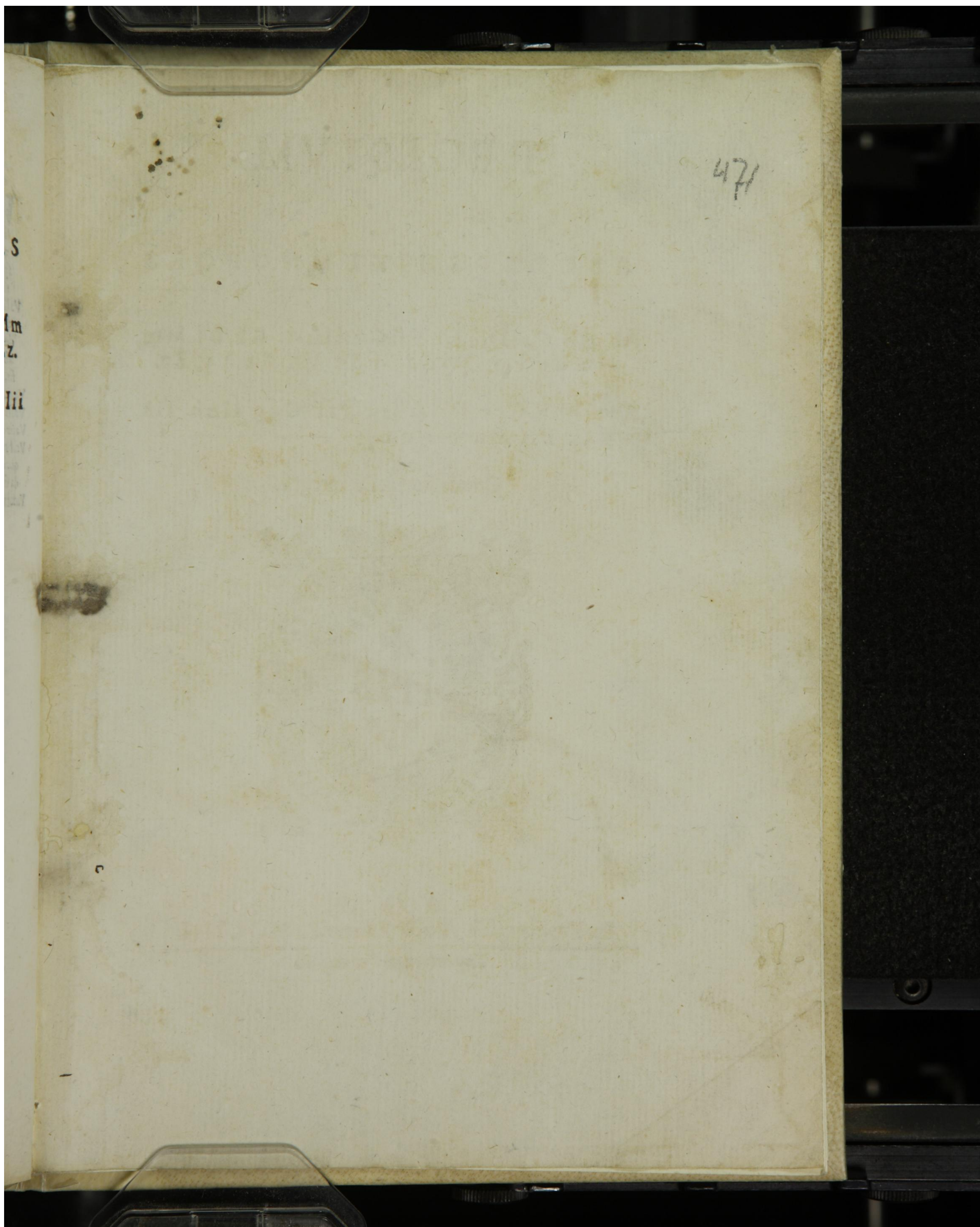
Omnia ſunt folia integra.



ROMAE,
Ex Typographia Aloiſij Zannetti. MDCIIII.

Superiorum Permiſſu.

Z


471

005643762